МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 33, № 2 (1983)

ОБОБЩЕНИЕ ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ П. С. НОВИКОВА О СЕЧЕНИЯХ БОРЕЛЕВСКИХ МНОЖЕСТВ

В. Г. Кановей

В статье П. С. Новикова [1] для произвольного плоского борелевского множества доказано, что совокупность всех точек этого множества, принадлежащих его замкнутым вертикальным сечениям, является CA-множеством. Мы докажем, что этот результат остается справедливым, если вместо замкнутых сечений рассматривать сечения, принадлежащие любому фиксированному классу борелевской иерархии.

Начнем с определений. Пространство Бэра I состоит из всех функций, определенных на множестве натуральных чисел $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, со значениями в ω, т. е. из всех бесконечных последовательностей натуральных чисел [2]. Мы будем рассматривать подмножества бэровской плоскости I^2, а не евклидовой плоскости OXY. Однако полученный результат нетрудно перенести на подмножества евклидовой плоскости, используя тот факт, что пространство Бэра гомеоморфно множеству всех иррациональных точек евклидовой прямой, см. [2].

Множества, которые можно получить из открытых в данном пространстве I^m (где $m \geqslant 1$) множеств с помощью операций счетного объединения, счетного пересечения и дополнения, называются борелевскими. Эти множества организованы в борелевскую иерархию, состоящую из классов Σ^0_α, Π^0_α, Δ^0_α, определяемых для всякого ординала (порядкового числа) α, $1 \leqslant \alpha < \omega_1$, индукцией по α следующим образом:

Σ_1^0 есть совокупность всех открытых множеств;

Π_α^0 есть совокупность всех дополнений множеств из Σ_α^0;

Σ_α^0 (при $\alpha \geqslant 2$) есть совокупность всех счетных объединений множеств классов Π_β^0 с $\beta < \alpha$;

$$\Delta_\alpha^0 = \Sigma_\alpha^0 \cap \Pi_\alpha^0.$$

Проекции на пространство I^m замкнутых множеств $P \subseteq I^{m+1}$ образуют класс Σ_1^1-множеств (т. е. A-множеств в классической системе обозначений, принятой в [1]). Дополнения множеств класса Σ_1^1 называются Π_1^1-множествами (или CA-множествами).

Пусть $P \subseteq I^2$. Каждой точке $x \in I$ сопоставим сечение

$$P_x = \{y \in I\colon \langle x, y\rangle \in P\}$$

множества P вертикальной прямой с абсциссой x. Для каждого класса K борелевской иерархии определим

$$P_{(K)} = \{\langle x, y\rangle \in P\colon P_x \in K\}$$

— совокупность всех точек множества P, лежащих на вертикальных сечениях этого множества, которые (сечения) принадлежат этому классу K.

ТЕОРЕМА. *Пусть K — один из классов Σ_α^0, Π_α^0, Δ_α^0. Тогда для каждого борелевского множества $P \subseteq I^2$, множество $P_{(K)}$ принадлежит классу Π_1^1.*

Доказательство теоремы использует кодировку борелевских множеств с помощью точек пространства I. Эта кодировка сопоставляет каждой точке f некоторого специального Π_1^1-множества $W \subseteq I$ (множества борелевских кодов) множество $B_f \subseteq I$ следующим образом, см. [3]:

(1) Если $f(0) = 0$, то $B_f = U_{f(1)}$, где $\{U_i\colon i \in \omega\}$ есть некоторая раз навсегда фиксированная нумерация всех базовых открыто замкнутых в I множеств.

(2) Если $f(0) = 1$ и множество $B_{(f)_m}$ уже определено для всех $m \in \omega$, то $B_f = \bigcup_{m\in\omega} B_{(f)_m}$. Здесь $(f)_m \in I$ есть функция (точка I), определенная на ω условием

$$(f)_m(k) = f(2^m(2k+1)) \text{ для всех } k.$$

(3) Если $f(0) = 2$, $g(k+1) = f(k)$ для всех k, и множество B_g определено, то $B_f = I - B_g$.

Через W обозначается совокупность всех точек $f \in I$ таких, что можно определить множество $B_f \subseteq I$ в соответствии с условиями (1) — (3). Если $f \in W$, то множество B_f является борелевским. Обратно, каждое борелевское $B \subseteq I$ имеет вид B_f для подходящего кода $f \in W$.

Ключевым моментом доказательства теоремы является

ЛЕММА [4]. *Множество* $W(\Sigma^0_\alpha) = \{f \in W\colon B_f \in \Sigma^0_\alpha\}$ *принадлежит классу* $\mathbf{\Pi}^1_1$, *каков бы ни был ординал* $\alpha < \omega_1$.

Эта лемма влечет

Следствие. *Аналогичным образом определяемые множества* $W(\mathbf{\Pi}^0_\alpha)$ и $W(\Delta^0_\alpha)$ *также все принадлежат классу* $\mathbf{\Pi}^1_1$.

Доказательство следствия. Каждой точке $g \in I$ сопоставим точку $2^\frown g \in I$ равенствами $(2^\frown g)(0) = 2$ и $(2^\frown g)(k+1) = g(k)$. Тогда, очевидно,

$$W(\mathbf{\Pi}^0_\alpha) = \{g \in I\colon 2^\frown g \in W(\Sigma^0_\alpha)\},$$

откуда и из леммы следует $W(\Pi^0_\alpha) \in \Pi^1_1$. (Здесь используется тот факт, что класс $\mathbf{\Pi}^1_1$, как и всякий проективный или борелевский класс, замкнут относительно операции непрерывного прообраза, см., например, [5]; отображение $g \mapsto 2^\wedge g$, очевидно, непрерывно.)

Наконец, ясно, что $W(\Delta^0_\alpha) = W(\Sigma^0_\alpha) \cap W(\mathbf{\Pi}^0_\alpha)$.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы. Докажем, что каждое борелевское множество $P \subseteq I^2$ обладает следующим свойством:

($*$) Найдется непрерывная функция $F\colon I \to W$ такая, что $P_x = B_{F(x)}$ для всех $x \in I$.

Борелевские подмножества I^2 получаются повторным применением операций счетного объединения и дополнения из базовых множеств вида $U_i \times U_j$. Поэтому нужно доказать, что

(а) каждое множество P вида $U_i \times U_j$ удовлетворяет ($*$),

(б) если $P \subseteq I^2$ удовлетворяет ($*$), то дополнение $I^2 - P$ также удовлетворяет ($*$), и наконец

(в) если множества $P_0, P_1, P_2, \ldots \subseteq I^2$ удовлетворяют ($*$), то их объединение P также удовлетворяет ($*$).

Если $P = U_i \times U_j$, то при $x \in I - U_i$ через $F(x)$ обозначаем точку $\omega \times \{0\}$ (предполагается, что U_0 — пустое множество), а при $x \in U_i$ через $F(x)$ обозначаем точку $f \in I$ такую, что $f(1) = j$ и $f(k) = 0$ при $k \neq 1$. Построенная функция F доказывает (а).

Для доказательства (б) заметим, что если функция F обеспечивает $(*)$ для множества P, то, определив $G(x) = 2^\frown F(x)$ для всех $x \in I$, мы получим функцию G, искомую в смысле $(*)$ для множества $I^2 - P$.

Наконец, если функции $F_0, F_1, F_2, \ldots$ обеспечивают $(*)$ для множеств $P_0, P_1, P_2, \ldots$, то следует для каждого $x \in I$ через $F(x)$ обозначить точку $f \in I$ такую, что $f(0) = 1$ и $(f)_m = F_m(x)$, $\forall m$ (эти соотношения задают f однозначно). Полученная функция F будет искомой для объединения множеств P_m.

Итак, в самом деле любое борелевское $P \subseteq I^2$ имеет свойство $(*)$. В частности, некоторая непрерывная F: $I \to W$ обеспечивает $(*)$ для множества P из условия теоремы. Теперь, каков бы ни был борелевский класс K, мы имеем равенство

$$P_{(K)} = \{\langle x, y\rangle \in P: F(x) \in W(K)\},$$

которое в силу леммы и следствия и дает $P_{(K)} \in \mathbf{\Pi}_1^1$.

Замечание. В условиях теоремы проекция пр $P_{(K)}$ множества $P_{(K)}$ на первую ось является пересечением $\mathbf{\Pi}_1^1$-множества $\{x: F(x) \in W(K)\}$ с $\mathbf{\Sigma}_1^1$-множеством пр P. Таким образом, если дополнительно известно, что пр P — борелевское множество, то можно утверждать, что пр $P_{(K)} \in \mathbf{\Pi}_1^1$.

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступило
29.X.1980

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Новиков П. С., О проекциях некоторых B-множеств, Докл. АН СССР, 23 (1939), № 9, 863—864.
[2] Александров П. С., Введение в теорию множеств и общую топологию, М., «Наука», 1977.
[3] Solovay R. M., A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable, Ann. of Math., 92 (1970), 1—56.
[4] Louveau A., La hierarchie Borelienne des ensembles Δ_1^1, C. R. Acad. Sci. Paris, 285 (1977), 601—604.
[5] Куратовский К., Мостовский А., Теория множеств, М., «Мир», 1970.