МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 33, № 3 (1983)

ОТВЕТ НА ВОПРОС Н. Н. ЛУЗИНА ОБ ОТДЕЛИМОСТИ CA-КРИВЫХ

В. Г. Кановей

Получен положительный ответ на вопрос, поставленный Н. Н. Лузиным [1]: существуют ли две CA-кривые, одна из которых лежит под другой, неотделимые B при помощи множества?

Приведем несколько определений [1]. CA-кривой в плоскости OXY называется любая всюду определенная на OX функциия $y = f(x)$, график которой есть CA-множество (как подмножество плоскости OXY). Определение классов B (борелевские множества), A (аналитические множества) и CA (аналитические дополнения) (см., например, в [2, стр. 586]).

Кривая $y = f(x)$ лежит под кривой $y = g(x)$, если $f(x) < g(x)$ для всех точек x оси OX.

Пусть $E \subseteq OXY$. Каждая точка x оси OX определяет сечение $E_x = \{y: \langle x, y\rangle \in E\}$ множества E вертикальной прямой с абсциссой x. Проекция E на ось OX есть множество пр $E = \{x: E_x$ непусто$\}$.

Две CA-кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$, первая из которых лежит под второй, Лузин [1] назвал отделимыми B при помощи множества, если найдется плоское борелевское множество E такое, что пр$E = OX$ и $f(x) < y < g(x)$ всякий раз, когда $x \in OX$ и $\langle x, y\rangle \in E$.

ТЕОРЕМА. *Существуют две CA-кривые $y = f(x)$ и $y = g(x)$, первая из которых лежит под второй, неотделимые B при помощи множества.*

Доказательство этой теоремы мы начнем с того, что зафиксируем CA-кривую $y = f(x)$, не являющуюся B-

кривой (это означает, что график $\{\langle x, f(x)\rangle: x \in OX\}$ не является борелевским множеством). Существование таких кривых доказано в [1].

Для всех $n \in \omega$ и $x \in OX$ положим $g_n(x) = f(x) + 2^{-n}$. Мы имеем семейство CA-кривых $y = g_n(x)$ (каждая из них в самом деле является CA-кривой, так как получена из CA-кривой $y = f(x)$ вертикальным параллельным переносом). При этом кривая $y = f(x)$ лежит под каждой из кривых $y = g_n(x)$.

Теперь для доказательства теоремы достаточно доказать следующую лемму:

ЛЕММА 1. *Найдется такое n, что кривые $y = f(x)$ и $y = g_n(x)$ не являются отделимыми B при помощи множества.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда для каждого n существует плоское борелевское множество E_n с пр $E_n = OX$ такое, что $f(x) < y < f(x) + 2^{-n}$ всякий раз, когда $\langle x, y\rangle \in E_n$.

С целью получить противоречие, рассмотрим множества $W_n = \{\langle x, y\rangle$: найдется такое $y' \in E_{nx}$, что $|y - y'| < 2^{-n}\}$.

ЛЕММА 2. *Каждое W_n является A-множеством.*

Доказательство несложно: W_n есть проекция на плоскость OXY пространственного борелевского множества

$$\{\langle x, y, z\rangle: \langle x, z\rangle \in E_n \wedge |y - z| < 2^{-n}\}.$$

Но проекции борелевских множеств суть A-множества.

Продолжая доказательство леммы 1, докажем еще одну вспомогательную лемму.

ЛЕММА 3. *График $F = \{\langle x, f(x)\rangle: x \in OX\}$ функции $y = f(x)$ удовлетворяет равенству $F = \bigcap\limits_{n\in\omega} W_n$.*

Доказательство. Пусть точки x и y таковы, что $y = f(x)$. Докажем $\langle x, y\rangle \in W_n$. По выбору множеств E_n, для данного n найдется точка y' такая, что $\langle x, y'\rangle \in E_n$, и она удовлетворяет соотношению $|y' - f(x)| < 2^{-n}$. Это и означает $\langle x, y\rangle \in W_n$.

Обратно, пусть пара $\langle x, y\rangle$ принадлежит всем множествам W_n. Докажем, что $y = f(x)$. Предположим противное. Тогда найдется натуральное n такое, что $|y - f(x)| > 2^{-n+1}$. По определению W_n можно выбрать y' так, чтобы $\langle x, y'\rangle \in E_n$ и $|y - y'| < 2^{-n}$. Но согласпо выбору множеств E_n, должно выполняться неравенство $|y' - f(x)| < 2^{-n}$. Теперь имеем $|y - f(x)| < < 2^{-n} + 2^{-n} = 2^{-n+1}$, что противоречит выбору n.

Полученное противоречие завершает доказательство равенства $y = f(x)$ и леммы 3.

Возвращаемся к доказательству леммы 1. Согласно леммам 2 и 3, график F функции $y = f(x)$ является пересечением счетного числа A-множеств W_n. Тем самым, F есть A-множество [3, стр. 347]. Но это противоречит выбору кривой $y = f(x)$, согласно которому F не может быть A-множеством. (Всякое множество, одновременно принадлежащее классам A и CA, является борелевским по теореме Суслина.)

Полученное противоречие завершает доказательство леммы 1 и теоремы.

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступило
29.X.1980

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Лузин Н. Н., Некоторые замечания о кривых, являющихся аналитическими дополнениями, Собр. соч., т. 2, М., Изд. АН СССР, 1958, 537—546.

[2] Лузин Н. Н., О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций, Собр. соч., т. 2, М., Изд. АН СССР, 1958, 552—616.

[3] Лузин Н. Н., Мемуар об аналитических и проективных множествах, Собр. Соч., т. 2, М., Изд. АН СССР, 1958, 317—379.