МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 37, № 2 (1985)

К ПРОБЛЕМЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕБОРЕЛЕВСКИХ $AF_{\|}$-МНОЖЕСТВ

В. Г. Кановей

Абсолютными G_δ-множествами называются множества, принадлежащие классу G_δ в некотором (а тогда и во всяком) полном метрическом (ПМ) пространстве, где они лежат. Аналогично вводятся и аналогичным свойством обладают понятия абсолютного A- и абсолютного CA-множества. Каждое абсолютное G_δ метризуемо полной метрикой. Следовательно, такое множество X имеет свойство $F_{\|}$, состоящее в том, что нет замкнутых в X множеств $Y \subseteq X$ первой категории в Y. В работе [1] доказана

ТЕОРЕМА (Гуревич). *Если X лежит в сепарабельном метрическом (не обязательно полном) пространстве P, является CA-множеством в P и имеет свойство $F_{\|}$, то X является G_δ-множеством в P.*

Отсюда следует, в частности, что каждое сепарабельное абсолютное CA-множество со свойством $F_{\|}$ является абсолютным G_δ, т. е. импликация $G_\delta \to F_{\|}$ обратима на сепарабельных абсолютных CA-множествах. Гуревич [1] поставил проблему: существует ли сепарабельное абсолютное A-множество со свойством $F_{\|}$, не абсолютное G_δ? Мы доказываем, что эта проблема неразрешима.

ТЕОРЕМА [2]. *Следующие три утверждения эквивалентны и неразрешимы в теории ZFC Цермело — Френкеля с аксиомой выбора:*

(а) *Существует сепарабельное абсолютное A-множество со свойством $F_{\|}$, не абсолютное G_δ.*

(б) *Существует лежащее в пространстве Бэра $\mathcal{J}$ несчетное CA-множество, не содержащее дисконтинуумов (т. е. множеств, гомеоморфных канторову дисконтинууму).*

(в) *Существует неборелевское CA-множество $E \subseteq \mathcal{J}$ такое, что каждое борелевское $B \subseteq E$ можно вложить в F_δ-множество $U \subseteq E$.*

Таким образом, проблема Гуревича неразрешима в ZFC. Этой проблемой уже в шестидесятые и семидесятые годы интересовались Майкл и Стоун, Сан-Раймон, Островский (см. в [2]).

Импликация (б) $\to$ (а) доказана самим Гуревичем. Пусть CA-множество $E \subseteq \mathcal{J}$ несчетно и не содержит дисконтинуумов. По теореме Александрова — Хаусдорфа E неборелевское, т. е. A-множество $X = \mathcal{J} - E$ также неборелевское. Проверим $F_{\parallel}$ для X. Достаточно [1, с. 90] проверить, что X не содержит счетных совершенных в X множеств. Пусть напротив, $Q \subseteq X$ — такое множество. Его замыкание K в $\mathcal{J}$ совершенно в $\mathcal{J}$, и поэтому несчетно. Таким образом, E включает несчетное борелевское множество $K - Q$. Имеем противоречие с выбором E по теореме Александрова — Хаусдорфа.

Импликация (а) $\to$ (в) доказана Островским (см. [2]). Идея доказательства состоит в следующем. Вложим множество X', даваемое (а), в сепарабельное ПМ пространство P'. Последнее является непрерывным взаимно однозначным образом замкнутого $P \subseteq \mathcal{J}$: $P' = F(P)$. Непрерывный прообраз $E = F^{-1}(E')$ множества $E' = P' - X'$ есть CA-множество в P и в $\mathcal{J}$. Множество E неборелевское (иначе его непрерывный однозначный образ E' был бы борелевским в P', что противоречило бы теореме Гуревича, дающей неборелевость X' и E').

Рассмотрим произвольное борелевское $B \subseteq E$. Его образ $B' = F(B)$ будет, как и выше, борелевским в P'. Через K обозначим замыкание B' в P'. Пересечение $M = X' \cap K$ имеет свойство $F_{\parallel}$, как замкнутое в X'. Кроме того, ввиду борелевости B', множество $M = (M \cup B') - B'$ будет борелевским в $A = M \cup B'$. Следовательно, по теореме Гуревича, M является G_δ в A, т. е. $M = A - Z$ для подходящего множества $Z \subseteq P'$ класса F_σ в P'. Имеем $B' = A - M \subseteq Z \cap K \subseteq E'$, т. е. множество $U' = Z \cap K$ класса F_σ в P удовлетворяет $B' \subseteq U' \subseteq E'$. Прообраз $U = F^{-1}(U')$ принадлежит классу F_σ в P и в $\mathcal{J}$ и удовлетворяет соотношению $B \subseteq U \subseteq E$, что и требовалось.

Неразрешимость в ZFC предложения (б) установлена П. С. Новиковым и Соловеем (см. [2]). Таким образом для доказательства теоремы нам остается доказать импликацию (в) $\to$ (б). Этому и посвящена предлагаемая заметка.

Пространство Бэра $\mathcal{J}$ состоит из всех функций, определенных на множестве натуральных чисел $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, со значениями в ω. Топология $\mathcal{J}$ порождается системой бэровских интервалов $\mathcal{J}_u = \{x\colon u \subset x\}$, где u принадлежит совокупности Seq всех конечных кортежей элементов ω.

Доказательство импликации (в) $\to$ (б) использует представление CA-множеств в $\mathcal{J}$ с помощью решет. По причинам, ясным из дальнейшего, нам удобнее работать не с решетами, а с их кодами. Кодом решета назовем всякое множество $R \subseteq Q \times \mathrm{Seq}$, где Q — множество рациональных чисел. Каждый код решета R определяет классическое лузинское решето $\langle R_a\colon a \in Q\rangle$, составленное из открытых в $\mathcal{J}$ множеств $R_a = \bigcup_{\langle a, u\rangle \in R} \mathcal{J}_u$. Обратно, каждое составленное из открытых R_a решето получается указанным образом из своего кода $R = \{\langle a, u\rangle\colon \mathcal{J}_u \subseteq R_a\}$.

Пусть R — код решета. Если $x \in \mathcal{J}$, то *сечение* $R^x = \{a \in Q\colon x \in R_a\}$ может либо быть, либо не быть вполне упорядоченным в смысле естественного порядка Q. В первом случае пишем $x \in [R]$. Каждому $\nu < \omega_1$ сопоставляется ν-я конституанта $[R]_\nu = \{x \in [R]\colon$ порядковый тип R^x равен $\nu\}$. Конституанты $[R]_\nu$ все борелевские, попарно не пересекаются и дают $[R]$ в объединении. Само $[R]$ является CA-множеством. Обратно, каждое CA-множество имеет вид $[R]$ для подходящего кода решета R.

Допустим, что (б) не имеет места, т. е. каждое несчетное CA-множество содержит дисконтинуум. Как известно (см., например, § 3 добавления [3]), в этом случае для любого $\gamma < \omega_1$, γ-й несчетный кардинал $\omega_\gamma^{L[R]}$ в классе $L[R]$ всех множеств, конструктивных относительно R, счетен в универсуме всех множеств, т. е. $\omega_\gamma^{L[R]} < \omega_1$, каково бы ни было $R \subseteq Q \times \mathrm{Seq}$ (используется «эффективная счетность» множества $Q \times \mathrm{Seq}$).

Фиксируем код решета R такой, что каждую конституанту $[R]_\nu$ можно вложить в F_σ-множество $\subseteq [R]$. Мы докажем $\neg$ (в) и теорему, если установим, что число непустых конституант $[R]_\nu$ не более чем счетно (в этом случае $[R]$ будет борелевским).

Как известно [4], если борелевское U включено в $[R]$, то U содержится в объединении счетного числа конституант $[R]_\mu$. Поэтому предположение о несчетности числа непустых конституант приводит к существованию несчетного множества $S \subseteq \omega_1$ такого, что $[R]_\nu$ непусто для любого $\nu \in S$, и для любой пары $\mu, \nu \in S$, если $\mu < \nu$, то «аппроксимация» $[R]_{\leqslant\mu} = \bigcup_{\xi\leqslant\mu}[R]_\xi$ является F_σ-отделимой от $[R]_\nu$ (т. е. включена в некоторое F_σ-множество, не имеющее общих точек с $[R]_\nu$). Мы получим требуемое противоречие, когда найдем счетное семейство W множеств $\subseteq \mathcal{J}$ такое, что для любой пары $\mu < \nu < \omega_1$, если аппроксимация $[R]_{\leqslant\mu}$ является F_σ-отделимой от $[R]_\nu$, то отделяющее множество можно выбрать в семействе W.

Для построения W введем кодировку F_σ-множеств. Каждому $d \subseteq \omega_1 \times \mathrm{Seq}$ сопоставим множество

$$X[d] = \bigcup_{\xi<\omega_1} X[d, \xi], \text{ где } X[d, \xi] = \mathcal{J} - \bigcup_{\langle\xi, u\rangle\in d}\mathcal{J}_u.$$

Если $\lambda < \omega_1$ и $d \subseteq \lambda \times \mathrm{Seq}$, то множество $X[d]$ принадлежит классу F_σ. Обратно, каждое F_σ-множество $\subseteq \mathcal{J}$ имеет вид $X[d]$ для подходящего $d \subseteq \omega \times \mathrm{Seq}$.

В качестве W возьмем семейство всех множеств вида $X[d]$, где $d \in L[R]$, $d \subseteq \omega_1 \times \mathrm{Seq}$. Сразу неясно, почему W счетно. Заметим однако, что множество $X[d]$ вполне определено совокупностью w_d всех множеств $\{u\colon \langle\xi, u\rangle \in d\}$, $\xi < \omega_1$. Каждое w_d принадлежит $L[R]$ и состоит из подмножеств Seq. Следовательно, совокупность всех множеств w_d имеет мощность $\leqslant \omega_2^{L[R]}$ в классе $L[R]$. Но $\omega_2^{L[R]} < \omega_1$ (см. выше). Таким образом, совокупность всех w_d, а тем самым и семейство W, счетны в универсуме всех множеств.

Для доказательства импликации (в) $\to$ (б) и теоремы нам остается дать доказательство следующей леммы:

ЛЕММА 1. *Пусть $\mu < \nu < \omega_1$ и $[R]_{\leqslant\mu}$ является F_σ-отделимым от $[R]_\nu$. Тогда отделяющее множество можно выбрать из W.*

Доказательство. Через P обозначим совокупность всех конечных кортежей ординалов $<\nu$. Упорядочим P обратно включению: $p \leqslant q$, если p является продолжением q. Буквы p, q, r употребляются только для обозначения элементов множества P.

Пусть $p \in P$ и $t \subseteq P \times \omega \times \mathrm{Seq}$. Определим

$$Z_p[t] = \bigcup_{q\leqslant p,\, k\in\omega} Z_{qk}[t], \text{ где } Z_{qk}[t] = \mathcal{J} - \bigcup_{u\in e(t,\, q,\, k)}\mathcal{J}_u$$

и $e(t, q, k) = \{u: \exists r, r' \in P\ (r \leqslant r' \wedge r \leqslant q \wedge \langle r', k, u\rangle \in t)\}$. Ключевую роль играет

ЛЕММА 2. *Можно подобрать* $p \in P$ *и* $t \in L[R]$, $t \subseteq P \times \omega \times \mathrm{Seq}$ *так, чтобы* $Z_p[t]$ *отделяло* $[R]_{\leqslant\mu}$ *от* $[R]_\nu$.

Покажем, как лемма 1 следует из леммы 2. Множество $P \times \omega$ имеет мощность меньше «настоящего» ω_1 в $L[R]$, так как $\nu < \omega_1$. Фиксируем нумерацию $\{\langle q_\xi, k_\xi\rangle: \xi < \lambda\}$ этого множества в $L[R]$ $(\lambda < \omega_1)$. Через d обозначим множество

$$\{\langle \xi, u\rangle: q_\xi \leqslant p \wedge \exists r, r' \in P\ (r \leqslant r' \wedge r \leqslant q_\xi \wedge \langle r', k_\xi, u\rangle \in t)\}.$$

Ясно, что $d \subseteq \omega_1 \times \mathrm{Seq}$ и $d \in L[R]$, так как $t \in L[R]$. С другой стороны, нетрудно проверить равенство $X[d] = Z_p[t]$.

Итак, для доказательства леммы 1 (и теоремы) нам достаточно доказать лемму 2. Ее доказательство мы проведем вначале в счетной транзитивной модели M теории ZFC. Иными словами, пусть $R \in M$ — код решета, $\mu < \nu < \omega_1^M$, $L^M[R] = \{y \in M$: в M истинно $y \in L[R]\}$, и аппроксимация $[R]_{\leqslant\mu}$ является F_σ-отделимой в M от $[R]_\nu$. Требуется подобрать $p \in P$ и $t \in L^M[R]$, $t \subseteq P \times \omega \times \mathrm{Seq}$ так, чтобы в M множество $Z_p[t]$ отделяло $[R]_{\leqslant\mu}$ от $[R]_\nu$. Затем мы покажем, как переделать доказательство с тем, чтобы оно соответствовало не модели M, а универсуму всех множеств.

Построение искомых p и t использует метод вынуждения (см. [3, гл. 4]). В качестве исходных (расширяемых) моделей рассматриваются M и $M_0 = L^M[R]$. Множеством вынуждающих условий служит P; $p \leqslant q$ означает, что формулы, вынуждаемые q, вынуждаются и условием p. Множества $t \subseteq P \times M$ называются *P-термами*. Если $G \subseteq P$ и $t \subseteq P \times M$, то определяют «наполнение» $i_G(t) = \{x: \exists p \in G\ (\langle p, x\rangle \in t)\}$. Если множество $G \subseteq P$ является M_0-генерическим и $y \in M_0$, $d \in M_0[G]$, $d \subseteq y$, то существует P-терм $d^* \in M$, $d^* \subseteq P \times y$ (*имя* для d) такой, что $d = i_G(d^*)$. При этом, если d принадлежит уже модели M_0, то можно взять $d^* = P \times d$ (каноническое имя для $d \in M_0$). Все сказанное относится и к случаю, когда исходной моделью служит M, а не M_0.

Продолжаем доказательство леммы 2 в M. Фиксируем M-генерическое $G \subseteq P$. По условию леммы 1 в M истинно:

(1) *аппроксимация* $[R]_{\leqslant\mu}$ — F_σ*-отделимая от* $[R]_\nu$. Мы собираемся доказать, что предложение (1) истинно в $M[G]$ и в $M_0[G]$. Для этого покажем, как записать (1) в виде Σ^1_2-формулы с параметрами из M (такие формулы абсолютны).

Через $\varphi(R, \nu, x)$ обозначим следующую формулу:

$$\exists f\colon Q \to \nu \forall a \forall b\, (a, b \in R^x \wedge a < b \to f(a) < f(b)),$$

выражающую существование порядкового вложения R^x в ν, а через $\psi(R, \nu, x)$ — конъюнкцию $\varphi(R, \nu, x)$ с формулой

$$\exists f\colon \nu \to Q \forall \xi \forall \eta\, (\xi < \eta < \nu \to \\ \to f(\xi), f(\eta) \in R^x \wedge f(\xi) < f(\eta)),$$

выражающей существование обратного вложения. Во всех рассматриваемых моделях выполняются эквивалентности

(2) $x \in [R]_{\leqslant\mu} \leftrightarrow \varphi(R, \mu, x)$ и $x \in [R]_\nu \leftrightarrow \psi(R, \nu, x)$. Далее, через $\chi(d, x)$ обозначим формулу $\exists k \forall u\, (\langle k, u\rangle \in d \to x \notin \mathcal{I}_u)$, смысл которой в том, что

(3) $x \in X[d] \leftrightarrow \chi(d, x)$, *каковы бы ни были* $x \in I$ *и* $d \subseteq \omega \times \mathrm{Seq}$.

Согласно (2) и (3), предложение (1) можно записать так:

(4) $\exists d \subseteq \omega \times \mathrm{Seq}\, \forall x\, [(\varphi(R, \mu, x) \to \chi(d, x)) \wedge \wedge (\psi(R, \nu, x) \to \neg \chi(d, x))]$.

Причем эквивалентность (1) $\leftrightarrow$ (4) имеет место во всех моделях ZFC. Формулы φ и ψ стоят в (4) слева от импликаций, т. е. после перехода от $\to$ к $\vee$ их внешние кванторы $\exists f$ превратятся в $\forall f$. Если мы теперь используем какие-нибудь принадлежащие отображения ω на множества $\mu = \{\xi\colon \xi < \mu\}$, ν, Q, R, $\mathrm{Seq}, Q \times \mathrm{Seq}$, и заменим множества $\subseteq \omega$ их характеристическими функциями, то формулу (4) удастся переписать в виде $\exists h \in \mathcal{I} \forall z \in \mathcal{I} \Phi$, где формула Φ содержит параметры только из $\mathcal{I} \cap M$ и кванторы только по ω. (Например, если мы зафиксировали биекцию $g \in M$: ω на μ, то в Φ будет параметр $y \in \mathcal{I} \cap M$, заменяющий μ в том смысле, что $g(i) < g(j) \leftrightarrow y(2^i \cdot 3^j) = 1$.)

Формулы указанного вида называются Σ^1_2-формулами. Они абсолютны по теореме Шенфилда (см. [3, добавление, § 2]), т. е. если $M_1 \subseteq M_2$ — две модели ZFC с одинаковым классом ординалов, и Σ^1_2-формула имеет параметры только из $M_1 \cap \mathcal{Y}$, то эта формула либо одновременно истинна, либо одновременно ложна в обеих моделях.

Предложение (1), эквивалентное (4), также абсолютно. Значит, раз оно истинно в M, то и в $M[G]$ оно остается истинным. Совершенно аналогичные рассуждения дадут истинность (1) и в модели $M_0[G] \subseteq M[G]$, если только мы покажем, что ν счетно в этой модели. Но множество P является ν-свертывающим множеством вынуждающих условий в терминологии [3, гл. 4]. Это означает, что $g = \bigcup G$ отображает ω на ν. Кроме того, $g \in M_0[G]$. Следовательно, ν счетно в $M_0[G]$, что и требовалось.

Итак, предложение (1) истинно в $M_0[G]$, т. е. найдется множество $d \in M_0[G]$, $d \subseteq \omega \times \mathrm{Seq}$ такое, что в указанной модели истинно

(5) *множество* $X[d]$ *отделяет* $[R]_{\leqslant\mu}$ *от* $[R]_\nu$.

Рассматривая $M_0[G]$ как генерическое расширение модели $M_0 = L^M[R]$, в силу сказанного выше имеем P — терм $d^* \in M_0$, $d^* \subseteq P \times (\omega \times \mathrm{Seq})$ такой, что $d = i_G(d^*)$.

Предложение (5) абсолютно в том же смысле, что и предложение (1); этот факт можно установить примерно теми же рассуждениями, которые были использованы при анализе (1). Стало быть, (5) истинно в $M[G]$. Согласно теореме о связи истинности в генерических расширениях с вынуждением, найдется $p \in G$ такое, что

(6) $p \Vdash$ ($X[d^*]$ *отделяет* $[R^*]_{\leqslant\mu^*}$ *от* $[R^*]_{\nu^*}$),

где $\Vdash$ есть вынуждение, соответствующее исходной модели M и множеству вынуждающих условий P.

Следующая лемма показывает, что найденные p и d^* (вместо t) являются искомыми в смысле леммы 2 (в модели M), и завершает доказательство леммы 2 в M.

ЛЕММА 3. В M *истинно*: $[R]_{\leqslant\mu}$ *включено в* $Z_p[d^*]$, *а* $[R]_\nu$ *не имеет с* $Z_p[d^*]$ *общих точек.*

Доказательство. Пусть $x \in M \cap \mathcal{Y}$ и в M истинно $x \in [R]_{\leqslant\mu}$. Сечение R^x определяется по R и x очевидно абсолютным образом. Поэтому и в $M[G]$ истинно $x \in [R]_{\leqslant\mu}$. Следовательно, $x \in X[d]$ в $M[G]$, так как (5) истинно в $M[G]$. Значит, найдутся $k \in \omega$ и условие $q \in G$, $q \leqslant p$ такие, что $q \Vdash x^* \in X[d^*, k^*]$. Убедимся, что $x \in Z_{qk}[d^*]$ в M; это завершит доказательство первого утверждения леммы 3. Предположим противное: найдутся $u \in \mathrm{Seq}$ и условия $r, r' \in P$ такие, что

$$r \leqslant r', \; r \leqslant q, \; \langle r', k, u\rangle \in d^* \text{ и } x \in \mathcal{Y}_u.$$

Если $r \leqslant r'$, то $r \Vdash \langle k^*, u^* \rangle \in d^*$. Кроме того, $r \Vdash x^* \in \in \mathcal{I}_u$. Следовательно, r вынуждает $x^* \notin X\ [d^*, k^*]$, что противоречит выбору q и соотношению $r \leqslant q$.

Для доказательства второго утверждения леммы 3, пусть $x \in [R]_\mathrm{v}$ в M. Достаточно для произвольной пары $q \in P$, $q \leqslant p$ и $k \in \omega$ проверить, что $x \notin Z_{qk}\ [d^*]$ в M. Рассмотрим произвольное M-генерическое множество $H \subseteq P$, содержащее q. Как и выше, в расширении $M\ [H]$ будет $x \in \in [R]_\mathrm{v}$. Кроме того, раз $q \leqslant p$, то $p \in H$, и поэтому в соответствии с (6) мы получим $x \notin X\ [i_H(d^*), k]$ в $M\ [H]$. Следовательно, найдется кортеж $u \in \mathrm{Seq}$ такой, что $x \in \mathcal{I}_u$ и $\langle k, u \rangle \in i_H\ (d^*)$. Последнее соотношение по определению $i_H\ (d^*)$ приводит к условию $r' \in H$ такому, что $\langle r', \langle k, u \rangle\rangle = \langle r', k, u \rangle \in d^*$. Наконец, для любой пары $r', q \in H$ существует $r \in H$, которое $\leqslant r'$ и $\leqslant q$. Собираем вместе:

$$r \leqslant r',\ r \leqslant q,\ \langle r', k, u \rangle \in d^* \text{ и } x \in \mathcal{I}_u.$$

Это позволяет заключить, что $x \notin Z_{qk}\ [d^*]$ в M, что и требовалось. Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 2 в модели M закончено.

Покажем теперь, как доказать лемму 2 в универсуме всех множеств, т. е. в ее непосредственной формулировке. По существу, счетность модели M использована лишь для того, чтобы можно было рассматривать генерические расширения $M\ [G]$ и $M\ [H]$. Если модель M счетна, то для любого условия p из данного множества вынуждающих условий $P \in M$ найдется M-генерическое множество $G \subseteq P$, содержащее p (см. [3, гл. 4]).

Разумеется, если мы возьмем вместо M универсум V всех множеств, то никаких *генерических расширений* $V\ [G]$ построить нельзя, так как V содержит вообще все множества, а G (за исключением некоторых тривиальных случаев) не может принадлежать расширяемой модели. Однако известен метод, позволяющий обойти эту трудность. Метод состоит в том, что рассматривается определенное «фиктивное» генерическое расширение $V^{(P)}$ универсума V. Класс $V^{(P)}$ состоит, по существу, из имен для элементов настоящего расширения $V\ [G]$, так как если бы последнее существовало. Эти имена должны обеспечивать наполнение всех элементов расширения, а не только тех, которые содержатся в исходной модели. В связи с этим конструкция P-термов и наполнений несколько изменится (см. [5]). Однако по-прежнему будет существовать вложение $d \mapsto$

$\mapsto d^*$ универсума V в $V^{(P)}$. Более подробную информацию о такой интерпретации вынуждения (*булевозначная* версия) читатель найдет в [6].

Осуществив небольшую перестройку доказательства леммы 2 в указанном направлении, мы получим доказательство этой леммы в универсуме всех множеств. Этим доказательство лемм 2, 1 и теоремы закончено.

В заключение — несколько замечаний. А. В. Островский обратил внимание автора на проблему Гуревича и сообщил связанные с ней результаты и, в частности, данные выше доказательства импликаций (б) $\to$ (а) и (а) $\to$ $\to$ (в). Он же впервые высказал гипотезу о том, что предложения (а), (б) (в) попарно эквивалентны и неразрешимы.

По существу, ключевым моментом доказательства импликации (в) $\to$ (б) является утверждение о том, что если (б) не имеет места, то для любого кода решета R можно подобрать счетное семейство W подмножеств пространства Бэра такое, что, каковы бы ни были ординалы $\mu < \nu < < \omega_1$, если аппроксимация $[R]_{\leqslant\mu}$ является F_σ-отделимой от $[R]_\nu$, то отделяющее множество можно выбрать в семействе W. Эта теорема сохраняет силу и в том случае, когда вместо класса F_σ рассматривается любой другой борелевский класс F_α или G_α по Хаусдорфу (F_1 есть F_σ, а G_1 есть G_δ). В несколько более слабой форме (для $\nu = \mu + 1$; общий случай имеет аналогичное доказательство) эта теорема с наброском доказательства имеется в [3, добавление, § 3]. Там же доказаны некоторые другие теоремы о конституантах. Среди них — теорема о том, что если (б) не имеет места, то для любого кода решета R, если все конституанты $[R]_\nu$ принадлежат некоторому одному классу F_α или G_α (например, если все они принадлежат классу F_σ), то число непустых конституант не более чем счетно.

Метод, использованный в доказательстве нашей теоремы, можно применить и к исследованию более сложных множеств со свойством $F_{\|}$, не абсолютных G_δ.

Остается открытым следующий вопрос: верна ли теорема настоящей заметки для несепарабельных множеств?

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Поступило 01.07.82

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] G u r e w i c z W. Relativ perfecte Teile von Punktmengen und Mengen (A).— Fundam. Math., 1928, Bd. 12, S. 78—109.

[2] Кановей В. Г., Островский А. В., О неборелевских $F_{||}$-множествах.— Докл. АН СССР, 1981, т. 260, № 5, с. 1061—1064.

[3] Справочная книга по математической логике. Часть II: теория множеств.— М.: Наука, 1982.

[4] Лузин Н. Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях.— М.: ГИТТЛ, 1953.

[5] Шенфилд Дж. Математическая логика.— М.: Наука, 1975.

[6] Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.— М.: Мир, 1973.