МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 41, № 5 (1987)

К ПРОБЛЕМАМ Н. Н. ЛУЗИНА О СУЩЕСТВОВАНИИ СА-МНОЖЕСТВ, НЕ ИМЕЮЩИХ СОВЕРШЕННЫХ ПОДМНОЖЕСТВ

В. Г. Кановей

После того, как П. С. Александров, Хаусдорф и М. Я. Суслин в 1916—17 гг. доказали, что всякое несчетное борелевское множество, и даже всякое несчетное А-множество на действительной прямой включает совершенное подмножество и имеет вследствие этого мощность континуума $c = 2^{\aleph_0}$, одной из главных в зарождавшейся тогда дескриптивной теории множеств стала рассматриваться задача исследования мощности СА-множеств (т. е. множеств, дополнительных к А-множествам). Существо вопроса заключала в себе следующая

Проблема I. *Верно ли, что* (I) *существует* СА-*множество мощности строго между счетной мощностью* $\aleph_0$ *и мощностью континуума* c?

В качестве возможных приближений к решению этой проблемы выдвигались еще два вопроса о СА-множествах:

Проблема II. *Верно ли, что* (II) *существует всюду определенная функция* $y = f(x)$, *график которой представляет собой* СА-*множество без совершенных подмножеств*?

Проблема III. *Верно ли, что* (III) *существует несчетное* СА-*множество, не имеющее совершенных подмножеств*?

Эти три проблемы фигурируют в ряде работ Н. Н. Лузина по дескриптивной теории. В частности, проблемы I и II сформулированы и обсуждаются в пятой главе [1] (см. также [2, с. 240, 246]), проблема III — в [3]. Но решить их средствами классической дескриптивной теории множеств не удалось.

Позже в исследованиях П. С. Новикова, Соловея и др. (подробнее см. ниже) было установлено, что проблемы I, II, III неразрешимы в рамках аксиоматической системы Цермело — Френкеля ZFC, т. е. средствами этой теории невозможно получить определенный ответ «да» или «нет» ни на один из трех поставленных вопросов.

Целью настоящей заметки является выяснение взаимоотношений трех рассматриваемых проблем между собой, а также их взаимоотношений с континуум-гипотезой CH (выражаемой равенством $c = \aleph_1$, где $\aleph_1$ — первая несчетная мощность). Для того, чтобы обосновать формулировку основного результата, сделаем несколько замечаний, связывающих друг с другом предложения (I), (II), (III).

Замечание 1. Предложение (II) влечет (III). Предложение (I) также влечет (III), ибо множество с совершенным подмножеством заведомо имеет континуальную мощность. Кроме того, предложение (I) влечет отрицание CH.

Замечание 2 (Н. Н. Лузин [1, гл. V]). Несчетное CA-множество без совершенных подмножеств имеет мощность ровно $\aleph_1$. График же всюду определенной действительной функции имеет мощность c. Следовательно, предложение (II) влечет CH и несовместно с (I).

Замечание 3. Как следует из замечаний 1 и 2, предложение (I) эквивалентно конъюнкции (III) $\wedge \neg$CH (знак $\wedge$ обозначает связку «и», а $\neg$ — символ отрицания).

Замечания эти оставляют возможность только для следующих пяти комбинаций наших предложений и их отрицаний с CH и ее отрицанием:

$\neg$(III) $\wedge$ CH (и тогда $\neg$ (I) и $\neg$ (II));

$\neg$(III) $\wedge$ $\neg$CH (и тогда, аналогично, $\neg$(I) и $\neg$(II));

(II) (и тогда (III), $\neg$ (I) и CH);

(III) $\wedge$ $\neg$CH (и тогда (I) и $\neg$ (II));

(III) $\wedge$ $\neg$(II) $\wedge$ CH (и тогда $\neg$ (I));

Оказывается, что каждая из этих пяти комбинированных гипотез совместна с аксиомами ZFC, т. е. является непротиворечивой. Непротиворечивость комбинаций $\neg$ (III) с CH и отрицанием CH дается теоремами 2 и 3 [4] (где, кстати, вместо $\neg$ (III) рассматривается значительно более сильное предложение, из которого вытекает отсутствие несчетных проективных, а не только класса CA, множеств без совершенных подмножеств).

Непротиворечивость предложения (II) была установлена П. С. Новиковым посредством вывода (II) из аксиомы конструктивности V = L. Фактически, в [5] (теорема 2) показано, что аксиома V = L влечет существование всюду определенной функции, график которой есть множество класса A_2 без совершенных подмножеств. Но, как отмечено в [6] (замечание 32), отсюда с помощью теоремы униформизации Новикова — Кондо извлекается и всюду определенная функция с графиком класса CA без совершенных подмножеств. Наконец, каждое следствие аксиомы конструктивности непротиворечиво, ибо сама эта аксиома не противоречит аксиомам ZFC (К. Гёдель).

Непротиворечивость комбинации (III) $\wedge \neg$ CH получена Р. Соловеем [7] как элементарное следствие принципиальной леммы, показывающей, что несчетные CA-множества без совершенных подмножеств можно получать и из более слабых, чем аксиома V = L, посылок. Это простое рассуждение будет представлено ниже после доказательства следующего результата.

ТЕОРЕМА. *Гипотеза* (III) $\wedge \neg$ (II) $\wedge$ CH *не противоречит аксиомам* ZFC.

Для доказательства этой теоремы (закрывающей вопрос о взаимоотношениях проблем I, II, III между собой и с континуум-гипотезой в рамках аксиом ZFC) мы используем модель, известную как ω_1-*коэновское генерическое расширение конструктивной модели*. Опишем конструкцию.

Фиксируется счетная транзитивная модель M аксиом ZFC + (V = L). В качестве множества вынуждающих условий (м.в.у.) для генерического расширения M возьмем ω_1^M-коэновское множество P, состоящее [8, с. 119] из всевозможных функций p таких, что область определения $\operatorname{dom} p$ включена в $\omega_1^M \times \omega$ и конечна, а область значений $\operatorname{ran} p$ включена в двухэлементное множество $\{0, 1\}$. Как обычно, через ω_1^M в этом определении обозначен первый несчетный кардинал модели M.

Множество P упорядочивается обратно включению: $p \leqslant q$, когда функция p продолжает функцию q; в этом случае p, как вынуждающее условие, более информативно, чем q.

Теперь зафиксируем P-генерическое над M множество $G \subseteq P$ и рассмотрим генерическую модель $N = M[G]$.

Требуемые нам свойства модели N заключаются в следующих трех леммах:

ЛЕММА 1. *В N истинна континуум-гипотеза* CH.

ЛЕММА 2. *В N истинно*: $\omega_1^{\mathrm{L}} = \omega_1$.

ЛЕММА 3. *В N истинно: нет точки δ бэровского пространства I такой, что $I \subseteq \mathrm{L}[\delta]$.*

К обозначениям. ω_1^{L} есть первый несчетный кардинал в классе L всех конструктивных множеств. Бэровское пространство $I = \omega^\omega$ состоит из всевозможных ω-последовательностей натуральных чисел; $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — натуральный ряд. Для $\delta \in I$ через $\mathrm{L}[\delta]$ обозначается класс всех множеств, конструктивных относительно δ.

Сначала мы покажем, как из лемм 1, 2, 3 вытекает истинность в N комбинированной гипотезы (III) $\wedge \neg$ (II) $\wedge$ $\wedge$ CH; тем самым, будет доказана теорема. Затем уже представим доказательства лемм.

С континуум-гипотезой CH все ясно: лемма 1.

Истинность в N предложения (III) есть следствие леммы 2 и еще одной леммы, доказанной Р. Соловеем [7] и В. А. Любецким [9]:

ЛЕММА 4. *Если $\omega_1^L = \omega_1$, то существует несчетное* CA-*множество без совершенных подмножеств.*

Дадим эскиз доказательства леммы 4. Известно, что множество $I \cap L$ всех конструктивных точек I принадлежит классу A_2 и допускает каноническое полное упорядочение $\prec$ длины ω_1^L, также имеющее (как множество пар) класс A_2 (фактически — класс $\sum_2^1$, как и $I \cap \mathrm{L}$). Об этом см., например, [8, добавление, § 2].

Для того чтобы построить в пространстве I (а тогда и на действительной прямой благодаря гомеоморфизму между I и пространством иррациональных точек) несчетное CA-множество без совершенных подмножеств, вполне достаточно построить такое же множество в классе A_2: переход к более узкому классу CA легко осуществляется с помощью униформизационной теоремы Новикова — Кондо [8, с. 258], следствие 4.22 для класса $\Pi_1^1 = \mathrm{CA}$.

Итак, достаточно вывести из равенства $\omega_1^{\mathrm{L}} = \omega_1$ существование несчетных A_2-множеств в I без совершенных подмножеств. Предположим противное: таких множеств нет. В частности, несчетное (благодаря $\omega_1^L = \omega_1$) множество $I \cap \mathrm{L}$ класса A_2 включает совершенное подмножество X_0. Множество X_0 можно считать компактным. Положим $F_0(\alpha) = \alpha$ для $\alpha \in X_0$; функция F_0: $X_0 \to I$ непрерывна и взаимно однозначна на X_0.

Наша цель теперь — построить убывающую последовательность совершенных (и тогда компактных) множеств $X_0 \supseteq X_1 \supseteq X_2 \supseteq \ldots$ и последовательность непрерывных и взаимно однозначных на соответствующем X_i функций F_i: $X_i \to I$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, так, чтобы выполнялось условие $F_{i+1}(\alpha) \prec F_i(\alpha)$ для каждой точки $\alpha \in \in X_{i+1}$. Существование такой последовательности немедленно приводит к противоречию и доказательству леммы 4: возьмем точку α в (очевидно, непустом) пересечении всех X_i, и получим: $F_{i+1}(\alpha) \prec F_i(\alpha)$ для всех номеров i, что противоречит полноте рассматриваемого порядка $\prec$.

Множество X_0 и функция F_0 уже построены. Будучи совершенным и компактным, X_0 гомеоморфно канторову дисконтинууму $C = 2^\omega$. Последний допускает гомеоморфизм $h : C$ на C такой, что $\gamma \neq h(\gamma)$ и $\gamma = h(h(\gamma))$ для всех $\gamma \in C$ (если $\gamma = \langle j_0, j_1, j_2, \ldots \rangle \in C$, то $h(\gamma) = = \langle 1 - j_0, j_1, j_2, \ldots \rangle$). Следовательно, имеется и гомеоморфизм H: X_0 на X_0 такой, что $\alpha \neq H(\alpha)$ и $\alpha = = H(H(\alpha))$ для каждой точки $\alpha \in X_0$.

По выбору H и ввиду взаимной однозначности F_0 множества

$$Y = \{\alpha \in X_0 \colon F_0(H(\alpha)) \prec F_0(\alpha)\}$$

и

$$Z = \{\alpha \in X_0 \colon F_0(\alpha) \prec F_0(H(\alpha))\}$$

дают X_0 в объединении, причем Y есть H-образ множества Z. Значит, Y несчетно. Вместе с тем Y — множество класса A_2, так как отношение $\prec$ имеет этот класс. Следовательно, согласно сделанному выше предположению противного, Y включает совершенное подмножество X_1. Остается определить $F_1(\alpha) = F_0(H(\alpha))$ для $\alpha \in X_1$.

Точно таким же образом по паре X_1, F_1 конструируется пара X_2, F_2 и т. д.

Доказательство леммы 4 и проверка истинности предложения (III) в модели N закончены. $\square$

Убедимся, наконец, что в N ложно предложение (II); этим будет закончен вывод теоремы из лемм 1, 2, 3. Искомый результат мы получаем как следствие леммы 3 и следующего утверждения.

ЛЕММА 5. *Если предложение* (II) *выполняется, то существует точка* δ *пространства* I *такая, что* $I \subseteq \mathrm{L}[\delta]$.

Доказательство. Пусть функция $F\colon I \to I$ такова, что ее график $X = \{\langle\alpha, F(\alpha)\rangle\colon \alpha \in I\}$ есть CA-множество без совершенных подмножеств (случай действительных функций действительного аргумента в предложении (II) легко сводится к случаю функций из I в I). Согласно одной из теорем Соловея [7] — Менсфилда [10] (см. также [8, с. 327, результат 16.7]), найдется точка $\delta \in I$ такая, что $X \subseteq \mathrm{L}[\delta]$: достаточно взять δ так, чтобы X было множеством класса $\Pi_1^{1,\delta}$. Но тогда и $I \subseteq \mathrm{L}[\delta]$. В самом деле, пусть $\alpha \in I$ и $\beta = F(\alpha)$. Имеем: $\langle\alpha, \beta\rangle \in X$, откуда $\langle\alpha, \beta\rangle \in \mathrm{L}[\delta]$ и $\alpha \in \mathrm{L}[\delta]$. $\square$

Таким образом, для доказательства теоремы остается доказать леммы 1, 2, 3.

Доказательство леммы 1. Наше ω_1^M-коэновское м.в.у. P удовлетворяет условию счетности цепей у.с.ц. (называемому также ω_1-условием антицепей) в исходной модели M [8, с. 121], и имеет в M мощность ω_1^M. Кроме того, в M истинна континуум-гипотеза CH (как следствие аксиомы конструктивности, предполагаемой в M), а тем самым выполняется равенство $\omega_1 = \omega_1^{\omega\times\omega}$. Теперь истинность CH в модели $N = M[G]$ дается теоремой 3.15 [8, с. 125], при $\varkappa = \nu = \omega_1^M$ и $\lambda = \mu = \omega$. $\square$

Доказательство леммы 2. Благодаря у.с.ц., кардиналы M остаются кардиналами и в N, т. е., в частности, $\omega_1^M = \omega_1^N$. Но M есть «конструктивная часть» модели N. $\square$

Доказательство леммы 3. Пусть, напротив, $\delta \in I \cap N$ и в N истинно: $I \subseteq \mathrm{L}[\delta]$. Согласно «лемме существования и минимальности» [8, с. 111], найдется множество $t \in M$, $t \subseteq P \times (\omega \times \omega)$, такое, что

$$\delta = i_G(t) = \{\langle k, l\rangle\colon \exists p \in G\,(\langle p, k, l\rangle \in t)\}$$

(имеется в виду, что $\langle k, l\rangle \in \delta$, когда $\delta(k) = l$). При этом, в силу выполнения в M у.с.ц. для P, можно не ограничивая общности предполагать, что t не более чем счетно в M (см. рассуждение из доказательства теоремы 3.15 [8, с. 125]). Но тогда и множество

$$U_1 = \{\xi < \omega_1^M\colon \text{найдутся натуральные } k,\ l,\ m \text{ и } p \in P \text{ такие, что } \langle p, k, l\rangle \in t \text{ и } \langle\xi, m\rangle \in \operatorname{dom} p\}$$

также не более чем счетно в M — собственно, важно только то, что дополнительное множество $U_2 = \omega_1^M - U_1$ непусто.

Пусть $\theta = 1$ или 2. Если $p \in P$, то через p_θ обозначим ограничение функции p на множество $(U_\theta \times \omega) \cap \cap \operatorname{dom} p$. Положим $P_\theta = \{p_\theta\colon\ p \in P\}$ и $G_\theta = \{p_\theta\colon p \in \in G\}$.

Легко видеть, что отображение $p \mapsto \langle p_1, p_2 \rangle$ дает (в M) порядковый изоморфизм P на $P_1 \times P_2$, и образом множества G при этом изоморфизме является $G_1 \times G_2$ (второе утверждение использует генеричность G). Следовательно, множество $G_1 \times G_2$ является $P_1 \times P_2$-генерическим над M. В этой ситуации, согласно теореме 2.5 [6, с. 13], каждая точка $\alpha \in I$, принадлежащая $M[G_1]$ и $M[G_2]$ одновременно, принадлежит и M. В частности, поскольку точка $\delta = i_G(t)$ принадлежит модели $M[G_1]$ (по определению U_1), и $I \subseteq \mathrm{L}[\delta]$ в $M[G]$ (по выбору δ), то мы имеем $\alpha \in M$ всякий раз, когда $\alpha \in I \cap M[G_2]$.

Чтобы вывести отсюда искомое противоречие, зафиксируем ординал $\xi \in U_2$ и зададим точку $\alpha \in I$ соотношениями: $\alpha(n) = j$, когда $\exists p \in G\ (\langle \xi, n \rangle \in \operatorname{dom} p \wedge p(\xi, n) = = j)$ (естественно, здесь $j = 0$ или 1). Ясно, что $\alpha \in \in M[G_2]$, так что $\alpha \in M$ согласно сказанному выше. Значит, множество

$$D = \{r \in P\colon \text{ найдется } n \in \omega \text{ такое, что } \langle \xi, n \rangle \in \operatorname{dom} r \text{ и } r(\xi, n) \neq \alpha(n)\}$$

принадлежит модели M.

Однако нетрудно проверить, что множество D плотно в P: ко всякому $q \in P$ найдется $r \in D$, $r \leqslant q$. Следовательно, пересечение $D \cap G$ непусто. Пусть $r \in D \cap G$, и пусть $n \in \omega$ таково, что $\langle \xi, n \rangle \in \operatorname{dom} r$ и $r(\xi, n) \neq \neq \alpha(n)$. Но по определению α можно подобрать $p \in G$ так, чтобы $\langle \xi, n \rangle \in \operatorname{dom} p$ и $p(\xi, n) = \alpha(n)$. Теперь мы видим, что условия $p, r \in G$ не могут быть совместными в P, т. е. нет $q \in P$ такого, что $q \leqslant p$ и $q \leqslant r$ — а это противоречит генеричности множества G.

Полученным противоречием завершено доказательство леммы 3 и теоремы. $\square\square$

Отметим в заключение, что лемма 4 позволяет столь же успешно проверить, что ω_2-коэновское (т. е. полученное с помощью ω_2^M-коэновского м.в.у.) генерическое расширение N' исходной модели M аксиом $\mathrm{ZFC} + (\mathrm{V} = \mathrm{L})$ выполняет (III) $\wedge \neg$ CH. В самом деле, λ-коэновское м.в.у. удовлетворяет условию счетности цепей при любом λ, так что лемма 2, а вместе с ней и предложение (III) (согласно лемме 4) выполняются для N'. В то же время хорошо известно, что континуум-гипотеза нарушается в N' (см., например, [8, с. 118—122]). Этим рассуждением доказывается непротиворечивость комбинации (III) $\wedge$ $\wedge \neg$ CH.

Московский институт
инженеров железнодорожного транспорта

Поступило
24.04.86

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Лузин Н. Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. М.: Гостехиздат, 1953.
[2] Лузин Н. Н. Собр. соч., т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1958.
[3] Лузин Н. Н. Замечания о проективных множествах//Собр. соч. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 460—461.
[4] Solovay R. M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable//Ann. Math. 1970. V. 92. № 1. P. 1—56.
[5] Новиков П. С. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств//Труды МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 231—252.
[6] Новиков П. С., Келдыш Л. В. Комментарии к работам Н. Н. Лузина//Н. Н. Лузин. Собр. соч. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 231—252.
[7] Solovay R. M. On the cardinality of Σ_2^1 sets of reals//Foundations of Mathematics. Berlin: Springer, 1969. P. 58—73.
[8] Справочная книга по математической логике. Ч. 2. Теория множеств. М.: Наука, 1982.
[9] Любецкий В. А. Некоторые следствия гипотезы о несчетности множества конструктивных действительных чисел//ДАН СССР. 1968. Т. 182. № 4. С. 758—759.
[10] Mansfield R. Perfect subsets of definable sets of real numbers//Pacific J. Math. 1970. V. 35, № 2. P. 451—457.