Математические заметки

том 50 выпуск 1 июль 1991

НЕ СУЩЕСТВУЕТ ПЕРЕЧИСЛИМОГО СЕМЕЙСТВА КОНТЕКСТНО-СВОБОДНЫХ ГРАММАТИК, ПОРОЖДАЮЩЕГО КЛАСС ОДНОЗНАЧНЫХ ЯЗЫКОВ

К. Ю. Горбунов

I. Идея контекстно-свободных грамматик (сокращенно КСГ) состоит в рассмотрении выводимого слова вместе с его выводом, при этом вывод понимается как синтаксический анализ данного слова. Естественно потребовать единственность анализа, т. е. единственность вывода. Это требование означает однозначность соответствующей КСГ.

Класс однозначных КСГ обладает лучшими алгоритмическими свойствами, чем класс всех КСГ. Например, как показано в работе А. Л. Семенова [1], по произвольной однозначной КСГ и произвольной регулярной КСГ можно узнать, эквивалентны ли они (т. е. порождают ли один и тот же язык). Как известно, для произвольных КСГ проблема эквивалентности регулярной К—С грамматике неразрешима.

В работе Ан. А. Мучника [2] поставлен следующий вопрос: можно ли перечислить какое-либо семейство однозначных КСГ, порождающее все однозначные языки? Если бы ответ был положительным, то семейство однозначных языков было бы таким же хорошим, как, скажем, семейство детерминированных языков.

В настоящей статье получен отрицательный ответ на поставленный вопрос и попутно построен класс языков, обладающих некоторыми интересными свойствами. А именно, для грамматик, задающих языки этого класса, разрешима проблема эквивалентности с произвольной К—С грамматикой.

Для сравнения напомним, что, как доказал Хопкрофт в [3], среди регулярных языков такими свойствами обладают в точности ограниченные языки, т. е. конечные объединения конкатенаций языков вида $\{u\}$, $\{u\}^*$, где u — некоторое слово. С другой стороны, в рассматриваемом классе семейство существенно неоднозначных грамматик не является коперечислимым.

II. Мы будем рассматривать конечные преобразователи, детерминированные (сокращенно ДП) и недетерминированные (сокращенно НДП), определенные на регулярных множествах. Иными словами, в рассматриваемых преобразователях будет выделено множество заключительных состояний. Дадим формальные определения. НДП называется пятерка $\langle\Sigma, Q, q_0, F, \delta\rangle$, где Σ — конечный алфавит, Q — конечное множество состояний, q_0 — начальное состояние, $q_0 \in Q$, F — множество заключительных состояний, $F \subseteq Q$, δ — конечное множество переходов, $\delta \subseteq (\Sigma^* \times Q \times \Sigma^* \times Q)$. Мы будем представлять НДП в виде ориентированного графа с помеченными ребрами, вершинами которого являются состояния. Каждому вычислению НДП сопоставляется путь в графе. Через *вх* (γ) мы будем обозначать слово, прочитанное НДП вдоль пути γ, а через *вых* (γ) — записанное на пути γ. Пара слов $\langle u, v\rangle$ принадлежит *графику* НДП, если существует путь γ из начального состояния в заключительное такой, что $u =$ *вх* (γ), $v =$ *вых* (γ). ДП называется такой НДП, у которого $\delta \subseteq (\Sigma \times Q \times \Sigma^* \times Q)$ и для любого $q \in Q$ и любой буквы $u \in \Sigma$ существуют единственные $w \in \Sigma^*$, $q_1 \in Q$ такие, что $(u, q, w, q_1) \in \delta$. Известно, что проблема эквивалентности произвольных ДП разрешима (см., например, [4, с. 322—323], преобразователи эквивалентны, если их графики совпадают).

С другой стороны, проблема эквивалентности для НДП неразрешима [4, с. 322—326]. График отображения, заданного преобразователем $\mathfrak{A}$, будем обозначать $\Gamma_{\mathfrak{A}}$. Основную роль в дальнейшем будет играть следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ — *произвольные ДП, а* $\mathfrak{B}$ — *произвольный НДП. Тогда*

а) *разрешима проблема равенства*

$$\Gamma_{\mathfrak{B}} = \Gamma_{\mathfrak{A}_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\mathfrak{A}_n},$$

б) *разрешима проблема включения*

$$\Gamma_{\mathfrak{B}} \subseteq \Gamma_{\mathfrak{A}_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\mathfrak{A}_n}; \qquad (1)$$

в) *если включение* (1) *имеет место, то существуют такие регулярные языки* $R_1, R_2, \ldots, R_n$, *что* $\Gamma_{\mathfrak{B}} = \Gamma_{\mathfrak{A}_1 \restriction R_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\mathfrak{A}_n \restriction R_n}$; *языки* $R_1, \ldots, R_n$ *можно эффективно построить; через* $\mathfrak{A} \restriction R$ *мы обозначим ДП* $\mathfrak{A}_R$, *график которого совпадает с множеством* $\{r, \mathfrak{A}(r) \mid r \in R\}$, *очевидно, что такой ДП существует;*

г) *если* $\mathfrak{A}$ — *ДП, а* $\mathfrak{B}$ — *НДП, то проблема включения* $\Gamma_{\mathfrak{A}} \subseteq \Gamma_{\mathfrak{B}}$ *неразрешима.*

Доказательство. Утверждение п. а) сразу следует из утверждений пп. б) и в). Действительно, проверив включение п. б), мы можем согласно утверждению п. в) разложить $\mathfrak{B}$ в объединение ДП. После этого проверим обратное включение. Для доказательства п. г) заметим, что проблема соответствия Поста сводится к проблеме включения $\Gamma_{\mathfrak{A}_1} \subseteq \overline{\Gamma_{\mathfrak{A}_2}}$, где $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — ДП с одним состоянием. Известно, что $\overline{\Gamma_{\mathfrak{A}_2}}$ можно задать посредством НДП. Опишем этот НДП. Пусть $\mathfrak{A}_2$ соответствует морфизму g, а буква a пробегает алфавит Σ. Перечислим возможные переходы, указывая слева от состояния приращения к прочитанному слову, а справа — к записанному:

$$q_1 \to aq_1g(a);\quad q_1 \to q_2a;\quad q_1 \to aq_3x;\quad q_1 \to aq_4y;$$
$$q_2 \to q_2a;\quad q_3 \to aq_3;\quad q_4 \to q_2;\quad q_4 \to aq_4.$$

Здесь q_1 — начальное состояние, q_2 и q_3 — заключительные состояния, x пробегает множество слов из Σ^*, имеющих длину меньше $|g(a)|$, y — множество слов из Σ^*, имеющих длину, равную $|g(a)|$, но отличных от $g(a)$. Очевидно, что данный НДП— искомый. Пункт г) доказан.

Докажем п. б). Пусть Σ — алфавит всех рассматриваемых преобразователей. Если $w \in \Sigma^*$, $\mathfrak{A}$ — ДП, то $\mathfrak{A}(w)$ будет означать слово, которое появится на выходе у $\mathfrak{A}$, если на вход подать слово w.

Определение. Пусть $\langle w_1, w_2\rangle$ — пара слов из Σ^*, $\mathfrak{A}$ — ДП. *Дефектом* пары $\langle w_1, w_2\rangle$ относительно $\mathfrak{A}$ будем называть элемент свободной группы с образующими из Σ, равный $w_2^{-1}\mathfrak{A}(w_1)$.

Основное свойство дефекта: $w_2 = \mathfrak{A}(w_1) \Leftrightarrow$ дефект пары $\langle w_1, w_2\rangle$ относительно $\mathfrak{A}$ равен 1. Дефектом пути γ назовем дефект пары $\langle \textit{вх}(\gamma), \textit{вых}(\gamma)\rangle$. *Выводом* в НДП назовем путь из начального состояния в заключительное. Можно считать, что в НДП $\mathfrak{B}$ при всех тактах работы буквы добавляются только к одному из слов (прочитанному или записанному) и не более одной. Будем произвольный путь γ в НДП называть *допустимым относительно* $\mathfrak{A}$, если $\textit{вых}(\gamma) = \mathfrak{A}(\textit{вх}(\gamma))$.

ЛЕММА 1.1. *Пусть γ_1, γ_2 — пути в некотором НДП в некоторое состояние q, а δ_1, δ_2 — пути в этом НДП из q. Пусть ДП $\mathfrak{A}$ переходит на словах $\textit{вх}(\gamma_1)$ и $\textit{вх}(\gamma_2)$ в одно и то же состояние q'. Тогда, если три из четырех путей $\gamma_1\delta_1$, $\gamma_1\delta_2$, $\gamma_2\delta_1$, $\gamma_2\delta_2$ допустимы относительно $\mathfrak{A}$, то и четвертый путь допустим относительно $\mathfrak{A}$.*

Доказательство. Обозначим β_1 (соответственно β_2) результат работы $\mathfrak{A}$, начиная с состояния q', на входе $\textit{вх}(\delta_1)$ (соответственно $\textit{вх}(\delta_2)$). Тогда лемму можно переформулировать так. Если три из равенств

$$(\textit{вых}(\delta_1))^{-1}(\textit{вых}(\gamma_1))^{-1}\mathfrak{A}(\textit{вх}(\gamma_1))\,\beta_1 = 1,$$
$$(\textit{вых}(\delta_2))^{-1}(\textit{вых}(\gamma_1))^{-1}\mathfrak{A}(\textit{вх}(\gamma_1))\,\beta_2 = 1,$$
$$(\textit{вых}(\delta_1))^{-1}(\textit{вых}(\gamma_2))^{-1}\mathfrak{A}(\textit{вх}(\gamma_2)\,\beta_1 = 1,$$
$$(\textit{вых}(\delta_2))^{-1}(\textit{вых}(\gamma_2))^{-1}\mathfrak{A}(\textit{вх}(\gamma_2))\,\beta_2 = 1$$

истинны, то истинно и четвертое. В такой формулировке лемма очевидна. Если, например, выполнены первые три равенства, то из первого и третьего имеем $(\textit{вых}(\gamma_2))^{-1}\mathfrak{A}(\textit{вх}(\gamma_2)) = (\textit{вых}(\gamma_1))^{-1}\mathfrak{A}(\textit{вх}(\gamma_1))$, а это в совокупности со вторым дает четвертое.

ТЕОРЕМА Рамсея для графов. *Для любой пары натуральных чисел m, n существует такое k, что любой полный граф (т. е. имеющий все возможные ребра) с не менее чем k вершинами, ребра которого покрашены в n цветов, имеет полный подграф с m вершинами, ребра которого покрашены в один цвет.*

Очевидно, что есть переборный алгоритм, вычисляющий k по m и n. Мы будем использовать эту теорему только для m, равного трем. Обозначим вычислимую функцию, дающую k по n в этом случае, через $R(n)$.

Для доказательства п. б) достаточно показать, что по $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}$ можно найти константу C_1 такую, что если для всех выводов γ в $\mathfrak{B}$ длины не большей C_1 пара $\langle$*вх* (γ), *вых* $(\gamma)\rangle$ принадлежит) $\Gamma_{\mathfrak{A}_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\mathfrak{A}_n}$, то и весь $\Gamma_{\mathfrak{B}}$ включен в $\Gamma_{\mathfrak{A}_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\mathfrak{A}_n}$.

ЛЕММА 1.2. *По любому конечному множеству ДП A и любому НДП $\mathfrak{B}$ можно найти константу C со следующим свойством: если путь γ_0 в $\mathfrak{B}$ в некоторое состояние q такой, что для всех путей γ длины не большей C из состояния q в заключительное состояние путь $\gamma_0\gamma$ допустим относительно хотя бы одного ДП из A, то и для любого пути γ в $\mathfrak{B}$ из q в заключительное состояние путь $\gamma_0\gamma$ допустим относительно хотя бы одного ДП из A. При замене множества A на любое его подмножество константа C не увеличивается.*

Доказательство. Пусть $A = \{\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_l\}$. Обозначим множество путей из q в заключительные состояния через M. Длину пути γ обозначим через $|\gamma|$. Пусть K — количество состояний в $\mathfrak{B}$, а m — количество пар $\langle i$, состояние $\mathfrak{D}_i\rangle$, где $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Возьмем $C = K \cdot R(m)$. Предположим, что утверждение леммы 1.2 неверно. Тогда для некоторого $\gamma \in M$ такого, что $|\gamma| > C$, пара $\langle$*вх* $(\gamma_0\gamma)$, *вых* $(\gamma_0\gamma)\rangle$ принадлежит $\Gamma_{\mathfrak{D}_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\mathfrak{D}_l}$, а для всех $\gamma' \in M$ таких, что $|\gamma'| < |\gamma|$ — не принадлежит. Так как $|\gamma| > K \cdot R(m)$, то существует такое состояние q преобразователя $\mathfrak{B}$, через которое γ проходит не менее $R(m)$ раз. Зафиксируем это состояние. Каждому $1 \leqslant i \leqslant R(m)$ сопоставим γ_i — часть пути γ до i-го прохождения через q и δ_i — часть пути γ после i-го прохождения через q. Для любой пары $1 \leqslant i < j \leqslant R(m)$ рассмотрим путь $\gamma_i\delta_j$. Так как $|\gamma_i\delta_j| < |\gamma|$, пара $\langle$*вх* $(\gamma_0\gamma_i\delta_j)$, *вых* $(\gamma_0\gamma_i\delta_j)\rangle$ принадлежит $\Gamma_{\mathfrak{D}_1} \cup \ldots \cup \Gamma_{\mathfrak{D}_l}$. Каждой паре $i < j$ ставим в соответствие пару, состоящую из номера ДП, графику которого принадлежит $\langle$*вх* $(\gamma_0\gamma_i\delta_j)$, *вых* $(\gamma_0\gamma_i\delta_j)\rangle$, и состояния, в которое приходит этот ДП на *вх* $(\gamma_0\gamma_i\delta_j)$. По теореме Рамсея существуют $n_1 < n_2 < n_3$ такие, что парам $\langle n_1, n_2\rangle$, $\langle n_1, n_3\rangle$, $\langle n_2, n_3\rangle$ соответствует одна и та же пара (i, q). Тогда к путям $\gamma_0\gamma_{n_1}$, $\gamma_0\gamma_{n_2}$, δ_{n_2}, δ_{n_3} применима лемма 1.1, так как по построению три пути $\gamma_0\gamma_{n_1}\delta_{n_2}$, $\gamma_0\gamma_{n_1}\delta_{n_3}$, $\gamma_0\gamma_{n_2}\delta_{n_3}$ допустимы относительно $\mathfrak{D}_i$. Следовательно, путь $\gamma_0\gamma_{n_2}\delta_{n_2}$, совпадающий с путем $\gamma_0\gamma$, допустим относительно $\mathfrak{D}_i$. Лемма 1.2 доказана. Для доказательства п.б) достаточно применить лемму 1.2, где γ_0 — пустой путь, q — начальное состояние, $A = \{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$.

Докажем п. в). Длиной дефекта будем считать длину его несократимого представления.

ЛЕММА 1.3. *Существует вычислимая по $\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ константа C_2 со следующим свойством:*

если включение (1) *выполняется, то для любого вывода γ в $\mathfrak{B}$ найдется такое i, что $\langle$вх (γ), вых $(\gamma)\rangle \in \Gamma_{\mathfrak{A}_i}$, и для любого начала γ_1 вывода γ длина дефекта пути γ_1 относительно $\mathfrak{A}_i$ не больше C_2.*

Доказательство. Возьмем $C_2 = C \cdot S$, где C — константа из леммы 1.2 для случая $A = \{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$, а S — максимальное число, на которое может увеличиться длина записанного слова в ДП $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ при прочтении одной буквы. Зафиксируем произвольный вывод γ в $\mathfrak{B}$. Пусть $A = \{\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n\}$, а B — множество всех тех ДП из A, графикам которых принадлежит $\langle$*вх* (γ), *вых* $(\gamma)\rangle$. Допустим, что наше утверждение неверно для вывода γ. Каждому $\mathfrak{A}_j \in B$ поставим в соответствие одно какое-нибудь начало вывода γ, дефект которого относительно $\mathfrak{A}_j$ больше C_2. Расположим ДП из B по возрастанию длины соответствующих им начал: $\mathfrak{A}_{i_1}, \mathfrak{A}_{i_2}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_{|B|}}$ (если одному началу вывода γ соответствует несколько ДП, то расположим их в произвольном порядке). Обозначим через γ_k начало γ, соответствующее ДП $\mathfrak{A}_{i_k}$. Индукцией по k докажем, что любой вывод в $\mathfrak{B}$, имеющий своим началом γ_k, допустим относительно какого-либо ДП из множества $A \setminus \{\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots \ldots \mathfrak{A}_{i_k}\}$. Пусть для $k' < k$ утверждение доказано. Рассмотрим все выводы в $\mathfrak{B}$ с началом γ_k и продолжением длины не большей C_2. Поскольку длина дефекта γ_k относительно $\mathfrak{A}_{i_k}$ больше C_2, то все эти выводы не допустимы относительно $\mathfrak{A}_{i_k}$, так как при продвижении вдоль пути на один шаг длина дефекта может уменьшиться не более чем на S. По предположению индукции, эти выводы допустимы относительно какого-либо ДП из множества $A \setminus \{\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots \ldots \mathfrak{A}_{i_{k-1}}\}$ (если $k = 1$, то это следует из (1)). Следовательно, они допустимы и относительно какого-либо ДП из $A \setminus \{\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_k}\}$. По лемме 1.2 все выводы с началом γ_k допустимы относительно какого-либо ДП из $A \setminus \{\mathfrak{A}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{A}_{i_k}\}$. Для $k = |B|$ получаем противоречие. Лемма 1.3 доказана.

Легко видеть, что для любого C и любого i множество слов, прочитанных на тех выводах в $\mathfrak{B}$, у которых длина дефекта любого начала относительно $\mathfrak{A}_i$ не больше C, регулярно, и это множество можно эффективно построить по C. Действительно, автомат, распознающий это множество, имеет своими состояниями тройки: $\langle$состояние $\mathfrak{B}$, состояние $\mathfrak{A}_i$, дефект$\rangle$, где длина дефекта не превышает C. Так как дефект и пара приращений к записанным словам однозначно определяют новый дефект, то переходы этого автомата определяются очевидным образом.

Из леммы 1.3 следует, что искомые регулярные множества R_i, $i = 1, \ldots, n$ — это множества слов, прочитанных на тех выводах в $\mathfrak{B}$, у которых длина дефекта любого начала относительно $\mathfrak{A}_i$ не больше C_2. Пункт в), а вместе с ним и теорема 1 доказаны.

Перейдем к К—С грамматикам. С каждым преобразователем $\mathfrak{B}$ свяжем язык $L_{\mathfrak{B}} = \{w \# u^r \mid \langle w, u\rangle \in \Gamma_{\mathfrak{B}}\}$, здесь u^r означает обращенное u. Напомним, что c-линейной КСГ называется такая линейная КСГ, в алфавите которой выделен специальный терминальный символ $\#$ (маркер) и правая часть любого правила либо не содержит маркера и содержит нетерминал, либо в точности есть маркер. Легко видеть, что для любого $\mathfrak{B}$ язык $L_{\mathfrak{B}}$ порождается некоторой c-линейной КСГ и, обратно, любая c-линейная КСГ порождает язык такого вида. Кроме того, если $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ произвольные преобразователи, то можно стандартным образом построить c-линейную КСГ, порождающую язык $L_{\mathfrak{A}_1} \bigcup \ldots \bigcup L_{\mathfrak{A}_n}$. Обозначим ее $G(\mathfrak{A}_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathfrak{A}_n)$. Будем говорить, что ДП $\mathfrak{A}$ имеет *конечную задержку*, если существует такое натуральное C, что, начиная работать из любого состояния и прочитав любые C букв, $\mathfrak{A}$ выдаст хотя бы одну букву. Язык, порожденный произвольной КСГ K, обозначим L_K. Грамматику вида $G(\mathfrak{A}_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathfrak{A}_n)$, где $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ — ДП с конечной задержкой, назовем *графиковой*.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $G = G(\mathfrak{A}_1 \bigcup \ldots \bigcup \mathfrak{A}_n)$ — *произвольная графиковая КСГ, а* K — *произвольная КСГ. Тогда*

а) *разрешима проблема* $L_K = L_G$;

б) *разрешима проблема* $L_K \subseteq L_G$;

в) *если* $L_K \subseteq L_G$, *то можно построить графиковую КСГ* G_1, *эквивалентную* K;

г) *множество существенно неоднозначных графиковых КСГ не является коперечислимым.*

Доказательство.

ЛЕММА 2.1. *По произвольной КСГ K и произвольной графиковой КСГ G можно эффективно сделать одно из двух: либо показать, что* $L_K \not\subseteq L_G$, *либо построить с-линейную КСГ* K_1 *эквивалентную* K.

Доказательство. Очевидно, что если $L_K \subseteq L_G$, то фиксированной части слова из L_K до маркера (после маркера) не может соответствовать бесконечно много частей слов после маркера (до маркера). Поэтому, если $L_K \subseteq L_G$, то правая часть каждой продукции в K такова, что не более чем из одного нетерминала этой части можно вывести бесконечное число слов из L_K. Так как проблема конечности К—С языка разрешима (см., например [5, с. 305), то последнее условие можно проверить и, если оно выполняется, построить линейную КСГ K', эквивалентную K. По вышеназванной причине, в K' из любого нетерминала правой части любой продукции, в которой есть маркер, можно вывести лишь конечное число слов из $L_{K'}$. Проверив это условие, легко построить искомую c-линейную КСГ K_1. Лемма 2.1 доказана.

Пункты а), б), в) теоремы 2 сразу следуют из теоремы 1 и леммы 2.1. Утверждение п. г) теоремы 2 доказано в работе А. В. Гладкого [6]. Теорема 2 доказана.

Следующая теорема содержит ответ на поставленный во введении вопрос.

ТЕОРЕМА 3. *Не существует такого перечислимого множества КС грамматик (не обязательно однозначных), элементы которого порождают в точности все однозначные К—С языки.*

Доказательство. Если бы такое множество существовало, то из утверждения п. а) теоремы 2 следовало бы, что можно перечислить все графиковые грамматики, которые порождают однозначные языки. Это противоречит утверждению п. г) той же теоремы.

З а м е ч а н и е. Как стало известно автору, утверждения п. п. а) и б) теоремы 1 следуют из результата [7] в совокупности с результатом из [8], а также из результатов [9].

Автор признателен Ан. А. Мучнику и Н. К. Верещагину за постановку задачи и ценные обсуждения.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило
04.04.88
Переработанный вариант
10.11.89

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] С е м е н о в А. Л. Алгоритмические проблемы для степенных рядов и контекстно-свободных грамматик // ДАН СССР. 1973. Т. 212, № 1. С. 50—52.
[2] М у ч н и к Ан. А. Применение метода Семенова к анализу структуры контекстно-свободных языков // Семиотические аспекты формализации интеллектуальной деятельности. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 212—214.
[3] H o p c r o f t J. E. On the equivalence and containment problems for context-free languages // Math. Syst. Theor. 1969. V. 3, № 2. P. 119—124.
[4] Б р а у э р В. Введение в теорию конечных автоматов. М.: Радио и связь, 1987.
[5] Л а л л е м а н Х. Полугруппы и комбинаторные приложения. М.: Мир, 1985.
[6] Г л а д к и й А. В. Алгоритмическая нераспознаваемость существенной неопределенности КС-языков // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, вып. 4. С. 53—64.
[7] C u l i k II K., K a r h u m ä k i J. The equivalence of finite valued transducers (on HDTOL Languages) is decidable // Theoret. Comput. Sci. 1986. V. 47. P. 71—84.
[8] G u r a r i E., I b a r r a O. A note on finite-valued and finitely ambiguous transducers // Math. Systems Theory. 1983. V. 16. P. 61—66.
[9] W e b e r A. A decomposition theorem for finite valued transducers and application to the equivalence problem. Manuscript, 1987.