Математические заметки

том 49 выпуск 4 апрель 1991

О МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА КЛАССОВ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ВИТАЛИ

В. Г. Кановей

Отношение эквивалентности: $x \sim y$, когда разность $y - x$ рациональна, использованное Витали для построения неизмеримого по Лебегу множества (см. [1, с. 42]), разбивает вещественную прямую R на попарно непересекающиеся счетные классы

$[x] = \{y\colon y \sim x\} = \{x + q\colon q$ — рационально$\}$. Какова мощность

m множества M всех классов $[x]$?

Если мы принимаем аксиому выбора AC, то ответ простой: $\mathfrak{m} = \mathfrak{c}$, где $\mathfrak{c}$ — мощность континуума: действительно, $\mathfrak{c} = \mathfrak{m}\aleph_0$ по построению, а AC влечет равенство $\varkappa\aleph_0 = \varkappa$ для любой бесконечной мощности $\varkappa$. Однако характер этого рассуждения, весьма далекого от того, чтобы принести конкретное взаимно однозначное соответствие между M и континуальным множеством (например, R), заставил Н. Н. Лузина сделать в [2, п. 64] следующее замечание: «Кажется довольно естественным ..., что множество M имеет мощность континуума. ... В действительности [же] мощность множества M (если законно о ней говорить) совершенно не известна: мы не умеем назвать отображение M на континуум.»

Впрочем, неравенство $\mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{m}$ выполняется независимо от AC. Именно, сопоставим каждому числу x, $0 \leqslant x < 1$, с десятичной записью $x = 0.x_1x_2x_3x_4 \ldots$ число x^* с записью

$$(1) \quad x^* = 0.x_10x_1x_200x_1x_2x_3000x_1x_2x_3x_40000\ldots$$

Легко видеть, что в классе $[x^*]$ лишь одно число — именно, само x^* — имеет вид (1) для какой-либо последовательности десятичных знаков x_i. Тем самым, $[x^*] \neq [y^*]$ при $x \neq y$, т. е. мы получили взаимно однозначное отображение полуинтервала $[0, 1)$ на некоторую часть множества M. А это и означает, что $\mathfrak{c} \leqslant \mathfrak{m}$.

Обратное неравенство $\mathfrak{m} \leqslant \mathfrak{c}$ представляется даже более естественным, чем доказанное, однако возможность его выполнения ограничена следующей теоремой, на которую мы ссылаемся по [2, п. 64]:

ТЕОРЕМА Серпинского [3, с. 147]. *Если множество M можно линейно упорядочить, то существует неизмеримое по Лебегу $X \subseteq R$.*

С л е д с т в и е. *Строгое неравенство* $\mathfrak{c} < \mathfrak{m}$ *совместно с аксиомами системы* $ZF + DC$.

Напомним, что ZF — теория Цермело — Френкеля без аксиомы выбора, а DC — принцип зависимого выбора, постулирующий возможность счетной последовательности выборов в весьма общей ситуации и обычно используемый для вывода некоторых опирающихся на AC базовых положений анализа в тех случаях, когда применение «полной» аксиомы выбора нежелательно (см. [1, с. 49; 4, разд. 20]).

В самом деле, Р. Соловей [5] установил совместность с $ZF + DC$ гипотезы LM о том, что каждое множество $X \subseteq R$ измеримо по Лебегу, а по теореме Серпинского из LM следует $\mathfrak{c} < \mathfrak{m}$, ибо равенство $\mathfrak{c} = \mathfrak{m}$ перенесло бы на M естественный порядок R.

Для измерения «ширины» возможной, как мы видим, щели между мощностями $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{m}$ удобно воспользоваться функцией Хартогса

$$H(\theta) = \min \{\aleph_\xi\text{: не верно, что } \aleph_\xi \leqslant \theta\}$$

[4, разд. 4], проектирующей класс всех мощностей θ на ряд алефов [т. е. мощностей вполне упорядоченных множеств; такие мощности называются кардиналами). В предположении AC все мощности — кардиналы и $H(\theta) = \theta^+$ — следующий по величине за θ кардинал.

ТЕОРЕМА. *Пусть* $\mathcal{M}$ *— счетная транзитивная модель теории* ZFC *плюс аксиома конструктивности, и* $\varkappa \leqslant \lambda$ *— пара кардиналов несчетной конфинальности в* $\mathcal{M}$, *не имеющих вида* θ^+ *для какого-либо кардинала* θ *счетной конфинальности в* $\mathcal{M}$, *причем* $\aleph_2^{\mathcal{M}} \leqslant \varkappa$. *Тогда существует сохраняющее кардиналы генерическое расширение* $\mathcal{N}$ *модели* $\mathcal{M}$, *в котором выполнены все аксиомы* ZF, *принцип* DC *и равенства* $H(\mathfrak{c}) = \varkappa$, $H(\mathfrak{m}) = \lambda$.

С л е д с т в и е. *Неравенство* $H(\mathfrak{c}) < H(\mathfrak{m})$ *совместно с* $ZF + DC$.

Отметим, что кардиналы $H(\mathfrak{c})$ и $H(\mathfrak{m})$ имеют несчетную конфинальность и не могут непосредственно следовать за счетно конфинальными кардиналами в $ZF + DC$, так что соответствующие требования к $\varkappa$ и λ в формулировке теоремы необходимы.

Заметим также, что $\aleph_0 < \mathfrak{c}$, и поэтому, вообще говоря, $\aleph_1 \leqslant H(\mathfrak{c})$. Случай $H(\mathfrak{c}) = \aleph_1$ не охватывается, нашей теоремой и в принципе не может быть реализован на сохраняющих кардиналы расширениях конструктивной модели, поскольку, как нетрудно убедиться, последнее равенство влечет в $ZF + DC$ строгую недостижимость «настоящего» $\aleph_1$ в конструктивном универсуме.

Однако непротиворечивость соотношения $\aleph_1 = H(\mathfrak{c}) < H(\mathfrak{m})$ может быть доказана при помощи моделей, комбинирующих склейку кардиналов типа той, которая проведена в построении упоминавшейся выше модели Соловея, с соответствующей симметризацией. Кстати, в самой модели Соловея имеет место $H(\mathfrak{c}) = H(\mathfrak{m}) = \aleph_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы. В качестве множества вынуждающих условий для построения искомой модели возьмем λ-коэновское м.в.у.

$$P = \{p\colon p \text{ — функция, } \operatorname{dom} p \subseteq \lambda \times \omega \text{ конечно и } \operatorname{ran} p \subseteq \{0,1\}\}$$

[1, с. 119]. Фиксируем P-генерическое над $\mathcal{M}$ множество $G \subseteq P$ и отметим два известных свойства генерического расширения $\mathcal{M}[G]$:

(2) кардиналы модели $\mathcal{M}$ остаются кардиналами в $\mathcal{M}[G]$ и их конфинальности также сохраняются;

(3) всякое множество $u \in \mathcal{M}[G]$, $u \subseteq \lambda$ можно накрыть множеством $u' \in \mathcal{M}$, $u' \subseteq \lambda$ той же мощности в $\mathcal{M}[G]$, что и u.

В основе доказательств лежит условие счетности цепей (у.с.ц.) множества P (см. [1, гл. 4, § 3] и [4, разд. 18]).

Определим $a_\xi(k) = i \leftrightarrow \exists p \in G\,(p(\xi, k) = i)$ для $\xi < \lambda$; тогда a_ξ будет функцией из ω в $\{0, 1\}$. Условимся отождествлять каждую такую функцию a с правильной дробью, знаки двоичного разложения которой суть $a(0)$, $a(1)$, $a(2)$, . . ., и в смысле этого отождествления договоримся понимать обозначение класса Витали $[a_\xi]$ для a_ξ. Отметим еще один факт:

(4) $a_\xi \neq a_\eta$ и $[a_\xi] \neq [a_\eta]$ при $\xi \neq \eta$.

Модель $\mathcal{N}$ для доказательства теоремы получается симметризацией внутри $\mathcal{M}[G]$ при помощи двух групп автоморфизмов.

Первая группа: $B = \{b \in \mathcal{M}\colon b \text{ — биекция } \lambda \text{ на } \lambda\}$.

Автоморфизмы второй группы удобно изображать посредством множеств из совокупности $Z = \{z \subseteq \lambda \times \omega\colon z \text{ — конечно}\}$.

Пусть $b \in B$ и $z \in Z$. Если $\xi < \lambda$, то пусть

$$za_\xi(k) = \begin{cases} a_\xi(k) & \text{при } \langle \xi, k\rangle \notin z, \\ 1 - a_\xi(k) & \text{при } \langle \xi, k\rangle \in z. \end{cases}$$

В силу конечности z конечным будет и множество всех индексов ξ таких, что $za_\xi \neq a_\xi$, и если ξ — такой индекс, то множество тех k, для которых $za_\xi(k) \neq a_\xi(k)$, также конечно. В частности, это означает, что $[za_\xi] = [a_\xi]$ для всех ξ.

Пусть также $u \subseteq \lambda$. Зададим в $\mathcal{M}[G]$ последовательности $zb \mid u = \langle za_{b(\xi)}\colon\ \xi \in u\rangle$ и $[zb \mid u] = \langle [za_{b(\xi)}]\colon\ \xi \in u\rangle$; фактически, $[zb \mid u]$ не зависит от z по предыдущему, и данный способ обозначения принят для сохранения единообразия.

Наконец, положим

$$C_\theta = \{u \subseteq \lambda\colon u \in \mathcal{M} \text{ имеет мощность } {<}\theta \text{ в } \mathcal{M}\};$$

$$W_\varkappa = \{zb \mid u\colon\ z \in Z,\ b \in B,\ u \in C_\varkappa\};$$

$$[W_\lambda] = \{[zb \mid u]\colon\ z \in Z,\ b \in B,\ u \in C_\lambda\}.$$

Желаемыми свойствами обладает модель

$$\mathcal{N} = HOD\,(W_\varkappa \cup [W_\lambda] \cup \{W_\varkappa, [W_\lambda]\}) \text{ в } \mathcal{M}[G],$$

образованная всеми множествами, наследственно (т. е. вместе с каждым элементом своего транзитивного замыкания) определимыми в $\mathcal{M}$ $[G]$ при помощи формул, которые могут содержать в качестве параметров ординалы, множества $W_\varkappa$ и $[W_\lambda]$ и элементы этих множеств.

В модели $\mathcal{N}$ выполнены все аксиомы ZF [6]. Кроме того, $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ $[G]$ (первое включение имеет место по причине истинности аксиомы конструктивности в $\mathcal{M}$, из чего вытекает даже $\mathcal{M} \subseteq HOD$ в $\mathcal{M}$ $[G]$). Следовательно, утверждение (2) сохраняет силу и по отношению к расширению $\mathcal{N}$ модели $\mathcal{M}$.

ЛЕММА 1. *Принцип DC справедлив в модели* $\mathcal{N}$.

Доказательство. Имея в виду известный метод вывода DC в моделях, конструируемых через ординальную определимость [4, разд. 20], [5 разд. III.2], мы видим, что для проверки DC в $\mathcal{N}$ достаточно доказать такие два утверждения:

(5) если $g \in \mathcal{M}$ $[G]$, g: $\omega \to \mathcal{M}$, то $g \in \mathcal{N}$;

(6) если $g \in \mathcal{M}$ $[G]$; g: $\omega \to W_\varkappa \cup [W_\lambda]$, то $g \in \mathcal{N}$.

Доказательство утверждения (5). Рассуждая в $\mathcal{M}$, определим

$$Q_n = \{p \in P\colon \exists x\,(p \Vdash g\,(n) = x)\} \quad (n \in \omega),$$

где $\Vdash$ есть вынуждение, соответствующее м.в.у. P и генерическому расширению типа $\mathcal{M}$ $[G]$ (во избежание излишнего формализма мы не будем делать различия в записи между множествами из генерического расширения и соответствующими им термами специального языка при записи формул вынуждения). Выберем в каждом Q_n максимальную антицепь $A_n \subseteq Q_u$; тогда A_n счетно благодаря у.с.ц., и множество $u = \bigcup_{n\in\omega}\bigcup_{p\in A_n} \| p \|$, где $\| p \| = \{\xi\colon \exists k\,(\langle \xi, k\rangle \in \operatorname{dom} p)\}$ — также счетно (в $\mathcal{M}$). Вследствие максимальности A_n мы имеем:

$$(7)\quad g\,(n) = x \leftrightarrow \exists p \in G\,(\| p \| \subseteq u \wedge p \Vdash g\,(n) = x).$$

Однако при $\| p \| \subseteq u$ справедлива эквивалентность

$$p \in G \leftrightarrow \forall\, \langle \xi, k\rangle \in \operatorname{dom} p\,(p\,(\xi, k) = a_\xi\,(k)),$$

которая в соединении с (7) и с учетом того обстоятельства, что вынуждение над $\mathcal{M}$ выразимо в $\mathcal{M}$ и ординально определимо в расширении $\mathcal{M}$ $[G]$, показывает, что $g \in HOD\,(\varnothing\, e \mid u)$ в $\mathcal{M}$ $[G]$, где $e \in B$ — тождественная биекция: $e\,(\xi) = \xi$ для всех ξ.

Теперь утверждение (6). Для простоты, пусть g: $\omega \to W_\varkappa$ и

$$g\,(n) = z_n b_n \mid u_n,\ u_n \in C_\varkappa,\ b_n \in B,\ z_n \in Z$$

для всех n. Множество $v = \bigcup_{n\in\omega} (b''_n u_n) \subseteq \lambda$ имеет мощность $< \varkappa$ в $\mathcal{M}$ $[G]$, так как несчетная конфинальность $\varkappa$ сохраняется в $\mathcal{M}$ $[G]$ согласно (2). Следовательно, в силу (3) найдется множество $u \in C_\varkappa$ такое, что $v \subseteq u$. Теперь нетрудно проверить, что $g \in HOD$ в $\mathcal{M}$ $[G]$ относительно $\varnothing\, e \mid u\ (\in W_\varkappa)$ и последовательностей $\langle u_n: n \in \omega \rangle$, $\langle b_n: n \in \omega \rangle$, $\langle z_n: n \in \omega \rangle$, причем последние принадлежат $\mathcal{N}$ по утверждению (5).

ЛЕММА 2. $H(\mathfrak{c}) = \varkappa$ *в* $\mathcal{N}$.

Доказательство. Неравенство $\geqslant$ легко получается из конструкции множества $W_\varkappa$. Именно, возьмем произвольный кардинал $\theta < \varkappa$ и множество $u \in C_\varkappa$ мощности θ (в $\mathcal{M}$ — а тогда и в $\mathcal{N}$) и рассмотрим функцию $f = \varnothing' e \mid u \in \mathcal{N}$. Она отображает u в $\mathcal{P}(\omega)$, причем это отображение взаимно однозначно согласно (4).

Для вывода обратного неравенства, пусть функция $h \in \mathcal{N}$, $h: \varkappa \to \mathcal{P}(\omega)$ произвольна. Требуется доказать, что область всех ее значений $\operatorname{ran} h = h''\varkappa$ имеет мощность $< \varkappa$ в $\mathcal{N}$; отсюда и вытекает искомое неравенство. Отметим, что

$$n \in h(\eta) \leftrightarrow \varphi(\eta, n) \text{ истинно в } \mathcal{M}[G]$$

для подходящей формулы φ, содержащей в качестве параметров только ординалы, множества $W_\varkappa$ и $[W_\lambda]$ и их элементы. Положим

$$v = \bigcup \{b''u: \exists z \text{ (параметр } zb \mid u \text{ входит в } \varphi)\}$$

— тогда $v \in C_\varkappa$, и докажем следующую эквивалентность:

$$(8) \quad n \in h(\eta) \leftrightarrow \exists p \in G\, (\| p \| \subseteq v \wedge p \Vdash \varphi(\eta, n)).$$

Если предположить, что это соотношение уже установлено, то каждое из множеств $h(\eta)$, $\eta < \varkappa$, будет при известном G определяться счетной последовательностью $\langle A_{\eta n}: n \in \omega \rangle \in \mathcal{M}$ максимальных антицепей $A_{\eta n}$, выделяемых в множествах

$$Q_{\eta n} = \{p \in P: \| p \| \subseteq v \wedge p \Vdash \varphi(\eta, n)\}.$$

А поскольку мощность множества $\{p \in P: \| p \| \subseteq v\}$ равна мощности v, т. е. меньше $\varkappa$ в $\mathcal{M}$, то, учитывая требование $\varkappa \neq \theta^+$ для кардиналов θ счетной конфинальности в $\mathcal{M}$ (см. условие теоремы), мы можем заключить, что семейство всех последовательностей антицепей указанного вида имеет мощность $< \varkappa$ в $\mathcal{M}$. Значит, множество $\operatorname{ran} h$ также имеет мощность $< \varkappa$ в $\mathcal{N}$.

Итак, эквивалентность (8) влечет лемму 2. В самой же эквивалентности нетривиальна импликация слева направо, и поэтому пусть $n \in h(\eta)$. Найдется условие $p_1 \in G$, вынуждающее $\varphi(\eta, n)$, но не обязательно удовлетворяющее $\| p_1 \| \subseteq v$. Положим, однако,

$$p_0 = p_1 \mid v = \{\langle \xi, k, i \rangle \in p_1: \xi \in v\};$$

тогда $p_0 \in G$ (ибо $p_0 \subseteq p_1 \in G$) и $\| p_0 \| \subseteq v$, т. е. остается проверить, что $p_0 \Vdash \varphi(\eta, n)$.

Здесь мы предполагаем противное: это вынуждение не имеет места. Тогда найдется условие $p_2 \in P$, $p_0 \subseteq p_2$, вынуждающее $\neg\varphi(\eta, n)$. Противоречивость между p_1 и p_2 локализуется на множестве

$$\zeta = \{\langle \xi, k \rangle \in \operatorname{dom} p_1 \cap \operatorname{dom} p_2: p_1(\xi, k) \neq p_2(\xi, k)\},$$

которым определяется, во-первых, порядковый автоморфизм множества P, действующий так, что $\mathrm{dom}\,\zeta p = \mathrm{dom}\,p$ и

$$\zeta p(\xi, k) = \begin{cases} p(\xi, k) & \text{при } \langle \xi, k \rangle \notin \zeta, \\ 1 - p(\xi, k) & \text{при } \langle \xi, k \rangle \in \zeta, \end{cases}$$

и, во-вторых, преобразование параметров из $W_\varkappa$ и $[W_\lambda]$:

$$\zeta(zb \mid u) = z'b \mid u; \quad \zeta[zb \mid u] = [z'b \mid u];$$

где $z' = (z - \zeta) \bigcup (\zeta - z)$, а множества $W_\varkappa$ и $[W_\lambda]$ переходят при этом каждое в себя. Обозначим через $\zeta\varphi$ формулу, полученную из φ при таком преобразовании параметров.

Стандартная техника симметрических моделей позволяет вывести $\zeta p_2 \Vdash \neg \zeta\varphi(\eta, n)$ из предположения, что p_2 вынуждает $\neg\varphi(\eta, n)$. Между тем, по построению среди пар $\langle \xi, k \rangle \in \zeta$ нет таких, что $\xi \in v$. Следовательно, согласно определению v, для любого параметра вида $zb \mid u$, встречающегося в φ, выполняется равенство $\zeta(zb \mid u) = zb \mid u$. Параметры же $[zb \mid u]$ вообще не зависят от z и потому также не изменяются. Таким образом, формулы φ и $\zeta\varphi$ тождественны, и мы имеем $\zeta p_2 \Vdash \neg\varphi(\eta, n)$.

Наконец, по определению ζ условия p_1 и ζp_2 совместны в P, и отсюда происходит искомое противоречие с выбором p_1, которым завершается доказательство соотношения (8) и леммы 2.

ЛЕММА 3. *$H(\mathfrak{m}) = \lambda$ в $\mathcal{N}$.*

Доказательство снова достаточно провести в направлении $\leqslant$. Рассмотрим произвольную функцию $h \in \mathcal{N}$, $h\colon \lambda \to M$; значения h суть, таким образом, классы Витали. Кроме того,

$$x \in h(\eta) \leftrightarrow \varphi(\eta, x) \text{ истинно в } \mathcal{M}[G]$$

для подходящей формулы φ, имеющей в качестве параметров только ординалы, множества $W_\varkappa$ и $[W_\lambda]$ и их элементы. Положим

$v = \bigcup \{b''u\colon \exists z$ (параметр $zb \mid u$ или $[zb \mid u]$ входит в φ)$\}$ — тогда $v \in C_\lambda$, и дадим следующее вспомогательное определение.

Пусть $w \subseteq \lambda$. Назовем *w-термом* всякое индексированное множество $t = \langle A_{ni}\colon n \in \omega$ и $i \in \{0, 1\}\rangle \in \mathcal{M}$ такое, что:

1) каждое множество $A_{n0} \bigcup A_{n1}$ — максимальная антицепь в P;

2) $A_{n0} \bigcap A_{n1} = \varnothing$;

3) множество $\| t \| = \bigcup_{n\in\omega} \bigcup_i \bigcup_{p\in A_{ni}} \| p \|$ включено в w.

Каждый терм такого вида порождает в генерическом расширении $\mathcal{M}[G]$ функцию $a = G(t)$, $a\colon \omega \to \{0, 1\}$, следующим образом: $a(n) = i$, когда $G \bigcap A_{ni} \neq \varnothing$.

Теперь зафиксируем счетное в $\mathcal{N}$ множество $u_1 \subseteq \lambda - v$, $u_1 \in \mathcal{N}$. Ключевой факт в доказательстве леммы 3 следующий:

(9) Если $\eta < \lambda$, то найдется $(v \bigcup u_1)$-терм t такой, что $G(t) \in h(\eta)$ (с учетом отождествления функции $a = G(t)$ с соответствующей правильной дробью, см. выше).

Отметим, что множество всех $(v \cup u_1)$-термов имеет мощность $< \lambda$ в $\mathcal{M}$ из-за требования $\lambda \neq \theta^+$ для кардиналов θ счетной конфинальности в $\mathcal{M}$ в условии теоремы. Таким образом, если принять, что утверждение (9) доказано, то область значений $\operatorname{ran} h$ функции h будет иметь мощность $< \lambda$ в $\mathcal{N}$, откуда в силу произвольности h и получается искомое неравенство $H(m) \leqslant \lambda$.

Для доказательства (9), пусть $\eta < \lambda$ и $x \in h(\eta)$. Предполагая x правильной дробью, рассмотрим соответствующую (при указанном отождествлении) функцию a: $\omega \to \{0, 1\}$ и образуем терм $t' \in \mathcal{M}$ из максимальных антицепей A'_{ni}, выбираемых в $\mathcal{M}$ в множествах

$$Q_{ni} = \{p \in P \colon p \Vdash a(n) = i\}.$$

Из у.с.ц. для P следует счетность в $\mathcal{M}$ множества $\| t' \|$; тем самым, множество $u_2 = \| t' \| - v$ также счетно в $\mathcal{M}$ (либо конечно), причем по построению t' является $(v \cup u_2)$-термом.

Кроме того, $G(t') = a$, и потому по выбору x найдется условие $p_2 \in G$, вынуждающее, что $G(t') \in h(\eta)$, т. е. вынуждающее формулу $\varphi(\eta, G(t'))$.

Далее, из счетности u_1, не более чем счетности u_2 и генеричности G нетрудно вывести существование биекции $\beta \in B$ такой, что $\beta'' u_2 \subseteq u_1$, $\beta(\xi) = \xi$ для всех $\xi \in v$, и $\beta p_2 = p_1 \in G$, где

$$\beta p = \{\langle \beta(\xi), k, i \rangle \colon \langle \xi, k, i \rangle \in p\} \text{ для всех } p \in P.$$

Помимо порядкового автоморфизма множества P, задаваемого последним равенством, биекция β порождает и преобразование формул, при котором $zb \mid u$ и $[zb \mid u]$ меняются соответственно на

$$\beta(zb \mid u) = (\beta z)(\beta b) \mid u \text{ и } \beta[zb \mid u] = [(\beta z)(\beta b) \mid u],$$

где $\beta z = \{\langle \beta(\xi), k \rangle \colon \langle \xi, k \rangle \in z\}$ и $(\beta b)(\xi) = \beta(b(\xi))$ для всех $\xi < \lambda$. Формула $\beta\varphi$, полученная из φ после такого преобразования, совпадает с φ по построению v, и терм

$$t = \langle A_{ni} \colon n \in \omega, \ i \in \{0, 1\}\rangle, \text{ где } A_{ni} = \{\beta p \colon p \in A'_{ni}\},$$

является $(v \cup u_1)$-термом по выбору β. Таким образом, действуя преобразованием β на соотношение $p_2 \Vdash \varphi(\eta, G(t'))$, мы получаем: $p_1 \Vdash \varphi(\eta, G(t))$. Отсюда $G(t) \in h(\eta)$, так как $p \in G$. Соотношение (9), лемма 3 и теорема доказаны.

Приложение. Доказательство теоремы Серпинского (дается из-за красоты и неожиданности этой теоремы и малой ее известности в современных работах). Пусть множество M линейно упорядочивается каким-то отношением $\prec$. Разобьем плоскость R^2 на три множества:

$$P = \{\langle x, y \rangle \colon [x] \prec [y]\}, \quad Q = \{\langle x, y \rangle \colon [y] \prec [x]\}$$

и $E = \{\langle x, y \rangle \colon [x] = [y]\}$. Если предположить, что каждое множество $X \subseteq R$ измеримо по Лебегу, то все плоские множества также будут измеримы. В частности, измеримо множество E, и тогда

E имеет меру 0 по теореме Фубини, ибо каждое вертикальное сечение E счетно.

Далее, множество P по построению инвариантно относительно вертикальных и горизонтальных рациональных сдвигов, откуда (при измеримости P) нетрудно вывести, что либо P имеет меру 0, либо дополнение P имеет меру 0. Оба варианта немедленно приводят к противоречию, так как меры P и Q должны быть равны вследствие того, что $P = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in Q\}$.

Московский институт инженеров
железнодорожного транспорта

Поступило
13.06.88

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств. М.: Наука, 1982.
[2] Лузин Н. Н. Об аналитических множествах // Лузин Н. Н. Сбор. соч. Т. II. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 380—459.
[3] Sierpinski W. L'axiome de M. Zermelo et son rôle dans la théorie des ensembles et l'analyse. Bull. Acad. sci. Cracovie, 1918. P. 97—152.
[4] Йех Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
[5] Solovay R. M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesque measurable // Ann. of Math. 1970. V. 92, N 1. P. 1—56.
[6] Myhill J., Scott D. Ordinal definability // Proc. Symp. Pure Math. 1971. V. 13, N 1. P. 271—278.