ПИРАМИДАЛЬНАЯ СТРУКТУРА СТЕПЕНЕЙ КОНСТРУКТИВНОСТИ

В. Г. Кановей, И. Заплетал

Введение. Рассматривается модель, структура степеней конструктивности которой включает

1) степени $\mathbf{0} < \boldsymbol{a}_0 < \boldsymbol{a}_1 < \cdots$, где $\mathbf{0}$ – конструктивная степень;
2) степень $\boldsymbol{b} > \mathbf{0}$, несравнимую ни с одной из $\boldsymbol{a}_n$;
3) "конкатенации" $\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b} < \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b} < \cdots$;
4) наибольшую степень $\boldsymbol{a}_\omega\boldsymbol{b}$.

Степени $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots$ и $\boldsymbol{b}$ можно было бы получить при помощи форсинга $\mathrm{Sacks}^\omega \times \mathrm{Sacks}$. (Здесь Sacks^ω есть итерация форсинга Сакса Sacks длины ω со счетной "поддержкой", см. [1]. Соответственно Sacks^m есть итерация Sacks длины m.) Однако, при этом возникает еще одна степень $\boldsymbol{a}_\omega$ – верхняя грань степеней $\boldsymbol{a}_n$, $n \in \omega$, которая несравнима с $\boldsymbol{b}$ и поэтому отлична от $\boldsymbol{a}_\omega\boldsymbol{b}$. Следовательно, необходима иная форма итерации.

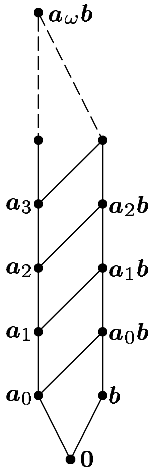

Рис. 1. Структура $\mathbf{L}$-степеней в рассматриваемой модели

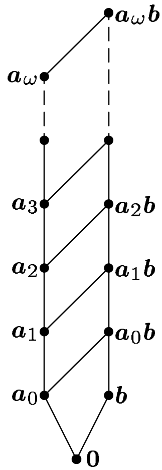

Рис. 2. Структура $\mathbf{L}$-степеней в обычной итерированной модели Сакса с той же системой образующих $\boldsymbol{a}_n$ и $\boldsymbol{b}$

(Вещественными) *числами* мы называем элементы множества ω^ω.

Работа первого автора выполнена при поддержке Калтеха и НИОКР МПС России. Работа второго автора выполнена при поддержке фонда GA ČR, грант № 201/97/0216.

Теорема. *Пусть ω_1^L счетно. Тогда существует генерическое расширение $\mathbf{M} = \mathbf{L}[\langle a_n : n \in \omega\rangle, b]$, порожденное числами a_n и b, такое, что*

i) *для любого n $\langle\langle a_0, \dots, a_n\rangle, b\rangle$ является $(\mathrm{Sacks}^{n+1} \times \mathrm{Sacks})$-генерической над $\mathbf{L}$ последовательностью;*

ii) *каждое число $x \in \mathbf{M}$ или принадлежит $\mathbf{L}[a_0, \dots, a_n, b]$ для некоторого n, или удовлетворяет свойству $\mathbf{L}[x] = \mathbf{L}[\langle a_n : n \in \omega\rangle, b]$.*

Согласно известным свойствам обычных итерированных моделей Сакса (см. [1], [2]) такая модель $\mathbf{M}$ имеет структуру степеней конструктивности чисел, описанную в 1)–4).

1. Форсинг. Следующие рассуждения проводим в модели $\mathbf{L}$.

Пусть $\mathbf{S} = \mathrm{Sacks}$ – форсинг Сакса. Для любого n обозначим через $\mathbf{S}^n$ итерацию форсинга Сакса длины n с соответствующим отношением форсинга $\Vdash_n$. Каждое $\tau \in \mathbf{S}^n$ есть функция, заданная на множестве $n = \{0, \dots, n-1\}$, так что $\tau \restriction k \Vdash_k$ "$\tau(k) \in \check{\mathbf{S}}$" для всех $k < n$.

Если $u \in 2^n$ и f – функция такая, что каждое ограничение вида $u \restriction k$, $k < n$, принадлежит $\operatorname{dom} p$, то через $f|_u$ обозначим функцию, определенную на n по правилу $(f|_u)(k) = f(u \restriction k)$ для всех $k < n$.

Определим форсинг $\mathbf{P}$ как семейство всех $p = \langle T_p, f_p\rangle$ таких, что

а) $T_p \subseteq 2^{<\omega}$ – совершенное дерево;

б) f_p – функция, определенная на T_p так, что $f_p|_u \in \mathbf{S}^n$ для всех $u \in T_p \cap 2^n$.

Скажем, что q *сильнее* p (или $q \leqslant p$), если $T_q \subseteq T_p$ и $f_q|_u \leqslant f_p|_u$ в $\mathbf{S}^n$ для каждого $u \in T_q \cap 2^n$. Символом $\Vdash$ обозначим отношение $\mathbf{P}$-форсинга.

Напомним, что $u \in T$ называется *расщепляющейся вершиной* дерева $T \subseteq 2^{<\omega}$, если вершины $u^\wedge 0$ и $u^\wedge 1$ принадлежат T. Расщепляющаяся вершина *уровня* n имеет ровно n расщепляющихся вершин ниже себя. Совершенное дерево T содержит в точности 2^n расщепляющихся вершин на каждом уровне n.

Пусть S и T – совершенные деревья. Положим $S \leqslant_n T$, если $S \subseteq T$ и n-е расщепляющиеся уровни в S и T совпадают. Известно, что если T_n – совершенные деревья и $T_0 \geqslant_0 T_1 \geqslant_1 T_2 \geqslant_2 \cdots$, то $T = \bigcap T_n$ – также совершенное дерево.

Эта конструкция принимает следующую форму для форсинга $\mathbf{P}$.

Пусть $p, q \in \mathbf{P}$. Положим $q \leqslant_n p$, если $q \leqslant p$, $T_q \leqslant_n T_p$ и каждое $u \in T_q \cap 2^m$, $m < n$, удовлетворяет свойству $f_q|_u \Vdash_m$ "$f_q(u) \leqslant_n f_p(u)$". Тогда любая убывающая цепь $p_0 \geqslant_0 p_1 \geqslant_1 p_2 \geqslant_2 \cdots$ вынуждающих условий $p_n \in \mathbf{P}$ имеет нижнюю грань в $\mathbf{P}$.

2. Расширение. Если множество $G \subseteq \mathbf{P}$ является $\mathbf{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$, то $T = \bigcap_{p \in G} T_p$ – генерическая цепь в $2^{<\omega}$, так что $b = \bigcup T \in 2^\omega$ есть число Сакса над $\mathbf{L}$.

Пусть $n \in \omega$. Положим $u = b \restriction n$, $u \in 2^n$. Тогда множество $G|_u = \{f_p|_u : p \in G\}$ является $\mathbf{S}^n$-генерическим над $\mathbf{L}$, т.е. над $\mathbf{L}$ задана $\mathbf{S}^n$-генерическая последовательность чисел $\langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle$, в которой каждое $a_k \in 2^\omega$ – число Сакса над $\mathbf{L}[a_0, \dots, a_{k-1}]$. (Разумеется, здесь a_k не зависит от выбора $n > k$.) Более того, последовательность $\langle\langle a_0, \dots, a_{n-1}\rangle, b\rangle$ является $(\mathbf{S}^n \times \mathbf{S})$-генерической над $\mathbf{L}$.

Теперь нам осталось доказать утверждение ii) теоремы. Оно вытекает из следующей леммы.

Лемма 1. *Предположим, что число $x \in \mathbf{L}[G]$ не принадлежит классу $\mathbf{L}[a_0, \dots, a_n, b]$ ни при каком n. Тогда $G \in \mathbf{L}[x]$.*

Начнем доказательство с определения. *Ростером размера* l называется конечная последовательность вида $R = \langle u, w_0, \dots, w_{l-1}\rangle$, в которой все $u, w_0, \dots, w_{l-1}$ принадлежат 2^l. Ростер $R = \langle u, w_0, \dots, w_{l-1}\rangle$ можно понимать как условие в $\mathbf{P}$, вынуждающее $\breve{b}$ продолжать u, а каждое $\breve{a}_k$, $k < l$, продолжать w_k.

Ростер $R = \langle u, w_0, \dots, w_{l-1}\rangle$ *согласуется с генерическим множеством* G, если $u \subset b$ и $w_k \subset a_k$ для всех $k < l$. Ростер R *согласуется с условием* $p \in \mathbf{P}$, если существует более сильное условие $q \leqslant p$, вынуждающее R быть согласованным с $\breve{G}$. В этом случае имеется наибольшее (т.е. слабейшее) условие q такого вида, обозначаемое как $q = p \restriction R$ (*ограничение p на R*): q получается присоединением к p информации о том, что $\breve{b}$ продолжает u и каждое $\breve{a}_k$, $k < l$, продолжает w_k.

Будем говорить, что условие $p \in \mathbf{P}$ *вполне n-расщепляется ниже* l, если n-й уровень расщепления T_p целиком ниже l и для любого $u \in T_p \cap 2^m$, $m \leqslant n$, имеем

$$f_p|_u \Vdash_n \text{“}n\text{-й уровень расщепления } f_p(u) \text{ целиком ниже } l\text{”}.$$

Лемма 2. *Предположим, что ростер $R = \langle u, w_0, \dots, w_{l-1} \rangle$ согласуется с условием $p \in \mathbf{P}$, которое вполне n-расщепляется ниже $l \geqslant n$, а условие $r \in \mathbf{P}$ сильнее чем $p \restriction R$. Тогда существует условие $q \leqslant_n p$ такое, что $q \restriction R$ совпадает с r.*

Доказательство. Определим T_q как множество всех $v \in T_p$ таких, что либо $u \not\subseteq v$, либо $v \in T_r$. (Тогда каждое $v \in T_r$ $\subseteq$-сравнимо с u по выбору r.)

Для $v \in T_q$ определим $f_q(v)$. Положим $f_q(v) = f_r(v)$, если $u \subseteq v$, и $f_q(v) = f_p(v)$, если u, v $\subseteq$-несравнимы. Остается рассмотреть случай строгого включения $v \subset u$. Положим $m = \operatorname{dom} v$, $m < l$. Пусть $f_q(v)$ есть $\mathbf{S}_m$-имя “если $\exists j < m$ $(w_j \not\subseteq \breve{a}_j)$, то я совпадаю с $f_p(v)$; иначе я совпадаю с $\{a \in f_p(v) : w_m \subset a \implies a \in f_r(v)\}$”. Из второй части определения следует, что $q \restriction R = r$. Пусть $m < n$ и $v \in T_q \cap 2^m$. Покажем, что $f_q|_v \Vdash_m$ “$f_q(v) \leqslant_n f_p(v)$”. По определению нетривиальным является лишь случай $v = u \restriction m \subset u$. Будем рассуждать в $\mathbf{S}^m$-генерическом расширении универсума. Все различия между $f_p(v)$ и $f_q(v)$ по определению сконцентрированы в области $D = \{a \in 2^\omega : w_m \subset a\}$, где $w_m \in 2^l$. С другой стороны, n-й уровень расщепления $f_p(v)$ определен *ниже* l, так что эти различия не нарушают свойства $f_q(v) \leqslant_n f_p(v)$. Следовательно, $q \leqslant_n p$.

3. Доказательство леммы 1. Пусть $\breve{x}$ – имя нашего числа x. По условию леммы некоторое $p \in G$ вынуждает “$\breve{x} \notin \mathbf{L}[\breve{a}_0, \dots, \breve{a}_n, \breve{b}]$” для любого n. Индукцией по n определим

а) последовательность $p = p_0 \geqslant_0 p_1 \geqslant_1 p_2 \geqslant_2 \cdots$ условий $p_n \in \mathbf{P}$;
б) последовательность натуральных чисел $l_0 < l_1 < l_2 < \cdots$;
в) функцию g, отображающую ростеры размера l_n в $\Sigma \cup \{\bot\}$, где Σ – множество всех функций σ таких, что $\operatorname{dom} \sigma \subseteq \omega$ конечно и $\operatorname{ran} \sigma \subseteq \{0, 1\}$, а $\bot$ – формальный символ для отделения несущественных вариантов

так, что для каждого n и любого ростера R размера l_n

$$p_{n+1} \Vdash \text{“}R \text{ согласуется с } \breve{G} \iff g(R) \neq \bot \text{ и } g(R) \subset \breve{x}\text{”}. \tag{1}$$

Тогда любая нижняя грань $q \in \mathbf{P}$ последовательности условий p_n вынуждает $\breve{G}$ быть единственным генерическим множеством, согласованным со всеми ростерами R, удовлетворяющими свойству $g(R) \subset \breve{x}$. Следовательно, q вынуждает “$\breve{G} \in \mathbf{L}[\breve{x}]$”, что и требовалось.

Допустим, что p_n уже определено. Покажем, как определить l_n, действие g на ростеры размера l_n и условие p_{n+1}.

Первая часть. Согласно известным свойствам форсинга Сакса и его конечных итераций существуют условие $q \leqslant_n p_n$ и натуральное число $l_n > l_{n-1}$ такие, что $T_q = T_{p_n}$ и q вполне n-расщепляется ниже l_n. Зафиксируем перечисление $\langle R_k^0, R_k^1 \rangle$, $k < K$, всех пар различных ростеров размера l_n. Индукцией по $k \leqslant K$ определим

а) условия $q = q_0 \geqslant_n q_1 \geqslant_n q_2 \geqslant_n \ldots \geqslant_n q_K$ в $\mathbf{P}$;
б) натуральные числа $m_k \in \omega$ и $i_k \in \{0, 1\}$

так, что для каждого $k < K$ выполнено

$$q_{k+1} \Vdash \begin{cases} \text{“если } R_k^0 \text{ согласуется с } \breve{G}, \text{ то } \breve{x}(m_k) = i_k\text{”}, \\ \text{“если } R_k^1 \text{ согласуется с } \breve{G}, \text{ то } \breve{x}(m_k) \neq i_k\text{”}. \end{cases}$$

Затем положим $p_{n+1} = q_K$ и для любого ростера R размера l_n

$$g(R) = \begin{cases} \{\langle m_k, i_k \rangle : k < K,\ R = R_k^0\}, & \text{если } R \text{ согласуется с } q_K, \\ \bot & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Такой выбор, очевидно, влечет (1).

Вторая часть. Теперь, имея q_k, определим q_{k+1}, m_k и i_k. Построение включает два шага.

Шаг 1. Находим пару промежуточных условий q^0 и q^1. Если ростер R^0_k не согласуется с q_k, то положим $q^0 = q^1 = q_k$ и перейдем к шагу 2. Допустим, что R^0_k *согласуется с* q_k. Напомним, что R^0_k – ростер размера l_n, т.е. $R^0_k = \langle u, w_0, \ldots, w_{l_n-1}\rangle$, где u и w_j принадлежат 2^{l_n}.

Поскольку q_k вынуждает "$\breve{x} \notin \mathbf{L}[\breve{a}_0, \ldots, \breve{a}_{l_n}, \breve{b}]$", найдутся условия $r^0, r^1 \in \mathbf{P}$, которые сильнее $q_k \restriction R^0_k$ и удовлетворяют свойствам $T_{r^0} = T_{r^1}$ (заметим, что тогда $u \in T_{r_0} = T_{r_1}$) и $f_{r^0}|u = f_{r^1}|u$, а также найдется число $m_k \in \omega$ такое, что $r^0 \Vdash$ "$\breve{x}(m_k) = 0$" и $r^1 \Vdash$ "$\breve{x}(m_k) = 1$".

Существование условий q^0 и q^1 в $\mathbf{P}$, для которых $q^i \leqslant_n q_k$ и $q^i \restriction R^0_k = r^i$, $i = 0, 1$, обеспечивается леммой 2. Более того, как показывает анализ доказательства леммы 2, если условия r^i выбраны, то условия q^i можно выбрать так, чтобы $T_{q^0} = T_{q^1}$ и $f_{q^0}(v) = f_{q^1}(v)$ для всех $v \in T_{q^0} = T_{q^1}$, не удовлетворяющих включению $u \subseteq v$. В частности, выполнено $q^0 \restriction R = q^1 \restriction R$ для любого ростера размера l_n.

Шаг 2. Если R^1_k не согласуется с q^0 (значит, и с q^1 согласно сказанному выше), то положим $q_{k+1} = q^0$ и $i_k = 0$. Допустим, что R^1_k *согласуется с* r.

Условие $r \leqslant q^0 \restriction R^1_k$ определяет значение $\breve{x}(m_k)$ равным, скажем, 0. Положим $i_k = 1$. Согласно доказанному выше $r \leqslant q^1 \restriction R^1_k$. С помощью леммы 2 получаем условие $q \leqslant_n q^1$ такое, что $q \restriction R^1_k = r$. Итак, $q \leqslant_n q_k$, $q \restriction R^1_k = r \Vdash$ "$\breve{x}(m_k) = 0$", и если q согласуется с R^0_k, то $q \restriction R^0_k \leqslant q^1 \restriction R^0_k$. Следовательно, $q \restriction R^0_k \Vdash$ "$\breve{x}(m_k) = i_k = 1$".

Таким образом, условие $q_{k+1} = q$ имеет требуемые свойства.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baumgartner J. E., Laver R. // Ann. Math. Logic. 1979. V. 17. P. 271–288. **2**. Kanovei V. On non-wellfounded iterations of perfect set forcing // J. Symbolic Logic (to appear).

Московский институт инженеров транспорта
Caltech, Pasadena (USA)
E-mail: `kanovei@mech.math.msu.su, jindra@cco.caltech.edu`

Поступило
22.09.97