Математические заметки

том 66 выпуск 2 август 1999

УДК 510.223

РАСШИРЕНИЕ СТАНДАРТНЫХ МОДЕЛЕЙ ZFC ДО МОДЕЛЕЙ НЕСТАНДАРТНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ НЕЛЬСОНА IST

В. Г. Кановей, М. Реекен

Предлагается характеризация тех стандартных моделей теории множеств **ZFC**, которые вкладываются, как класс стандартных множеств, в модели теории внутренних множеств **IST** и некоторых ее вариантов.

Библиография: 7 названий.

Введение. Теория внутренних множеств **IST** была введена Нельсоном [1] как унифицированный аксиоматический базис "нестандартной" математики. Теория **IST** описывает универсум всех множеств **V** таким образом, что помимо "стандартных" множеств (которые отождествляются с обычными объектами "стандартной" математики и подчиняются аксиомам теории Цермело–Френкеля **ZFC**) существуют объекты такие, как бесконечно большие и бесконечно малые числа и т.п., несовместимые с современной "стандартной" системой оснований математики. Несмотря на то, что позже были предложены более совершенные нестандартные теории множеств, в частности, устраняющие некоторые недостатки системы **IST** (см., например, [2]–[7]), **IST** остается наиболее часто используемой нестандартной аксиоматической теорией.

Аксиомы **IST** приведены ниже.

Одним из важнейших свойств теории Нельсона является *консервативность*: **IST** доказывает те и только те предложения о классе **S** стандартных множеств, которые "стандартная" теория **ZFC** доказывает о всех множествах. Однако, взаимосвязь между этими двумя теориями намного сложнее, чем могло бы показаться из этого результата [1]. Например, как установлено в [2], не всякая $\in$-модель **ZFC** расширяется (т.е. вкладывается как класс **S** всех стандартных множеств) до модели **IST**: в частности, *минимальная* модель **ZFC** не допускает такого расширения.

Это приводит к задаче описания тех транзитивных $\in$-моделей **ZFC**, которые допускают расширение до модели **IST**. Настоящая заметка посвящена этой задаче. Мы получим удобные достаточные условия существования такого расширения, одновременно являющиеся и необходимыми для теории $\mathbf{IST}^{+}$, полученной присоединением к **IST** некоторой естественной формы аксиомы выбора.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты № 98-01-00045 и № 98-01-00790, а также фонда DFG, грант № 436-RUS-17/66/97.

1. Теория внутренних множеств. Теория **IST** формулируется в языке $\mathscr{L}_{\in,\mathrm{st}}$, т.е. языке, содержащем два атомарных предиката: принадлежность $\in$ (бинарный) и стандартность st (унарный; $\mathrm{st}\, x$ понимается как x – стандартное множество). Для класса всех стандартных множеств используется обозначение $\mathbf{S} = \{x : \mathrm{st}\, x\}$. Список аксиом **IST** включает все аксиомы **ZFC** (в $\in$-языке), а также три дополнительных "принципа":

а) (*перенос*) $\exists x\ \Phi(x) \implies \exists^{\mathrm{st}} x\ \Phi(x)$ для всех $\in$-формул $\Phi(x)$ со стандартными параметрами;

б) (*идеализация*) $\forall^{\mathrm{stfin}} A\ \exists x\ \forall a \in A\ \Phi(a,x) \iff \exists x\ \forall^{\mathrm{st}} a\ \Phi(a,x)$ для всех $\in$-формул $\Phi(x)$ с любыми параметрами;

в) (*стандартизация*) $\forall^{\mathrm{st}} X\ \exists^{\mathrm{st}} Y\ \forall^{\mathrm{st}} x\ (x \in Y \iff x \in X \wedge \Phi(x))$ для всех st-$\in$-формул $\Phi(x)$ с любыми параметрами.

Кванторы $\exists^{\mathrm{st}} x$ и $\forall^{\mathrm{st}} x$ понимаются естественным образом: "существует стандартное x" и "для любого стандартного x"; квантор $\forall^{\mathrm{stfin}} A$ означает "для всех стандартных конечных множеств A".

2. Аксиома стандартного полного упорядочения. Рассмотрим расширение $\mathbf{IST}^+$ теории **IST**, полученное за счет:

i) присоединения бинарного предикатного символа $<$ к языку **IST** и аксиомы о том, что $<$ вполне упорядочивает класс $\mathbf{S}$ всех стандартных множеств, в частности, что каждое стандартное $X \neq \varnothing$ имеет $<$-наименьший стандартный элемент, к аксиомам **IST**;

ii) разрешения употреблять $<$ в формуле Φ в схеме стандартизации (но не в схемах переноса, идеализации, выделения, подстановки).

Взаимосвязь $\mathbf{IST}^+$ с **IST** не вполне ясна. С одной стороны, $\mathbf{IST}^+$ обеспечивается присоединением к **IST** любой "стандартной" теоретико-множественной аксиомы, гарантирующей определимое полное упорядочение универсума (например, аксиомы конструктивности по Гёделю), и выполняется в обычных моделях **IST** типа ультрапроизведений, а также гарантируется некоторыми "нестандартными" аксиомами в языке **IST** (см. ниже п. 8). С другой стороны, остается открытым вопрос о том, не выводится ли $\mathbf{IST}^+$ в **IST** [2, проблема 6].

Чтобы сформулировать главный результат нашей заметки, введем дополнительную терминологию. Допустим, что M – транзитивная $\in$-модель системы Цермело $\mathbf{Z}$. Скажем, что семейство множеств $P_1, \dots, P_n$ (где $P_i \subseteq M^{p_i}$, $i = 1, \dots, n$) *сохраняет выделение в* M, если схема выделения в языке $\mathscr{L}_{\in,P_1,\dots,P_n}$ верна в $\langle M; \in, P_1, \dots, P_n\rangle$. Фраза "*сохраняет подстановку в* M" имеет аналогичный смысл.

Заметим, что $\in$-формулы с параметрами из M могут рассматриваться как элементы M. Пусть $\mathrm{Truth}^M_\in$ есть множество всех замкнутых $\in$-формул с параметрами из M, истинных в $\langle M; \in\rangle$.

Теорема 1. *Пусть M – транзитивная $\in$-модель* **ZFC**. *Тогда существование полного упорядочения $<$ множества M такого, что пара множеств $\mathrm{Truth}^M_\in$ и $<$ сохраняет выделение в M, необходимо и достаточно для того, чтобы M вкладывалась как класс всех стандартных множеств в модель* $\mathbf{IST}^+$.

Следствие. *В условиях теоремы* 1 *существование указанного полного упорядочения достаточно для того, чтобы M вкладывалась как класс всех стандартных множеств в модель* **IST**.

Этот результат представляется намного лучше, чем полученный Нельсоном в [1] (где установлено, что для M достаточно быть моделью **ZFC** вида $M = V_\varkappa$, где $\varkappa$ – несчетный кардинал).

Ниже мы доказываем необходимость (п. 3) и достаточность (п. 4–6) в теореме 1. Одновременно с доказательством достаточности будут установлены некоторые метаматематические особенности теории $\mathbf{IST}^+$, в частности, что она разделяет с **IST** свойство *консервативности над* **ZFC**, упомянутое во введении.

3. Необходимость. Рассмотрим модель $\mathbf{I} = \langle \mathbf{I}; \varepsilon, \mathrm{st}, \lhd \rangle$ теории $\mathbf{IST}^+$. Допустим, что $M = \mathbf{S}$ (совокупность всех стандартных элементов $\mathbf{I}$) есть транзитивное множество и $\in \restriction M = \varepsilon \restriction M$. Тогда $\langle M; \in \rangle \models \mathbf{ZFC}$, так что нам остается найти полное упорядочение $\prec$ множества M такое, что множества $\mathrm{Truth}^M_\in$ и $\prec$ сохраняют выделение в M.

Напомним, что теоретико-множественный *ранг* $\mathrm{rk}\, x$ множества x равен наименьшему ординалу α такому, что x принадлежит α-му уровню V_α иерархии фон Неймана. Благодаря переносу для любого множества $x \in M = \mathbf{S}$ ранг $\mathrm{rk}\, x$, определенный в $\langle \mathbf{I}; \varepsilon \rangle$, совпадает с рангом $\mathrm{rk}\, x$, определенным в M, и, тем самым, с рангом $\mathrm{rk}\, x$ в смысле базового универсума **ZFC**.

Теперь мы полагаем $x \prec y$ для $x, y \in M$, когда либо $\mathrm{rk}\, x < \mathrm{rk}\, y$, либо $\mathrm{rk}\, x = \mathrm{rk}\, y$ и $x \lhd y$. Из сказанного выше следует, что отношение $\prec$ определимо в структуре $\langle \mathbf{I}; \varepsilon, \mathrm{st}, \lhd \rangle$.

С другой стороны, множество $\mathrm{Truth}^M_\in$ также определимо в структуре $\langle \mathbf{I}; \varepsilon, \mathrm{st} \rangle$ согласно следующему результату.

Лемма 1 [2]. *Существует формула $\tau(x)$ языка $\mathscr{L}_{\in,\mathrm{st}}$ такая, что для любой $\in$-формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ следующее высказывание является теоремой* **IST**:

$$\forall^{\mathrm{st}} x_1 \ \ldots\ \forall^{\mathrm{st}} x_n \ \big(\varphi^{\mathrm{st}}(x_1, \ldots, x_n) \iff \tau(\ulcorner \varphi(x_1, \ldots, x_n) \urcorner)\big).$$

Здесь $\ulcorner \psi \urcorner$ обозначает формулу ψ, рассматриваемую как конечная последовательность символов $\in$-языка и множеств, фигурирующих в ψ в качестве параметров.

Поскольку формула Φ в схеме стандартизации в $\mathbf{IST}^+$ может содержать $<$ (вместе с $\in$ и st), пара множеств $\mathrm{Truth}^M_\in$ и $\prec$ сохраняет выделение в M.

Остается проверить, что $\prec$ вполне упорядочивает M (с точки зрения универсума всех множеств). Заметим, что так как по построению всякий начальный сегмент M в смысле $\prec$ накрывается множеством из M, достаточно убедиться, что $\prec$ вполне упорядочивает в универсуме любое $X \in M$, а поскольку свойство "быть полным упорядочением" абсолютно для транзитивных моделей **ZFC**, остается проверить, что всякое непустое множество $Y \in M$ имеет $\prec$-наименьший элемент. Но это обеспечивается выбором $\lhd$ и определением $\prec$ из $\lhd$.

4. Достаточность: преобразование порядка. Зафиксируем транзитивное множество $M \models \mathbf{ZFC}$, вполне упорядоченное отношением $\lhd$ так, что пара множеств $\boldsymbol{T} = \mathrm{Truth}^M_\in$ и $\lhd$ сохраняет выделение в M. Как показывает рассуждение из п. 3, не ограничивая общности можно предполагать, что *всякий собственный начальный сегмент M в смысле $\lhd$ принадлежит M*.

Цель этого пункта – некоторое улучшение порядка $\lhd$. Именно, в сделанных предположениях доказывается

ТЕОРЕМА 2. *Найдется полное упорядочение $\prec$ множества M такое, что всякий начальный сегмент M в смысле $\prec$ принадлежит M и, кроме того, $\prec$ сохраняет подстановку в M, а пара, состоящая из $\prec$ и множества $\boldsymbol{T}' = \mathrm{Truth}^M_{\in,\prec}$ всех формул языка $\mathscr{L}_{\in,<}$ с параметрами из M, истинных в $\langle M; \in, \prec\rangle$, сохраняет выделение в M.*

Доказательство теоремы начнем с некоторых определений.

Через Σ обозначим множество всех структур вида $\sigma = \langle X; <\rangle$, где $X \in M$ – транзитивное множество вида $X = M_\alpha = V_\alpha \cap M$ для некоторого ординала $\alpha \in M$, а $<\in M$ – полное упорядочение X.

Структура $\sigma' = \langle X'; <'\rangle$ *продолжает* $\sigma = \langle X; <\rangle$, когда $X \subseteq X'$ и $<'$ есть концевое продолжение $<$ (т.е. $<$ совпадает с $<' \restriction X$, а X есть начальный сегмент X' в смысле $<'$).

Определим отношение $\sigma \operatorname{forc} \Phi(x_1, \dots, x_n)$, где $\sigma \in \Sigma$, Φ является $\mathscr{L}_{\in,<}$-формулой и $x_1, \dots, x_n \in X$, индукцией по сложности Φ:

1) если Φ – элементарная формула языка $\mathscr{L}_{\in,<}$, т.е. $x < y$, $x = y$ или $x \in y$, то $\sigma \operatorname{forc} \Phi$, когда Φ истинна в σ (здесь и далее запись $\sigma = \langle X; <\rangle \in \Sigma$ понимается как $\langle X; \in, <\rangle$);
2) $\sigma \operatorname{forc}(\Phi \wedge \Psi)$, когда $\sigma \operatorname{forc} \Phi$ и $\sigma \operatorname{forc} \Psi$;
3) $\sigma \operatorname{forc}(\neg\Phi)$, когда не существует ни одной структуры $\sigma' \in \Sigma$, продолжающей σ, такой, что $\sigma' \operatorname{forc} \Phi$;
4) $\sigma \operatorname{forc} \exists x\, \Phi(x)$, когда существует $x \in X$ такое, что $\sigma \operatorname{forc} \Phi(x)$.

Пусть Φ – формула языка $\mathscr{L}_{\in,<}$. Будем говорить, что структура $\sigma = \langle X; <\rangle \in \Sigma$ является Φ-*полной*, если для любой подформулы $\Psi(x_1, \dots, x_n)$ формулы Φ и любых параметров $x_1, \dots, x_n \in X$ имеем $\sigma \operatorname{forc} \Psi(x_1, \dots, x_n)$ или $\sigma \operatorname{forc} \neg\Psi(x_1, \dots, x_n)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если Φ – замкнутая формула языка $\mathscr{L}_{\in,<}$ с параметрами из X, а структура $\sigma = \langle X; <\rangle \in \Sigma$ Φ-полна, то $\sigma \operatorname{forc} \Phi$ и $\sigma \models \Phi$ равносильны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится индукцией по сложности Φ.

Нашей ближайшей целью является построение возрастающей последовательности структур $\sigma_\gamma = \langle X_\gamma; <_\gamma\rangle \in \Sigma$, $\gamma < \lambda$, такой, что $M = \bigcup_{\gamma<\lambda} X_\gamma$, а значит, отношение $< = \bigcup_{\gamma<\lambda} <_\gamma$ вполне упорядочивает M. Структуры σ_γ будут достаточно "полны" (в указанном выше смысле), чтобы обеспечить нужные свойства $<$.

Скажем, что структура $\sigma \in \Sigma$ *тотально полна*, если она является Φ-полной для любой формулы Φ языка $\mathscr{L}_{\in,<}$. Построение зависит от частоты тотально полных структур в Σ:

1) все $\sigma \in \Sigma$ продолжаются до тотально полных $\sigma' \in \Sigma$;
2) иначе.

В случае 1) построим последовательность структур $\sigma_\gamma = \langle X_\gamma; <_\gamma\rangle \in \Sigma$, где $\gamma < \lambda$, так, что $X_\delta = \bigcup_{\gamma<\delta} X_\gamma$, $<_\delta = \bigcup_{\gamma<\delta} <_\gamma$ для всех предельных ординалов $\delta < \lambda$ и $\sigma_{\gamma+1}$ является $\lhd$-наименьшей тотально полной структурой в Σ, которая собственно продолжает σ_γ. Здесь λ – наибольший ординал такой, что σ_γ определено (и принадлежит Σ, а значит и M) для всех $\gamma < \lambda$; понятно, что λ не больше наименьшего из ординалов, не принадлежащих M.

В случае 2) фиксируем рекурсивное перечисление $\{\Phi_n : n \in \omega\}$ всех формул языка $\mathscr{L}_{\in,<}$. Структура $\sigma \in \Sigma$ будет называться n-*полной*, когда она Φ_k-полна для любого $k \leqslant n$. В этом случае полагаем $\lambda = \omega$, произвольно выбираем структуру $\sigma_0 \in \Sigma$, не продолжаемую до тотально полной структуры, и определяем последовательность структур $\sigma_n = \langle X_n; <_n \rangle \in \Sigma$ так, что для любого $n \in \omega$ σ_{n+1} есть $\lhd$-наименьшая n-полная структура в Σ, собственно продолжающая σ_n.

В каждом из рассмотренных случаев $\langle \sigma_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ – последовательность элементов M, определимая в $\langle M; \in, \lhd, \boldsymbol{T} \rangle$ по построению (напомним, что $\boldsymbol{T} = \mathrm{Truth}^M_\in$).

Лемма 2. *Ординал λ предельный и $\bigcup_{\gamma<\lambda} X_\gamma = M$.*

Доказательство. Напомним, что $\lambda = \omega$ в случае 2). Если $\lambda = \gamma + 1$ в случае 1), то мы могли бы определить σ_λ. Итак, λ – предельный ординал, а отношение $\prec = \bigcup_{\gamma<\lambda} <_\gamma$ вполне упорядочивает X.

Предположим, что $X = \bigcup_{\gamma<\lambda} X_\gamma \neq M$. Тогда $X \in M$, поскольку все множества X_γ имеют вид $M_\alpha = V_\alpha \cap M$. Следовательно, $\prec$ принадлежит M, так как $\lhd$ и $\boldsymbol{T}$ сохраняют выделение в M. Поэтому $\sigma = \langle X; \prec \rangle \in \Sigma$. Более того, σ тотально полна (как предел возрастающей последовательности тотально полных структур в случае 1) и по аналогичной причине в случае 2)). Это сразу противоречит выбору σ_0 в случае 2), а в случае 1) добавляет еще один член к последовательности, что противоречит выбору λ.

Доказательство теоремы 2. Итак, $\prec = \bigcup_{\gamma<\lambda} <_\gamma$ – полное упорядочение M. Проверим, что пара множеств $\prec$ и $\boldsymbol{T}' = \mathrm{Truth}^M_{\in,\prec}$ сохраняет выделение в M. Достаточно убедиться, что $\prec$ и $\boldsymbol{T}'$ определимы в структуре $\langle M; \in, \lhd, \boldsymbol{T} \rangle$, где $\boldsymbol{T} = \mathrm{Truth}^M_\in$.

То, что порядок $\prec$ определим в $\langle M; \in, \lhd, \boldsymbol{T} \rangle$, очевидно следует из построения. Займемся множеством $\boldsymbol{T}'$.

Рассмотрим замкнутую формулу $\Phi(p_1, \dots, p_k)$ языка $\mathscr{L}_{\in,<}$ с параметрами $p_1, \dots, p_k \in M$. Пусть n – номер формулы $\Phi(x_1, \dots, x_k)$ (см. случай 2) выше). Рассмотрим наименьший ординал $\gamma < \lambda$ такой, что $p_1, \dots, p_k \in X_\gamma$ и в случае 2) $\gamma \geqslant n$. Нетрудно с помощью предложения 1 проверить, что σ_γ – элементарная подструктура $\langle M; \in, \prec \rangle$ по отношению к формуле Φ; в частности, $\Phi(p_1, \dots, p_k)$ либо одновременно истинна, либо одновременно ложна в σ_γ и $\langle M; \in, \prec \rangle$. Однако, последовательность структур σ_γ определима в $\langle M; \in, \lhd, \boldsymbol{T} \rangle$.

Этот же аргумент (т.е. наличие элементарных подструктур модели $\langle M; \in, \prec \rangle$ вида σ_γ) показывает, что отношение $\prec$ сохраняет подстановку в M. Теорема 2 доказана.

5. Ультрафильтр. Продолжая доказательство достаточности в теореме 1, зафиксируем для дальнейшего полный порядок $\prec$ на множестве M, задаваемый теоремой 2. В частности, предполагается, что

1) все собственные начальные сегменты M в смысле $\prec$ принадлежат M;
2) пара множеств $\prec$ и $\boldsymbol{T}' = \mathrm{Truth}^M_{\in,\prec}$ сохраняет выделение в M;

однако, с целью сделать рассуждение пригодным для метаматематического анализа теории $\mathbf{IST}^+$ в п. 7 мы не будем до определенного момента, предполагать, что $\langle M; \in \rangle$ удовлетворяет подстановке.

Нам необходимо построить модель $\mathbf{I} \models \mathbf{IST}^+$ с M в качестве класса всех стандартных множеств. Эта модель будет получена, как *адекватное ультрапроизведение* M по Нельсону [1] (в модификации [2]). Займемся выбором подходящего ультрафильтра.

Через $\mathrm{Def}^M_{\in,\prec}$ обозначим семейство всех множеств $X \subseteq M$, определимых в $\langle M; \in, \prec \rangle$ формулой языка $\mathscr{L}_{\in,<}$ с параметрами из M. Положим $I = \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(M) = \{i \subseteq M : i \text{ конечно}\}$ (собственный класс в M) и рассмотрим алгебру $\mathscr{A}$ всех множеств $X \subseteq I$, $X \in \mathrm{Def}^M_{\in,\prec}$.

Лемма 3. *Существует ультрафильтр* $U \subseteq \mathscr{A}$ *такой, что*

а) *если* $a \in M$, *то множество* $\{i \in I : a \in i\}$ *принадлежит* U;

б) *если* $P \subseteq M \times I$, $P \in \mathrm{Def}^M_{\in,\prec}$, *то множество*

$$\{x \in M : \textit{сечение } P_x = \{i : \langle x, i\rangle \in P\} \textit{ принадлежит } U\}$$

принадлежит $\mathrm{Def}^M_{\in,\prec}$;

в) *существует определимое в* $\langle M; \in, \prec, \boldsymbol{T}\rangle'$ *множество* $\mathscr{U} \subseteq M$ *такое, что* $U = \{\mathscr{U}_x : x \in M\}$, *где* $\mathscr{U}_x = \{i \in I : \langle x, i\rangle \in \mathscr{U}\}$ *для всех* x.

Доказательство. Семейство U_0, состоящее из всех множеств вида

$$I_{a_1\ldots a_m} = \{i \in I : a_1, \ldots, a_m \in i\},$$

где $a_1, \ldots, a_m \in M$, очевидно, удовлетворяет FIP (*finite intersection property*), т.е. все пересечения конечного числа множеств из U_0 непусты.

Допустим, что уже определено FIP-семейство $U_n \subseteq \mathscr{A}$; через $\chi_n(x, i)$ обозначим n-ю формулу в заранее фиксированном рекурсивном перечислении всех формул $\mathscr{L}_{\in,<}$ с двумя свободными переменными. Положим $U_{n+1} = U_n \cup \{B_x : x \in M\}$, где B_x есть множество

$$A_x = \{i \in I : \langle M; \in, \prec\rangle \models \chi_n(x, i)\},$$

если семейство $U_n \cup \{B_y : y \prec x\} \cup A_x$ все еще удовлетворяет FIP, и $B_x = I \setminus A_x$ в противном случае.

Легко видеть, что $U = \bigcup_n U_n$ – искомый ультрафильтр; условие в) обеспечивается проведением всей конструкции в $\langle M; \in, \prec, \boldsymbol{T}'\rangle$.

Зафиксируем для дальнейшего такой ультрафильтр $U \subseteq \mathscr{A}$.

Фразу "множество $\{i \in I : \Phi(i)\}$ принадлежит U" будем записывать в виде $\mathsf{U}i\ \Phi(i)$ (квантор U означает "существует U-много"). Тогда согласно выбору U имеем

а) $\mathsf{U}i\ (a \in i)$ для всех $a \in M$;

б) каково бы ни было отношение $P(i, \ldots)$ в $\mathrm{Def}^M_{\in,\prec}$, отношение $\mathsf{U}i\ P(i, \ldots)$ также принадлежит $\mathrm{Def}^M_{\in,\prec}$.

6. Модель. Для $r \geqslant 1$ определим $I^r = I \times \cdots \times I$ (r раз I) и

$$F_r = \{f \in \mathrm{Def}^M_{\in,\prec} : f \text{ отображает } I^r \text{ в } M\};$$

положим $I^0 = \{0\}$ и $F_0 = \{\{\langle 0, x\rangle\} : x \in M\}$. Наконец, пусть $F_\infty = \bigcup_{r\in\omega} F_r$. Для $f \in F_\infty$ через $r(f)$ будем обозначать то единственное r, для которого $f \in F_r$.

Допустим, что $f \in F_\infty$, $q \geqslant r = r(f)$ и $\boldsymbol{i} = \langle i_1, \ldots, i_r, \ldots, i_q\rangle \in I^q$. В этом случае положим $f[\boldsymbol{i}] = f(\langle i_1, \ldots, i_r\rangle)$. В частности, $f[\boldsymbol{i}] = f(\boldsymbol{i})$ при $r = q$. Кроме того, $f[\boldsymbol{i}] = x$ для всех $\boldsymbol{i}$, если $f = \{\langle 0, x\rangle\} \in F_0$.

Пусть $f, g \in F_\infty$ и $r = \max\{r(f), r(g)\}$. Определим $f \mathrel{{}^*{=}} g$, если

$$\mathsf{U}i_r\ \mathsf{U}i_{r-1}\ \ldots\ \mathsf{U}i_1\ (f[\boldsymbol{i}] = g[\boldsymbol{i}]) \tag{1}$$

(где $\boldsymbol{i} = \langle i_1, \ldots, i_r\rangle$, порядок кванторов в формуле (1) является существенным), и $f \mathrel{{}^*{\in}} g$, $f \mathrel{{}^*{\prec}} g$ аналогично. Легко проверяется следующее утверждение.

Предложение 2. *Отношение* $^*\!=$ *есть эквивалентность на* F_∞. *Отношения* $^*\!\in$ *и* $^*\!\prec$ *на* F_∞ $^*\!=$*-инвариантны по каждому аргументу.*

Пусть $[f] = \{g \in F_\infty : f \;^*\!= g\}$. Рассмотрим фактормножество $\mathbf{I} = \{[f] : f \in F_\infty\}$. Для $[f], [g] \in \mathbf{I}$ определим $[f] \;^*\!\in [g]$, если $f \;^*\!\in g$, и $[f] \;^*\!\prec [g]$ аналогично. Для $x \in M$ положим $^*x = [\{\langle 0, x\rangle\}]$ – образ x в $\mathbf{I}$. Пусть $\mathbf{S} = \{^*x : x \in M\}$.

Наконец, определим $\mathrm{st}[f]$ в случае $[f] = {}^*x$ для некоторого $x \in M$.

Теорема 3. *Отображение* $x \mapsto {}^*x$ *есть* 1-1*-функция из* M *на* $\mathbf{S}$, *переводящая* $\in$ *и* $\prec$ *в* $^*\!\in$ *и* $^*\!\prec$ *соответственно, а элементарное вложение* $\langle M; \in, \prec\rangle$ *в* $\langle \mathbf{I}; {}^*\!\in, {}^*\!\prec\rangle$. *Кроме того,* $\langle \mathbf{I}; {}^*\!\in, {}^*\!\prec, \mathrm{st}\rangle$ *удовлетворяет идеализации и стандартизации, причем формула* Φ *в каждой из схем может включать предикат* $^*\!\prec$ *вместе с* $^*\!\in$.

Эта теорема влечет достаточность в теореме 1. В самом деле, допустим, что в дополнение к предположениям в начале п. 4 M – модель $\mathbf{ZFC}$. Тогда из теоремы 3 следует, что $\langle \mathbf{I}; {}^*\!\in, \mathrm{st}\rangle$ – модель $\mathbf{IST}$, а вместе с ограничением $^*\!\prec \restriction \mathbf{S}$ порядка $^*\!\prec$ – даже модель $\mathbf{IST}^+$, класс $\mathbf{S}$ стандартных множеств которой изоморфен M.

Доказательство теоремы 3 начнем с определений.

Пусть $\Phi(f_1, \ldots, f_m)$ – формула языка $\mathscr{L}_{\in,<}$ с функциями $f_1, \ldots, f_m \in F$ в качестве параметров. Положим $r(\Phi) = \max\{r(f_1), \ldots, r(f_m)\}$. Если $r \leqslant q$ и $\boldsymbol{i} \in I^q$, то через $\Phi[\boldsymbol{i}]$ обозначим формулу $\Phi(f_1[\boldsymbol{i}], \ldots, f_m[\boldsymbol{i}])$ (языка $\mathscr{L}_{\in,<}$ с параметрами из M), а через $[\Phi]$ формулу $\Phi([f_1], \ldots, [f_m])$ (с параметрами из $\mathbf{I}$).

Предложение 3 (теорема Лося). *Для любой формулы* $\Phi = \Phi(f_1, \ldots, f_m)$ *языка* $\mathscr{L}_{\in,<}$ *с параметрами* $f_1, \ldots, f_m \in F$ *и условием* $r = r(\Phi)$ *выполнено*

$$\langle \mathbf{I}; {}^*\!\in, {}^*\!\prec\rangle \models [\Phi] \iff \mathsf{U} i_r \; \mathsf{U} i_{r-1} \; \ldots \; \mathsf{U} i_1 \; (\langle M; \in, \prec\rangle \models \Phi[\boldsymbol{i}])$$

($\boldsymbol{i}$ *обозначает* $\langle i_1, \ldots, i_r\rangle$ *в выделенной строке*).

Доказательство. Нетривиальность состоит в том, что так как индексное множество I является собственным классом в M, полное упорядочение M необходимо для корректности обычного рассуждения по индукции в теореме Лося. Вот почему нам необходим базовый язык $\mathscr{L}_{\in,<}$, а не просто $\in$-язык, и соответственно необходима модель $\langle M; \in, \prec\rangle$, а не просто $\langle M; \in\rangle$, в качестве начальной структуры.

Доказательство теоремы 3. В сущности, нам остается выполнить проверку идеализации и стандартизации в $\langle \mathbf{I}; {}^*\!\in, {}^*\!\prec, \mathrm{st}\rangle$.

Идеализация. Рассмотрим $\mathscr{L}_{\in,<}$-формулу $\Phi(a, x)$ с двумя свободными переменными a, x и функциями из F в качестве параметров. Необходимо доказать, что

$$\forall^{\mathrm{stfin}} A \; \exists x \; \forall a \in A \; [\Phi](a, x) \implies \exists x \;\; \forall^{\mathrm{st}} a \;\; [\Phi](a, x) \tag{2}$$

в $\mathbf{I}$ (известно [1], что импликация "$\Longleftarrow$" в (2) вытекает из других аксиом $\mathbf{IST}$). Согласно предложению 3 левая часть (2) влечет

$$\forall_{\mathrm{finite}} A \subseteq M \; \mathsf{U} i_r \; \mathsf{U} i_{r_1} \; \ldots \; \mathsf{U} i_1 \; \exists x \; \forall a \in A \; \Phi[\langle i_1, \ldots, i_r\rangle](a, x)$$

в M, где $r = r(\Phi)$. Чтобы упростить эту формулу, заметим, что самый левый квантор имеет I в качестве своей области. Следовательно, определив функцию $\alpha \in F_{r+1}$ соотношением $\alpha(i_1, \ldots, i_r, i) = i$, получаем

$$\forall i \in I \; \mathsf{U} i_r \; \mathsf{U} i_{r_1} \; \ldots \; \mathsf{U} i_1 \; (\exists x \; \forall a \in \alpha \; \Phi)[\langle i_1, \ldots, i_r, i\rangle](a, x),$$

откуда следует $\exists x\ \forall a \in [\alpha]\ [\Phi](a,x)$ в $\mathbf{I}$ по предложению 3. Теперь по определению предиката st достаточно проверить, что ${}^*x\ {}^*\!\in [\alpha]$ в $\mathbf{I}$ для любого $x \in M$, иными словами $\mathsf{U}i\ \mathsf{U}i_r\ \dots\ \mathsf{U}i_1\ (x \in i)$. Последнее выполнено согласно выбору U.

Стандартизация. Напомним, что U определимо в $\langle M; \in, \prec, \boldsymbol{T}'\rangle$ в смысле условия в) леммы 3. Поэтому модель $\langle \mathbf{I}; {}^*\!\in, \mathrm{st}\rangle$ также определима в $\langle M; \in, \prec, \boldsymbol{T}'\rangle$. Следовательно, остается проверить, что любое множество $y \subseteq x$, где $x \in M$, определимое в $\langle M; \in, \prec, \boldsymbol{T}'\rangle$ (разрешены параметры из M), принадлежит M. Но это следует из того, что пара множеств $\prec$ и $\boldsymbol{T}'$ сохраняет выделение в M.

7. Метаматематические свойства теории $\mathbf{IST}^+$. Покажем, что теории $\mathbf{IST}^+$ и $\mathbf{IST}$ относятся к $\mathbf{ZFC}$ достаточно одинаково, в частности, $\mathbf{IST}^+$ и $\mathbf{ZFC}$ равнонепротиворечивы.

Теорема 4. *Теория* $\mathbf{IST}^+$ *является консервативным расширением теории* $\mathbf{ZFC}$ *в том смысле, что любая замкнутая* $\in$*-формула выводима в* $\mathbf{IST}^+$ *в том и только том случае, когда она выводима в* $\mathbf{ZFC}$.

Доказательство. Допустим, что предложение φ $\in$-языка является теоремой $\mathbf{IST}^+$, и докажем, что φ выводится также и в $\mathbf{ZFC}$. Пусть Φ – тот конечный фрагмент $\mathbf{IST}^+$, который участвует в выводе φ. Следующее рассуждение является выводом φ в $\mathbf{ZFC}$.

Зафиксируем предельный ординал λ такой, что $M = V_\lambda$ удовлетворяет всем тем примерам подстановки, которые имеются в Φ, и дополнительно является элементарной подмоделью универсума относительно нашей формулы φ. Пусть $\prec$ – любое полное упорядочение M, обладающее тем свойством, что любой начальный сегмент M в смысле $\prec$ принадлежит M. В этом случае, поскольку M содержит все подмножества множеств из M, мы находимся в ситуации, описанной в начале п. 5. Значит, существуют структура $\langle \mathbf{I}; {}^*\!\in, {}^*\!\prec, \mathrm{st}\rangle$ и вложение $x \mapsto {}^*x$ из M в $\mathbf{I}$, удовлетворяющие теореме 3.

Тогда структура $\langle \mathbf{I}; {}^*\!\in, {}^*\!\prec \restriction \mathbf{S}, \mathrm{st}\rangle$ является моделью Φ, т.е. формула φ истинна в $\langle \mathbf{I}; {}^*\!\in\rangle$. Следовательно, φ истинна и в M, а значит, и в универсуме согласно выбору M.

8. О некоторых других расширениях IST. Метод расширения $\mathbf{IST}$, использованный нами для построения теории $\mathbf{IST}^+$, предоставляет средства, минимально достаточные для рассуждения, проведенного в п. 6. Однако, достаточность в теореме 1 распространяется и на некоторые более сильные и, пожалуй, более естественные усиления $\mathbf{IST}$. Остановимся на двух из них.

Определим $\mathbf{IST}'$ как расширение $\mathbf{IST}$ в языке $\mathscr{L}_{\in,\mathrm{st}}$ при помощи всего одной аксиомы:

> существуют множество D и отношение полного порядка $<$ на D такие, что $\mathbf{S} \subseteq D$ и $<$-наименьший элемент любого стандартного множества стандартен.

Понятно, что $\mathbf{IST}'$ влечет $\mathbf{IST}^+$, т.е. необходимость в теореме 1 сохраняет силу и для $\mathbf{IST}'$. Чтобы разобраться с достаточностью, рассмотрим еще одну теорию.

Напомним, что $\mathbf{ZF}\,\mathrm{GC}$ (или $\mathbf{ZF}$ плюс *Global Choice*) есть расширение $\mathbf{ZFC}$ в языке $\mathscr{L}_{\in,<}$ посредством аксиомы:

> отношение $<$ вполне упорядочивает класс всех множеств, и любой начальный сегмент в смысле $<$ есть множество.

При этом $<$ может участвовать в схемах выделения и подстановки. Обозначим через $\mathbf{IST}\,\mathrm{GC}$ теорию, которую можно назвать $\mathbf{IST}$-*расширением* $\mathbf{ZF}\,\mathrm{GC}$, т.е. теорию в языке $\mathscr{L}_{\in,<,\mathrm{st}}$, включающую **ZF** GC (в языке $\mathscr{L}_{\in,<}$) и схемы идеализации, стандартизации, переноса, в каждой из которых Φ может быть формулой $\mathscr{L}_{\in,<}$ (ср. с определением **IST** в п. 1).

С одной стороны, **IST** GC влечет $\mathbf{IST}'$, а значит, и $\mathbf{IST}^+$. С другой стороны, очевидная модификация рассуждения п. 6 показывает, что если в рассмотренной там ситуации дополнительно известно, что $\langle M; \in, \prec\rangle$ – модель **ZF** GC, т.е. что $\prec$ сохраняет подстановку в M, то $\langle \mathbf{I}; {}^*{\in}, {}^*{\prec}, \mathrm{st}\rangle$ является моделью **IST** GC. Отсюда следует, что достаточность в теореме 1 распространяется на теорию **IST** GC, а следовательно, и на $\mathbf{IST}'$.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Nelson E. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. P. 1165–1198.
[2] Кановей В. Г. Неразрешимые гипотезы в теории внутренних множеств Эдварда Нельсона // УМН. 1991. Т. 46. №6. С. 3–50.
[3] Hrbaček K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math. 1978. V. 98. P. 1–19.
[4] Kanovei V., Reeken M. Internal approach to external sets and universes. 1 // Studia Logica. 1995. V. 55. №2. P. 227–235.
[5] Kanovei V., Reeken M. Mathematics in a nonstandard world // Math. Japon. 1997. V. 45. №2. P. 369–408; №3. P. 555–571.
[6] Kawaï T. Nonstandard analysis by axiomatic methods // Southeast Asia Conference on Logic (Singapore 1981). Stud. Logic Found. Math. V. 111. Amsterdam: North-Holland, 1983. P. 55–76.
[7] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
University of Wuppertal (Wuppertal, Germany)
E-mail: `kanovei@mech.math.msu.su`

Поступило
16.07.98