Математические заметки

том 70 выпуск 1 июль 2001

УДК 510.223

НЕСТАНДАРТНАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ В $\in$-ЯЗЫКЕ

В. Г. Кановей

Предлагается достаточно удобная и пригодная для развития нестандартного анализа теория множеств в стандартном $\in$-языке.

Библиография: 5 названий.

Нестандартные теории множеств составляют одну из двух известных систем оснований нестандартного анализа. (Вторая состоит в использовании нестандартных расширений математических структур в "стандартном" универсуме **ZFC**.) Типичная нестандартная теория множеств (например, теория внутренних множеств **IST** Нельсона [1], см. также [2]–[5]) организует универсум множеств таким образом, что объекты обычной математики, называемые *стандартными*, сосуществуют и взаимодействуют с *нестандартными* объектами (например, бесконечно малыми числами). При этом класс $\mathbb{S}$ всех стандартных множеств выделяется при помощи неопределяемого *предиката стандартности* $\operatorname{st} x$ (читается: x стандартно). Иными словами, такие нестандартные теории множеств формулируются в st-$\in$-*языке*, содержащем st и $\in$ в качестве атомарных предикатов.

В настоящей заметке мы предлагаем теорию множеств в $\in$-*языке*, достаточно сильную для формализации нестандартного анализа. Она названа *упрощенной теорией Хрбачека*, или **SHST**. Говоря кратко, **SHST** – это теория $\in$-структуры универсума **HST**, в котором верны аксиомы **HST** (нестандартной теории множеств Хрбачека, использующей st в языке, см. ниже). Теория **SHST** доказывает существование насыщенных элементарных расширений. Другим свойством **SHST** является существование (булевозначной) интерпретации в **ZFC** такой, что класс всех стандартных множеств интерпретации изоморфен универсуму **ZFC**. В частности, **SHST** и **ZFC** равнонепротиворечивы, и любая теорема **SHST** о стандартных множествах является теоремой **ZFC** (о всех множествах).

Главной идеей, на которой основано построение аксиоматической системы **SHST**, является то, что класс $\mathbb{S}$ (сам по себе вряд ли $\in$-определимый в **HST**) имеет $\in$-определимую изоморфную копию: класс $\mathbb{V}$ всех фундированных множеств (наблюдение Каваи [4]). Это позволяет заменить $\mathbb{S}$ как "стандартный" универсум на $\mathbb{V}$ и использовать очевидную $\in$-определимость $\mathbb{V}$. Класс $\mathbb{I}$ *внутренних* множеств (элементарное расширение $\mathbb{S}$) также допускает $\in$-определение.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 98-01-00045, фонда DFG, грант № 436-RUS-17/66/97, а также Университета г. Вупперталь.

1. Теория Хрбачека. Эта теория была введена Хрбачеком [2]. Улучшенная версия представлена в деталях в [3], однако для удобства мы включаем список аксиом **HST** с краткими комментариями. Напомним, что **HST** – теория в st-$\in$-языке; $\mathrm{st}\,x$ означает: x стандартно, а $\mathbb{S} = \{x : \mathrm{st}\,x\}$ обозначает класс всех стандартных множеств. Элементы стандартных множеств называются *внутренними* множествами, $\mathrm{int}\,x$ есть формула $\exists^{\mathrm{st}} y\, (x \in y)$ (x внутреннее), а $\mathbb{I} = \{x : \mathrm{int}\,x\}$ – класс всех внутренних множеств. Кванторы $\exists^{\mathrm{st}}$ и $\forall^{\mathrm{int}}$ ниже имеют очевидный смысл: "существует стандартное" и "для всякого внутреннего".

Аксиомы для универсума – все аксиомы **ZFC**, *кроме* аксиом регулярности, степени и выбора. Схемы выделения и подстановки формулируются в st-$\in$-языке.

Транзитивность $\mathbb{I}$. $\forall^{\mathrm{int}} x\, \forall y \in x\, (\mathrm{int}\, y)$.

Регулярность над $\mathbb{I}$. $\forall X \neq \varnothing\, \exists x \in X\, (x \cap X \subseteq \mathbb{I})$.

ZFC$^{\mathrm{st}}$. Все формулы вида Φ^{st} (Φ релятивизованная к $\mathbb{S}$), где Φ – аксиома **ZFC**.

Перенос. Все предложения вида $\Phi^{\mathrm{st}} \iff \Phi^{\mathrm{int}}$, где Φ – замкнутая $\in$-формула со стандартными параметрами.

Стандартизация. $\forall X\, \exists^{\mathrm{st}} Y\, (X \cap \mathbb{S} = Y \cap \mathbb{S})$ (ко всякому X найдется стандартное Y, содержащее те же самые стандартные элементы).

Этих аксиом достаточно, чтобы определить класс $\mathbb{V}$ всех фундированных множеств (т.е. элементов транзитивных множеств X таких, что $\in \restriction X$ фундировано) и $\in$-изоморфизм $x \mapsto {}^*x$: $\mathbb{V}$ на $\mathbb{S}$ (${}^*x$ определяется как единственное стандартное множество u, содержащее все множества вида ${}^*y$, $y \in x$, и больше никаких стандартных элементов). Следовательно, $\mathbb{V}$ – транзитивный класс, интерпретирующий **ZFC** и замкнутый относительно взятия подмножеств. Более того, $x \mapsto {}^*x$ – элементарное вложение (в $\in$-языке) $\mathbb{V}$ в $\mathbb{I}$ по переносу (см. [3, раздел 1]).

В **HST** *кардиналы, ординалы, натуральпные числа* являются $\mathbb{V}$-понятиями, так что натуральное число понимается как множество $n \in \mathbb{V}$, которое является натуральным числом в $\mathbb{V}$ (кратко, $\mathbb{V}$-натуральным числом). Через ω обозначается множество всех натуральных чисел.

Множества, равномощные $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$, где $n \in \omega$, называются *конечными*. Множества, равномощные некоторому $x \in \mathbb{V}$, называются *множествами стандартного размера* или, кратко, СР-*множествами*.

Сформулируем две последние существенные аксиомы **HST**.

Насыщенность $\mathbb{I}$. Если $\mathscr{X} \subseteq \mathbb{I}$ – СР-множество и $\bigcap \mathscr{X}' \neq \varnothing$ для любого *конечного* $\mathscr{X}' \subseteq \mathscr{X}$ (свойство конечных пересечений), то $\bigcap \mathscr{X}' \neq \varnothing$.

СР-выбор. Справедлива аксиома выбора для случая, когда функция выбора должна быть определена на СР-семействе (непустых) множеств.

Насыщенность позволяет получать разнообразные нестандартные множества. Аксиома СР-выбора частично компенсирует отсутствие полной аксиомы выбора, которая, как и аксиомы степени и регулярности, противоречит **HST**.

Теорема 1 (см. [3]). *Теории* **HST** *и* **ZFC** *равнонепротиворечивы. Более того,* **HST** *имеет булевозначную интерпретацию в* **ZFC**, *класс* $\mathbb{S}$ *которой доказуемо* $\in$-*изоморфен базовому универсуму* **ZFC**. *Следовательно, если* **HST** *доказывает,* *что замкнутая $\in$-формула Φ истинна в $\mathbb{V}$ (или, что равносильно, в $\mathbb{S}$), то Φ – теорема* **ZFC**.

Неожиданно оказывается, что класс $\mathbb{I}$ прямо $\in$-определим в **HST**. Скажем, что множество x *квази-внутреннее*, когда существует ω-последовательность $\{x_n\}_{n\in\omega}$ такая, что $x \in x_{n+1} \in x_n$ для всех $n \in \omega$.

Предложение 1 (**HST**). *Классы внутренних и квази-внутренних множеств совпадают.*

Доказательство [3]. Пусть $x \in \mathbb{I}$. Рассуждая в универсуме $\mathbb{I}$, определим индукцией по $k \in {}^*\omega$ $y_k = y_{k-1} \cup \{y_{k-1}\}$, начиная с $y_0 = x$. Выберем произвольно $\nu \in {}^*\omega \setminus \omega$ и положим $x_n = y_{\nu-n}$ для всех $n \in \omega$.

Обратная импликация легко следует из регулярности над $\mathbb{I}$.

2. Упрощенная теория Хрбачека. Теория **SHST** включает следующие группы аксиом (i)–(iv).

(i) Подобно **HST** все аксиомы **ZFC**, кроме аксиом регулярности, степени и выбора. (Выделение и подстановка в st-$\in$-языке.)

Этого достаточно, чтобы ввести класс $\mathbb{V}$ всех фундированных множеств и доказать его транзитивность.

(ii) Все формулы вида Φ^{wf} (Φ релятивизованная к $\mathbb{V} = \{x : \mathrm{wf}\, x\}$), где Φ – аксиома **ZFC**, а wf x говорит: “x фундировано”.

Далее, пусть ${}^q\mathbb{I}$ обозначает в $\in$-языке *класс всех квази-внутренних множеств* (см. выше). Мы добавляем

(iii) аксиомы транзитивности класса ${}^q\mathbb{I}$, регулярности над ${}^q\mathbb{I}$, насыщенности ${}^q\mathbb{I}$ и CP-выбора – как в теории **HST**, но для ${}^q\mathbb{I}$.

Что касается переноса, то непосредственно взять его формулировку из **HST** нельзя: **SHST** не обеспечивает никакого подходящего вложения $\mathbb{V}$ в ${}^q\mathbb{I}$. Однако, следующая формулировка достаточно приемлема.

(iv) Упрощенный перенос. Все формулы вида $\Phi^{\mathrm{wf}} \iff \Phi^{q\text{-int}}$, где Φ – замкнутая $\in$-формула с параметрами из ω. (Вряд ли можно вовлечь больше параметров – дело в том, что $\mathbb{V} \cap \mathbb{I} = H\omega$ (наследственно конечные множества) в **HST**, но параметры из $H\omega$ сводятся к ω.)

(Здесь ${}^{q\text{-int}}$ означает релятивизацию к ${}^q\mathbb{I}$.) Эта аксиома нуждается в комментарии, так как сразу неясно, что $\omega \subseteq {}^q\mathbb{I}$. Сценарий состоит в том, что сначала упрощенный перенос принимается в беспараметрической версии, откуда легко следует, что ${}^q\mathbb{I}$ – транзитивная $\in$-модель **ZFC**, значит, $\omega \subseteq {}^q\mathbb{I}$. Теперь принимаем упрощенный перенос полностью.

Заметим, что **SHST** – подтеория $\in$-части **HST**. (Чтобы доказать упрощенный перенос в **HST**, мы проверяем в **HST**, что ${}^*x = x$ для всех $x \in \omega$ индукцией по x; тогда $\Phi^{\mathrm{wf}} \iff \Phi^{\mathrm{int}}$, ибо $x \mapsto {}^*x$ есть элементарное вложение $\mathbb{V}$ в $\mathbb{I}$.) Таким образом, **SHST** удовлетворяет теореме 1. Следующая лемма показывает, что **SHST** обеспечивает существование элементарных расширений.

Лемма 1 (**SHST**). *Для всякого транзитивного $X \in \mathbb{V}$ имеется транзитивное ${}^*X \in {}^q\mathbb{I}$ и элементарное вложение $\langle X;\in\rangle$ в $\langle {}^*X;\in\rangle$.*

Доказательство. Перенос и насыщенность **SHST** дают транзитивное множество ${}^*X \in {}^q\mathbb{I}$ такое, что структуры $\langle X; \in\rangle$ и $\langle {}^*X; \in\rangle$ элементарно эквивалентны. Построим элементарное вложение $\langle X; \in\rangle$ в $\langle {}^*X; \in\rangle$.

По выбору ${}^*X$ и насыщенности ${}^q\mathbb{I}$ если $n \in \omega$, то ко всякому кортежу $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in X^n$ имеется кортеж $\langle r_1, \dots, r_n\rangle \in {}^*X^n$ такой, что

(A) для любой $\in$-формулы (в этом доказательстве *формулы* понимаются как кортежи определенного вида) $A(\cdot, \dots, \cdot)$, $A(x_1, \dots, x_n)$ истинно в $\langle X; \in\rangle$ тогда и только тогда, когда $A(r_1, \dots, r_n)$ истинно в $\langle {}^*X; \in\rangle$.

Согласно аксиоме CP-выбора имеется взаимно-однозначное сохраняющее длину кортежей отображение $f\colon X^{<\omega} \to ({}^*X)^{<\omega}$ такое, что (A) выполнено для $\langle x'_1, \dots, x'_n\rangle = f(\langle x_1, \dots, x_n\rangle)$, каков бы ни был кортеж $\langle x_1, \dots, x_n\rangle \in X^{<\omega}$. Понятно, что $f(\langle x\rangle) = \langle \phi(x)\rangle$, где $\phi\colon X \to {}^*X$ есть взаимно-однозначная функция.

Если $D \subseteq X$ конечно, а F – конечное множество $\in$-формул, то пусть $\Pi_{DF} \in {}^q\mathbb{I}$ есть множество всех взаимно-однозначных отображений $\pi \in {}^q\mathbb{I}$, $\pi\colon {}^*X$ на ${}^*X$ таких, что для любой $\in$-формулы $A(v_1, \dots, v_n) \in F$ и всех $x_1, \dots, x_n \in D$ имеет место

(Б) в ${}^*X$ истинно, что $A(\pi(\phi(x_1)), \dots, \pi(\phi(x_n))) \iff A(r_1, \dots, r_n)$, где $\langle r_1, \dots, r_n\rangle = f(\langle x_1, \dots, x_n\rangle)$.

Заметим, что множества Π_{DF} непусты по выбору ${}^*X$ и f. (Например, если F содержит всего одну формулу A, просто возьмем биекцию $\pi\colon {}^*X$ на ${}^*X$ такую, что $\pi(\phi(x_i)) = r_i$ для всех i.) Кроме того, семейство всех множеств Π_{DF} имеет стандартный размер и свойство конечных пересечений. (В самом деле, $\Pi_{D_1F_1} \cap \Pi_{D_2F_2} \supseteq \Pi_{D_1\cup D_2, F_1\cup F_2}$.) Значит, существует взаимно-однозначное отображение $\pi \in {}^q\mathbb{I}$, $\pi\colon {}^*X \to {}^*X$, принадлежащее каждому из наших множеств Π_{DF}, так что (Б) выполнено для всех $x_1, \dots, x_n \in X^{<\omega}$ и всех $\in$-формул A. Отсюда легко следует, что $p(x) = \pi(\phi(x))$ – элементарное вложение $\langle X; \in\rangle$ в $\langle {}^*X; \in\rangle$.

3. Развитие нестандартного анализа в SHST. Неформальнo, класс $\mathbb{V}$ всех фундированных множеств отождествляется со “стандартным” математическим универсумом. Тогда, поскольку **SHST** удовлетворяет теореме 1 (как подтеория **HST**), универсум **SHST** можно рассматривать как вполне корректно определенное расширение “истинного” универсума $\mathbb{V}$ – подобно тому, как $\mathbb{C}$ есть расширение $\mathbb{R}$. Следовательно, **SHST** – не просто синтаксический инструмент: мы имеем полную интерпретацию в **ZFC**.

Как известно, множество $X = V_{\omega+\omega}$, определенное в $\mathbb{V}$, достаточно для построения почти всех математических структур в $\mathbb{V}$. В частности, множества $\mathbb{N} = \omega$ (натуральные числа) и $\mathbb{R}$ принадлежат $\mathbb{V}$.

Лемма 1 приносит транзитивное множество ${}^*X = {}^*V_{\omega+\omega} \in {}^q\mathbb{I}$ и элементарное вложение $x \mapsto {}^*x$ структуры $\langle V_{\omega+\omega}; \in\rangle$ в $\langle {}^*V_{\omega+\omega}; \in\rangle$. (Заметим, что ${}^*V_{\omega+\omega}$ есть ${}^q\mathbb{I}$-аналог $V_{\omega+\omega}$: фактически, ${}^*V_{\omega+\omega} = V_{{}^*\omega+{}^*\omega}$ в ${}^q\mathbb{I}$.) Легко видеть, что ${}^*n = n \in {}^*\mathbb{N}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ (например, индукцией по n), так что $\mathbb{N}$ – начальный сегмент ${}^*\mathbb{N}$. Более того, ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ непусто благодаря насыщенности, примененной к семейству множеств $S_n = \{k \in {}^*\mathbb{N} : k > n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Элементы ${}^*\mathbb{N}$ – это в точности ${}^q\mathbb{I}$-натуральные числа, которые можно назвать, как обычно, *гипернатуральными.* Числа в ${}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ называются *бесконечно большими.*

Что касается вещественных чисел (опять в смысле $\mathbb{V}$), мы имеем $\mathbb{R} \in V_{\omega+\omega}$ и $\mathbb{R} \subseteq V_{\omega+\omega}$ в $\mathbb{V}$, значит, ${}^*\mathbb{R} \in {}^*V_{\omega+\omega}$ в ${}^q\mathbb{I}$, а ${}^*x \in {}^*\mathbb{R}$ определено для всех $x \in \mathbb{R}$. Элементы ${}^*\mathbb{R}$, т.е.

${}^{q}\mathbb{I}$-вещественные числа, можно назвать *гипервещественными*. Теперь можно ввести обычным образом понятия *бесконечно больших*, *бесконечно малых*, *ограниченных* гипервещественных чисел и отношение $\approx$ *бесконечной близости*.

Лемма 2. *Если $x \in {}^*\mathbb{R}$ ограничено, то $x \approx {}^*z$ для некоторого $z \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Заметим, что множества $A = \{y \in \mathbb{R} : {}^*y \leqslant x\}$ и $B = \{y \in \mathbb{R} : {}^*y > x\}$ непусты благодаря ограниченности x. Эти множества принадлежат $\mathbb{V}$, поскольку этот класс замкнут относительно образования подмножеств. Рассуждая в $\mathbb{V}$, мы находим число z, являющееся либо наибольшим в A, либо наименьшим в B.

Это простое рассуждение демонстрирует возможности **SHST**. Что касается таких более сложных примеров, как мера Лёба и "гиперконечная" дескриптивная теория множеств, мы сошлемся на [3, 2.2 и 2.3], где показано, как проводить типичные "нестандартные" выкладки в рамках похожих систем.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Nelson E. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc. 1977. V. 83. P. 1165–1198.

[2] Hrbaček K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fund. Math. 1978. V. 98. P. 1–19.

[3] Kanovei V., Reeken M. Mathematics in a nonstandard world // Math. Japonica. 1997. V. 45. №2. P. 369–408; №3. P. 555–571.

[4] Kawaï T. Nonstandard analysis by axiomatic methods // Southeast Asia Conference on Logic (Singapore 1981). Studies in Logic and Foundations of Math. V. 111. Amsterdam: North-Holland, 1983. P. 55–76.

[5] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа. Новосибирск: Наука, 1990.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: `kanovei@mech.math.msu.su`

Поступило 16.09.1998