Математические заметки

том 74 выпуск 4 октябрь 2003

УДК 512.622

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ГИЛЬБЕРТА О БАЗИСЕ

К. Ю. Горбунов

Предлагается обобщение геометрической формы теоремы Гильберта о базисе, утверждающее, что для каждого хорошо описываемого (в некотором смысле) семейства многочленов существует такое число C, что для всюду плотного (в некотором смысле) подсемейства P этого семейства и любой точки a если первые C многочленов любой последовательности из P равны нулю в точке a, то и все ее многочлены равны нулю в a.

Библиография: 4 названия.

Геометрическая форма теоремы Гильберта о базисе утверждает, что последовательность вложенных алгебраических многообразий[1] стабилизируется. Иначе говоря, для любой последовательности S многочленов от переменных $x_1, \dots, x_k$ существует такое число C, что для любой точки пространства $a = \langle x_1^*, \dots, x_k^* \rangle$ если первые C многочленов в последовательности S равны нулю в точке a, то и все многочлены из S в этой точке равны нулю (в этом случае будем говорить, что число C *обслуживает* последовательность S). Эта форма является следствием обычной теоремы Гильберта о базисе, а если ограничиться радикальными идеалами (т.е. идеалами, замкнутыми относительно извлечения корней), то эквивалентна ей. Мы будем обобщать эту теорему в направлении, где утверждается существование одного C, обслуживающего целое семейство последовательностей многочленов. Конечно, чтобы обобщение было нетривиальным, семейство должно, во-первых, содержать многочлены сколь угодно большой степени, а во-вторых, не быть семейством многочленов от конечного числа выражений. Учитывая это, дадим следующее определение.

Определение. *Квазимногочленом* от переменных $x_1, x_2, \dots, x_k$ будем называть синтаксическое выражение – многочлен от $x_1, x_2, \dots, x_k$ и от выражений $F(x_1), F(x_2), \dots, F(x_k)$, а также от производных – выражений $F'(x_1), \dots, F'(x_k), \dots, F^{(i)}(x_1), \dots, F^{(i)}(x_k), \dots,$[2] например, $x_2 F(x_1) F'''(x_1) + x_3 F''(x_2) F''(x_2)$.

Пусть дана последовательность $S = q_1, q_2, \dots$ квазимногочленов. Если $p = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$ – многочлен и мы подставим в S всюду вместо $F(x_i)$, $i = 1, \dots, k$,

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 01-01-01028.

[1] Здесь и далее мы будем понимать под *алгебраическим многообразием* совместное множество нулей конечной системы многочленов в аффинном пространстве над полем действительных или комплексных чисел.

[2] Обычно *квазимногочленом* называют многочлен от переменных и их экспонент. Мы используем естественное обобщение этого понятия.

многочлен $p(x_i)$ (и соответствующие многочлены вместо производных), то получим последовательность многочленов $S(p) = q_1(p), q_2(p), \dots$. Конечно, мы не можем гарантировать существование одного числа c, которое обслуживает последовательность $S(p)$ при любом многочлене p. Действительно, если $S = F(x), F'(x), F''(x), \dots$, то для $p = x^n$ в точке $x = 0$ первые n членов S равны нулю, а $(n+1)$-й не равен. Однако следующая теорема утверждает, что существует одно число c, которое обслуживает $S(p)$ для всюду плотного (в некотором смысле) множества многочленов p. Точнее, скажем, что *для почти всех многочленов* выполнено некоторое свойство P, если для любого достаточно большого n и любых $p_0, \dots, p_n, \varepsilon$ существуют ε_1 и $\overline{p}_0, \dots, \overline{p}_n$, где $|\overline{p}_i - p_i| < \varepsilon$, такие, что для любых $\overline{p}_0^*, \dots, \overline{p}_n^*$, где $|\overline{p}_i^* - \overline{p}_i| < \varepsilon_1$, многочлен $\overline{p}_n^* x^n + \dots + \overline{p}_0^*$ удовлетворяет свойству P.

Теорема. *Для любой бесконечной последовательности S квазимногочленов от $x_1, x_2, \dots, x_k$ существует такое число c, что для почти всех многочленов p для любой точки $a = \langle x_1^*, \dots, x_k^* \rangle$ либо все многочлены в последовательности $S(p)$ в a равны нулю, либо некоторый многочлен из $S(p)$ с номером не больше c не равен нулю в точке a.*

Доказательство. Сначала докажем вспомогательную лемму, дающую для любого квазимногочлена q необходимое и достаточное условие того, что если многочлен $q(p)$ равен нулю в точке a, то можно сколь угодно мало сдвинуть (не зависящее от степени p) число коэффициентов многочлена p при младших степенях, чтобы для получившегося многочлена $\overline{p}$ многочлен $q(\overline{p})$ не равнялся 0 в точке a.

Лемма 1. *Пусть q – квазимногочлен от $x_1, \dots, x_k$. Тогда существует такое число m, что для любого многочлена $p = p_n x^n + \dots + p_0$ степени $n > m$ и любой точки $a = \langle x_1^*, \dots, x_k^* \rangle$ следующие два утверждения эквивалентны:*

1) *если многочлен $q(p)$ равен нулю в точке a, то для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие числа $\overline{p}_0, \dots, \overline{p}_m$, что $|\overline{p}_i - p_i| < \varepsilon$, $i = 0, \dots, m$, и многочлен $q(\overline{p})$, где $\overline{p} = p_n x^n + \dots + p_{m+1} x^{m+1} + \overline{p}_m x^m + \dots + \overline{p}_0$, не равен нулю в точке a;*

2) *если подставить в q значения $x_1^*, \dots, x_k^*$, то получится выражение – ненулевой полином от $F(x_i^*), F'(x_i^*), F''(x_i^*), \dots$.*

Доказательство. Импликация 1)$\Rightarrow$2) очевидна. Докажем импликацию 2)$\Rightarrow$1). Назовем *типом точки a* информацию о том, какие из ее координат x_i^* попарно равны. Очевидно, достаточно доказать лемму для точек одного произвольного типа. Отождествив в q выражения $F(x_i)$ и $F(x_j)$, если $x_i^* = x_j^*$, будем считать, что все x_i^* различны.

Возьмем $m \geqslant \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + 1)$, где α_i – максимальный порядок производной выражения $F(x_i)$, входящей в q. Зафиксируем значения $F^{(j)}(x_i^*) = \beta_{ij}$, $j = 0, \dots, \alpha_i$, так, чтобы значение q было ненулевым в точке a (по условию 2) это возможно). Из теории интерполяции с кратными узлами (см., например, [1, глава 3, § 6]) известно, что существует многочлен g степени не более m такой, что для всех i и j выполнено равенство $g^{(j)}(x_i^*) = \beta_{ij}$. Отсюда следует, что если в q подставить вместо F многочлен степени m с неопределенными коэффициентами, то получится ненулевой (в точке a) многочлен q_m от этих коэффициентов. Если же подставить вместо F многочлен любой степени $n > m$ с неопределенными коэффициентами, то полученный многочлен q_n будет иметь вид $q_m + \overline{q}$, причем в каждом члене $\overline{q}$ присутствует хотя бы один неопределенный коэффициент p_i, где $i > m$. Таким образом, и в этом случае многочлен q_n ненулевой. Теперь утверждение леммы следует из того геометрически очевидного факта, что ненулевой полином задает в пространстве алгебраическое многообразие меньшей, чем само пространство, размерности, и всегда можно сдвинуться из его корня на сколь угодно малое расстояние, чтобы сойти с этого многообразия (строгое рассуждение легко провести индукцией по числу переменных). Лемма 1 доказана.

Продемонстрируем на примере основную идею доказательства теоремы.

Пример. Пусть последовательность S начинается так: $yx^2, x^3+z, \dots$, и мы хотим упростить ее второй член, используя информацию о том, что первый член равен нулю. Тогда естественно рассмотреть два случая:

1) $y=0$ – в этом случае второй член упростить не удается, зато первый член можно заменить на y;
2) $y\neq 0$ – в этом случае второй член можно заменить на z.

Таким образом, вместо одной последовательности возникает две:

$$y=0,\ x^3+z=0,\ \dots \qquad \text{и} \qquad (yx^2=0\,\&\,y\neq 0),\ z=0,\ \dots .$$

Эти две последовательности естественно представлять в виде дерева с добавленным (пустым) корнем и двумя ветвями. Тогда перебор возможных случаев (как было выше) соответствует расщеплению одной вершины на несколько.

Перейдем к формальному изложению доказательства.

Напомним, что *типом* точки называется информация о том, какие из ее координат попарно равны. Пусть $t_1,\dots,t_d$ – все возможные типы. Для каждого типа t независимо проведем обработку последовательности S, состоящую в следующем. Отождествим равные переменные и соответствующие им выражения $F(x_i), F'(x_i), \dots$, заменив все переменные из класса равных переменных на переменную из этого класса с наименьшим индексом. Получим последовательность S_t.

Будем строить бесконечное (но с конечными степенями вершин) дерево T (представляем его "растущим" вверх), каждая вершина которого помечена конечным числом равенств типа $q=0$ и неравенств типа $q\neq 0$, где q – ненулевой квазимногочлен (разметка вершины может быть и пустой). Вначале в качестве T возьмем дерево T_t, в котором любая вершина имеет ровно одного "сына" и для каждого i i-я снизу вершина помечена приравненным к нулю i-м членом последовательности S_t. Путь (конечный или бесконечный), начинающийся в корне и идущий все время вверх, будем называть *корневым*. *Компонентами* разметки будем называть переменные $x_1,\dots,x_k$ и выражения $F(x_1),\dots,F(x_k)$, $F'(x_1),\dots,F'(x_k),\dots$.

В конце конструкции дерево T будет удовлетворять следующим четырем *основным свойствам*.

1. Если для некоторого конечного корневого пути γ_1 в T_t и некоторой точки a выполняются все равенства на пути γ_1, то в T существует корневой путь γ_2 той же длины, на котором удовлетворяется вся разметка (т.е. выполняются и равенства и неравенства) в точке a.
2. Если для некоторого конечного корневого пути γ в T и некоторой точки a удовлетворяется вся разметка на пути γ, то в точке a выполняются все равенства на корневом пути той же длины в T_t.
3. Разметка любой вершины в T либо пуста, либо содержит хотя бы одно равенство.
4. Для любой компоненты на любом бесконечном корневом пути в T есть лишь конечное число вершин, в разметке которых встречается эта компонента.

Упорядочим компоненты разметки так:

$$x_1, \ldots, x_k, \quad F(x_1), \ldots, F(x_k), \quad F'(x_1), \ldots, F'(x_k), \quad \ldots.$$

Каждую компоненту обрабатываем описанным далее образом. Перед началом обработки очередной компоненты кроме первых трех основных свойств выполнено следующее "промежуточное" свойство.

4*. На любом бесконечном корневом пути в дереве имеется лишь конечное число вершин, разметка которых содержит уже обработанные компоненты или неравенства.

Будем называть *активными* те вершины, в текущей разметке которых не встречается уже обработанных компонент, но встречается обрабатываемая компонента. Опишем ее обработку. Пусть, для примера, обрабатываемая компонента – $F(x_1)$. Будем рассматривать все левые части равенств как полиномы от одной переменной – компоненты $F(x_1)$ с коэффициентами – полиномами от остальных компонент (под *степенью полинома* понимаем максимальную входящую в него степень $F(x_1)$). Обрабатываем лишь активные вершины дерева, причем начинаем с нижних, так что перед обработкой очередной вершины v все активные вершины ниже нее уже обработаны, и в каждой из них все коэффициенты при степенях $F(x_1)$ в равенствах разметки являются левыми частями некоторых неравенств разметки.

Обрабатываем v следующим образом. Если степени всех полиномов, стоящих в левых частях равенств в разметке v, меньше, чем степени всех полиномов в разметке активных вершин на пути от v до корня, то расщепляем вершину v на конечное число вершин с тем же родителем. Каждая из них соответствует одному указанию на то, какие коэффициенты в многочленах из левых частей равенств разметки v равны нулю, а какие не равны (перебираются все случаи). В случае, когда коэффициент равен нулю, это равенство добавляется в разметку образуемой вершины, а из полинома вычеркивается соответствующий член, когда не равен – добавляем в разметку это неравенство. Так, если разметкой v является

$$F(x_2)F^2(x_1) + F(x_3)F(x_1) + 1 = 0,$$

то вместо v будет 8 вершин с разметками

1) $F(x_2) \neq 0, F(x_3) \neq 0, 1 \neq 0, F(x_2)F^2(x_1) + F(x_3)F(x_1) + 1 = 0;$
2) $F(x_2) = 0, F(x_3) \neq 0, 1 \neq 0, F(x_3)F(x_1) + 1 = 0;$
3) $F(x_2) \neq 0, F(x_3) = 0, 1 \neq 0, F(x_2)F^2(x_1) + 1 = 0;$
4) $F(x_2) \neq 0, F(x_3) \neq 0, 1 = 0, F(x_2)F^2(x_1) + F(x_3)F(x_1) = 0;$
5) $F(x_2) \neq 0, F(x_3) = 0, 1 = 0, F(x_2)F^2(x_1) = 0;$
6) $F(x_2) = 0, F(x_3) \neq 0, 1 = 0, F(x_3)F(x_1) = 0;$
7) $F(x_2) = 0, F(x_3) = 0, 1 \neq 0, 1 = 0;$
8) $F(x_2) = 0, F(x_3) = 0, 1 = 0.$

Выше каждой из этих вершин располагаем копию множества вершин, находившегося выше v. Описанная операция расщепления вершины сохраняет выполненность основного свойства 1 (поскольку рассматриваются все случаи), основного свойства 2 (поскольку из истинности разметки новой вершины следует истинность разметки старой) и основного свойства 3 (поскольку неравенство нулю некоторого коэффициента полинома оставляет этот полином ненулевым).

Теперь рассмотрим случай, когда в некоторой вершине u ниже v стоит равенство с полиномом p_u, а в вершине v – с полиномом p_v, причем n – степень v – не меньше m – (ненулевой) степени p_u (будем считать, что вершина u выбрана так, что m минимально). Для каждого такого p_v совершаем следующие действия. Домножим p_v на $(n-m+1)$-ю степень старшего коэффициента p_u, чтобы при делении "уголком" полученного полинома на p_u не возникали дроби. Выполнив это деление, получим равенство $p_m^{n-m+1}p_v = qp_u + r$, где p_m – старший коэффициент p_u, многочлен r – так называемый *псевдоостаток* (или модифицированный остаток), степень r строго меньше степени p_u (отметим, что понятие псевдоостатка использовалось китайским математиком Ву Вень Цунем для алгоритмического доказательства теорем евклидовой геометрии (см., например, [2, гл. 6, § 5]), а также Мучником для нового более простого доказательства теоремы Тарского об элиминации кванторов, см. [3, гл. 3, п. 8]). Например, если

$$p_v = F^2(x_3)F^3(x_1) - F(x_1), \qquad p_u = F^3(x_3)F(x_1) - 2,$$

то

$$\begin{aligned}(F^3(x_3))^3 p_v = {} & (F^8(x_3)F^2(x_1) + 2F^5(x_3)F(x_1) + 4F^2(x_3) - F^6(x_3))p_u \\ & + (8F^2(x_3) - 2F^6(x_3)).\end{aligned}$$

Поскольку в разметке вершины u стоит неравенство $p_m \neq 0$, имеем $p_v = 0$ тогда и только тогда, когда $r = 0$. Если r – ненулевой многочлен, то в разметке вершины v заменяем p_v на r, а если нулевой – убираем из этой разметки равенство $p_v = 0$. При этом сохраняется выполненность основных свойств 1 и 2 (очевидно) и основного свойства 3 (поскольку вершина v активна, а значит в ее разметке нет неравенств). Выполнив все возможные деления и замены делимых на остатки, мы свели ситуацию к уже рассмотренному случаю, после чего проводится описанное ранее расщепление вершины v.

Легко видеть, что после обработки компоненты (т.е. описанной обработки счетного множества вершин) остаются выполненными основные свойства 1, 2 и 3. Выполнено и "промежуточное" свойство 4*, поскольку вдоль корневого пути степени полиномов в равенствах разметки строго убывают, а любое неравенство стоит в разметке вершины лишь вместе с равенством, содержащим ту же компоненту.

При обработке счетного числа компонент вершины фиксированной высоты активны лишь конечное число раз. Поэтому можно говорить о предельном дереве T, в котором, очевидно, выполнены все 4 основных свойства. Из свойства 4 вытекает следующая лемма. Назовем *рангом* вершины v (обозначение: $\operatorname{rang}(v)$) минимальный порядок производных, встречающихся в разметке вершины v, а если в разметке присутствует хотя бы одна переменная x_i (не как аргумент F) или разметка пуста, то считаем ранг равным -1. Ранг множества вершин M определим как $\operatorname{rang}(M) = \min_{v\in M}\operatorname{rang}(v)$ (считаем, что $\operatorname{rang}(\varnothing) = \infty$). Вершину, из которой есть бесконечный путь вверх по вершинам с пустой разметкой, назовем *крайней* (сама она может иметь непустую разметку).

Лемма 2. *Для любых чисел r, h в предельном дереве T существует конечное подмножество вершин M со следующими свойствами*:

1) $\operatorname{rang}(M) > r$, *высота всех вершин из M больше h*;
2) *существует такое число h_1, что любой бесконечный корневой путь в T либо пересекает M ровно в одной вершине, либо проходит через крайнюю вершину, лежащую на высоте не больше h_1.*

Доказательство. Заметим, что существует такая высота $h_1 > h$, что любой бесконечный корневой путь на отрезке между высотами h и h_1 либо проходит через крайнюю вершину, либо через вершину ранга больше r. Действительно, иначе по свойству компактности (лемма Кёнига) существовал бы бесконечный корневой путь, который проходил бы через бесконечное число вершин ограниченного ранга с непустой разметкой, что противоречит основному свойству 4. Таким образом, множество M составляется так: для каждого корневого пути заносим в M первую из его вершин ранга больше r на высотах между h и h_1 (если она есть). Лемма 2 доказана.

Напомним, что для каждого типа точки мы получили свое обработанное дерево. Упорядочим эти деревья произвольным образом: $T_1, T_2, \dots, T_d$. В каждом из T_i построим $k+1$ конечных множеств вершин (будем называть эти множества *ярусами*) $M_i^1, M_i^2, \dots, M_i^{k+1}$ со следующими свойствами (введем линейный порядок: скажем, что M_i^j *ниже* M_s^l, если либо $i < s$, либо $i = s$ и $j < l$).

1. Для любого яруса M, во-первых, $\operatorname{rang}(M) > 0$, а во-вторых, если ниже есть непустые ярусы, то $\operatorname{rang}(M) > \operatorname{rang}(\overline{M}) + m$, где $\overline{M}$ – ближайший к M снизу непустой ярус, а m – максимальное из тех чисел m, которые по лемме 1 соответствуют многочленам из равенств разметки яруса $\overline{M}$ (присутствие там равенств следует из основного свойства 4).
2. Высоты всех вершин каждого яруса больше всех высот вершин предыдущих ярусов.
3. Существует такое число h, что в каждом T_i любой бесконечный корневой путь либо пересекает все ярусы $M_i^1, \dots, M_i^{k+1}$, причем каждый ровно в одной вершине, либо проходит через крайнюю вершину, лежащую на высоте не больше h.

Очевидно, что, используя лемму 2, можно построить требуемые M_i^j по одному, начиная с самых нижних. Свойство 1 ярусов выражает основную идею наших дальнейших действий: мы собираемся осуществлять сдвиг коэффициентов $p_0, p_1, \dots, p_m$ в F, который бы менял функцию, стоящую в левой части равенства разметки вершины из некоторого яруса, но оставлял бы неизменными все функции из разметки более высоких ярусов.

Зафиксируем степень n больше рангов всех ярусов. Возьмем произвольный многочлен p степени n. В разметках ярусных вершин подставим вместо F полином p (и соответствующие выражения вместо производных). Зафиксируем по одному равенству в разметке каждой ярусной вершины v. Это равенство определяет алгебраическое многообразие (будем обозначать его как $R(v)$) в пространстве переменных $x_1, \dots, x_{k(i)}$ ($k(i) \leqslant k$ из-за отождествления равных переменных, здесь $v \in T_i$). Если $u \in M_i^j$, $v \in M_i^l$, $j < l$, и v является потомком вершины $u \neq v$ в дереве T_i, то скажем, что многообразие $R(v)$ – *потомок* многообразия $R(u)$.

Будем перебирать ярусы, начиная с самых высоких, и для каждой их вершины v осуществлять сдвиги коэффициентов (текущего) многочлена p так, чтобы многообразие $R(v)$ находилось в как можно более общем положении относительно совокупности своих потомков. Точнее, для каждого пути из v вверх рассматриваем алгебраическое многообразие R, равное пересечению всех потомков многообразия $R(v)$ на этом пути. Из алгебраической геометрии известно (см., например, [4, гл. 1, § 3, теорема 1] или [2, гл. 4, § 6, теорема 2]), что любое многообразие является объединением конечного числа неприводимых (т.е. не представимых в виде объединения двух непустых многообразий)

многообразий, называемых его неприводимыми компонентами. Будем рассматривать неприводимые над полем комплексных чисел компоненты многообразия R, причем лишь такие, которые содержат хотя бы одну точку с попарно различными координатами (напомним, что нас интересуют только точки, у которых все координаты x_i попарно различны, иначе за эти точки "отвечает" другое дерево). Мы хотим сдвинуть коэффициенты p в малой окрестности так, чтобы R осталось неподвижным, а каждая его неприводимая компонента R^* указанного вида пересекалась с многообразием $R(v)$ по многообразию меньшей, чем у R, размерности. Геометрически ясно, что для этого достаточно сдвинуть $R(v)$ с произвольной точки компоненты R^*, причем сдвинуть столь мало, чтобы размерности пересечений других многообразий (из конечного числа) остались меньшими размерностей самих многообразий.

По лемме 1 при достаточно большом n возможен сдвиг из любой точки с попарно различными координатами. Действительно, из их различности и положительности ранга вершины v вытекает выполненность условия 2) леммы 1. Из свойства 1 ярусов следует неподвижность многообразия R и всех многообразий из более высоких ярусов. Эта неподвижность гарантирует, что сдвиг каждый раз можно делать столь малым, чтобы все ранее достигнутые "общие положения" многообразий таковыми и остались. Из алгебраической геометрии известно (см., например, [4, гл. 1, § 6, теорема 1] или [2, гл. 9, § 4, предложение 10]), что если произвольное многообразие X является строгим подмножеством неприводимого многообразия Y, то размерность X строго меньше размерности Y. Поэтому каждый раз, когда мы пересекаем (сдвинутое) текущее многообразие с пересечением его потомков на пути, размерность пересечения уменьшается. Осуществив описанные сдвиги коэффициентов, получим из p многочлен $\overline{p}$.

Возьмем требуемое в формулировке теоремы число c больше числа h из свойства 3 ярусов. Докажем, что это c обслуживает $S(\overline{p})$. Действительно, пусть первые c равенств последовательности S выполняются в точке a типа t. Тогда первые c равенств последовательности S_t выполняются в точке a_t, полученной из a отождествлением равных координат. Пусть типу t соответствует дерево T_i. По основному свойству 1 в T_i есть корневой путь γ длины c с удовлетворяющейся в точке a_t разметкой. Для него есть две возможности.

Случай 1. Пусть γ пересекает все ярусы $M_i^1, \dots, M_i^{k+1}$, каждый в одной вершине. Обозначим эти вершины, соответственно, $v_1, \dots, v_{k+1}$. По построению, последовательность размерностей тех неприводимых компонент многообразий

$$R(v_{k+1}), \quad R(v_{k+1}) \cap R(v_k), \quad \dots, \quad R(v_{k+1}) \cap R(v_k) \cap \dots \cap R(v_1),$$

в которых находится точка a_t (с попарно неравными координатами), строго убывает. Поскольку размерность пространства не превышает k, этот случай невозможен.

Случай 2. Пусть γ проходит через крайнюю вершину v. Рассмотрим бесконечный корневой путь $\overline{\gamma}$, совпадающий с γ до v, а дальше идущий по вершинам с пустой разметкой. По основному свойству 2, примененному к произвольному началу пути $\overline{\gamma}$, все равенства последовательности S_t выполняются в точке a_t, а значит все равенства последовательности S выполняются в точке a.

Для завершения доказательства теоремы нам осталось показать, что можно добиться, чтобы число c обслуживало не только сам $\overline{p}$, но и некоторую его окрестность. Покажем, как осуществить сколь угодно малый сдвиг произвольных коэффициентов многочлена p, чтобы полученный $\overline{p}$ удовлетворял этому свойству. Для выбранной ранее степени n подставим в разметку всех деревьев T_i вместо F многочлен степени n с неопределенными коэффициентами. Для каждого дерева и каждого корневого пути, пересекающего все ярусы в этом дереве в вершинах $v_1, \dots, v_k$, напишем формулу Φ_i^γ, утверждающую, что пересечение всех многообразий $R(v_i)$ пусто. Эта формула имеет свободными переменными неопределенные коэффициенты многочлена p. По теореме Тарского об элиминации кванторов (верной как над полем действительных чисел, так и над полем комплексных чисел, см., например, [3, гл. 3, п. 8]) существует эквивалентная ей бескванторная формула. Сдвиг коэффициентов p осуществим так, чтобы все полиномы от коэффициентов во всех полученных бескванторных формулах имели ненулевые значения. Покажем, что при этом все формулы Φ_i^γ станут истинными. Действительно, если бы некоторая формула была ложна, то можно было бы осуществить описанные ранее сколь угодно малые сдвиги коэффициентов (для приведения соответствующих многообразий в общее положение) и формула стала бы истинной. Это противоречит тому, что при малых сдвигах не меняются знаки в полиномах эквивалентной бескванторной формулы. По этой же причине все формулы Φ_i^γ истинны не только для самого многочлена $\overline{p}$, но и для всех многочленов в его малой коэффициентной окрестности, что и требовалось. Теорема доказана.

Замечание 1. Легко видеть, что в формулировке теоремы вместо последовательности S можно сразу рассматривать (размеченное равенствами) произвольное дерево S. Тогда утверждение теоремы будет состоять в том, что существует такое c, что для почти всех p для любой точки либо существует бесконечный корневой путь, на котором выполняются все равенства, либо на любом бесконечном корневом пути некоторое равенство на высоте не более c не выполняется. В доказательстве основное свойство 2 следует переформулировать так: если для некоторого конечного корневого пути γ в T и некоторой точки a удовлетворяет вся разметка на пути γ, то существует корневой путь той же длины в T_t, на котором выполняются все равенства в точке a (а именно, прообраз пути γ относительно расщепления вершин). В остальном доказательство аналогично.

Замечание 2. Доказанную теорему нетрудно обобщить на случай, когда функция F имеет не один аргумент, а фиксированное конечное число аргументов, а в квазимногочленах допускаются частные производные (например $\partial^4 F/(\partial x_1 \partial x_2 \partial x_2 \partial x_3)$; вместо F теперь подставляются многочлены от соответствующего числа переменных). Для удобства можно считать, что производные по переменным всегда берутся в порядке возрастания номеров этих переменных. Единственное существенное усложнение доказательства состоит в том, что в доказательстве леммы 1 вместо упомянутого результата из теории кратной интерполяции следует использовать

Утверждение. *Любой конечный набор условий, т.е. значений функции и ее частных производных в заданных точках, удовлетворяется на полиноме, степень которого зависит только от числа переменных, числа точек и максимального порядка встречающихся в условиях производных.*

Доказать его можно, например, следующим образом.

Назовем условие равенства заданному значению частной производной суммарного порядка i (соответственно, порядка i по переменной x) *условием порядка i* (соответственно, *условием порядка i по переменной x*). (При этом значению самого многочлена соответствует $i = 0$). Линейно упорядочим точки произвольным образом, и частные производные так, чтобы не убывал порядок. Используя эти упорядочения, линейно упорядочим все условия по точкам, а при равных точках по частным производным. Будем перебирать условия в соответствии с этим упорядочением и строить искомый многочлен по шагам. На i-м шаге добавляем к ранее построенному многочлену q_i такой многочлен p_i, у которого значения производных во всех ранее рассмотренных условиях равны нулю, а значение производной в i-ом условии таково, чтобы это условие выполнялось для $q_i + p_i$.

Пусть i-е условие соответствует точке $a = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$, а уже рассмотренные условия – точкам $b_1, \ldots, b_m$ и, возможно, a. Многочлен p_i – это некоторое число c, умноженное на произведение степеней двучленов вида $x - t$, где x пробегает все переменные, а t для каждой переменной x_j пробегает попарно различные значения координаты x_j, встретившиеся среди координат точек $b_1, \ldots, b_m$, a. Для j-ой координаты точки b_n, не равной a_j, берем степень соответствующего множителя больше порядка всех условий – это обеспечивает равенство нулю производных p_i в условиях, соответствующих этим точкам. Для точки a степень множителя $x_j - a_j$ берем равной порядку i-го условия по переменной x_j. Во-первых, этим обеспечивается для p_i равенство нулю в точке a произвольной производной d в ранее рассмотренных условиях, соответствующих точке a. Действительно, так как порядок d не больше порядка i-го условия, найдется переменная x_j, имеющая порядок в d строго меньше, чем в i-ом условии. Поэтому, в любом произведении двучленов, естественным образом входящем в качестве слагаемого в $d(p_i)$, степень двучлена $x_j - a_j$ ненулевая.

Во-вторых, частная производная p_i в i-ом условии ненулевая. Действительно, в любом ее слагаемом, где хотя бы раз взятие производной по x_j применяется не к соответствующему множителю $x_j - a_j$, этот множитель присутствует в ненулевой степени и обнуляет это слагаемое. В том же единственном слагаемом, где взятие производных всегда применялось к "своим" множителям, остались лишь множители типа $x_j - t$, где $t \neq a_j$. Следовательно, рассматриваемая частная производная не равна нулю в точке a, и за счет выбора числа c ей можно придать любое требуемое значение. Утверждение доказано.

Автор выражает глубокую признательность Ан. А. Мучнику, беседы с которым способствовали существенному улучшению текста, а также Н.К. Верещагину за ценные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
[2] Кокс Д., Литтл Дж., О'Ши Д. Идеалы, многообразия и алгоритмы. Введение в вычислительные аспекты алгебраической геометрии и коммутативной алгебры. М.: Мир, 2000.
[3] Верещагин Н.К., Шень А.Х. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2000.
[4] Шафаревич И. Р. Основы алгебраической геометрии. Т. 1. М.: Наука, 1998.

Институт проблем передачи информации РАН
E-mail: gorbunov@iitp.ru

Поступило
08.11.2001
Исправленный вариант
10.02.2003