Математические заметки

том 77 выпуск 3 март 2005

УДК 510.225

О СОВЕРШЕННЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ ИНВАРИАНТНЫХ CA-МНОЖЕСТВ

В. Г. Кановей, В. А. Любецкий

Известная теорема о том, что любое $\Sigma^1_2(a)$-множество X вещественных чисел (где a – фиксированный вещественный параметр), не содержащее совершенного ядра, необходимо удовлетворяет условию $X \subseteq \mathbf{L}[a]$, получает обобщение на более широкий класс множеств, у которых счетные ординалы (порядковые числа) допускаются в качестве дополнительных параметров в $\Sigma^1_2(a)$-определениях.

Библиография: 12 названий.

Настоящая заметка написана в продолжение нашей статьи [1], посвященной классическим проблемам, относящимся к свойствам регулярности точечных множеств. Одним из таких свойств является *свойство совершенного ядра*, состоящее в том, что данное множество X должно быть конечным или счетным либо должно содержать совершенное подмножество. Например, любое борелевское множество, и даже любое Σ^1_1-множество польского пространства[1] имеют свойство совершенного ядра (Суслин [2][2]). В отличие, скажем, от измеримости по Лебегу, свойство совершенного ядра не переносится на дополнительные множества. Поэтому проблема со свойством совершенного ядра для Π^1_1-множеств (т.е. множеств, дополнительных к Σ^1_1-множествам) была довольно быстро осознана в дескриптивной теории (впервые, вероятно, в [3]) как одна из наиболее важных.

Все попытки решить эту проблему методами классической дескриптивной теории множеств не дали результата. Причина этой неудачи стала ясной только после того как исследования в рамках аксиоматической теории множеств показали, что эта проблема вообще *неразрешима* в том смысле слов "решить проблему", который означает дать определенный, положительный или отрицательный ответ на поставленный вопрос.

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 03-01-00757. Работа второго автора выполнена при поддержке Минпромнауки РФ, грант № 37-053-11-0061.

[1] *Польскими* называются полные сепарабельные метрические пространства. К их числу относятся, например, вещественная прямая $\mathbb{R}$ и бэровское пространство $\mathbb{N}^\omega$. Σ^1_1-множества в польских пространствах – это непрерывные образы борелевских множеств, или, что то же самое, проекции борелевских множеств, например, из $\mathbb{R}^{n+1}$ в $\mathbb{R}$. Эти множества также называются A-множествами, а дополнительные к ним – CA-множествами.

[2] Более подробные исторические замечания относительно этой и некоторых других классических теорем дескриптивной теории множеств приведены в конце первого параграфа статьи [1].

Именно, Новиков [4] показал, что существование контрпримеров, т.е. несчетных множеств, не имеющих совершенных подмножеств, в классе Π^1_1 невозможно *опровергнуть*, а Соловей [5] установил, что существование контрпримеров в классе Π^1_1 (а на самом деле в значительно более широком классе всех проективных множеств) невозможно *доказать*. Слова "доказать" и "опровергнуть" здесь понимаются в смысле доказательства или опровержения в аксиоматической теории множеств Цермело–Френкеля **ZFC**, что в настоящее время приравнивается к возможности обычного математического доказательства или опровержения (в неформальном смысле). Таким образом, проблема совершенного ядра, подобно ряду других проблем классической дескриптивной теории множеств, оказалась неразрешимой в этом самом сильном смысле. (Обзоры [1], [6], [7] содержат различные сведения о неразрешимых проблемах дескриптивной теории множеств.)

В ходе этих исследований неразрешимости, были получены и другие замечательные результаты. Например, Любецкий [8], [9] установил, что из существования проективного множества класса Σ^1_2, неизмеримого по Лебегу, следует существование несчетного Π^1_1-множества без совершенных подмножеств (т.е. контрпримера к свойству совершенного ядра), но что обратная импликация не имеет места. Следующая теорема (см. [1, п. 4.5]) играла ключевую роль в исследованиях, связанных со свойством совершенного ядра у Π^1_1-множеств.

Теорема 1 (Соловей [10], Любецкий [11]). *Если $a \in \mathbb{N}^\omega$ и $\Sigma^1_2(a)$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^\omega$ не содержит совершенных подмножеств, то $X \subseteq \mathbf{L}[a]$.*[3]

Здесь $\mathbb{N}^\omega$ – бэровское пространство, класс $\Sigma^1_2(a)$ образован всеми множествами, которые определимы Σ^1_2-формулами с единственным параметром a, а через $\mathbf{L}[a]$ обозначается класс всех множеств, конструктивных относительно $a \in \mathbb{N}^\omega$. (Некоторые главные обозначения, введенные в статье [1], принимаются в настоящей заметке без особых комментариев.)

Нашей целью здесь является доказательство одного усиления этой теоремы, т.е. в сущности того же результата для значительно более широкого класса точечных множеств. Идея этого более широкого класса состоит в том, чтобы разрешить использовать счетные ординалы (порядковые числа) в качестве дополнительных параметров определимости (кроме параметра a). Это затруднительно сделать прямо, поскольку язык аналитических формул (см. [1, § 1B]), в терминах которого определяются классы вида $\Sigma^1_2(a)$, не предусматривает использования ординалов. Однако имеется обходной путь, основанный на кодировке ординалов точками пространства $\mathbb{N}^\omega$.

Зафиксируем раз и навсегда рекурсивное перечисление $\mathbb{Q} = \{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Положим $Q_w = \{q_n : w(n) = 0\}$ для каждого $w \in \mathbb{N}^\omega$. Если

[3] Как принято в современной дескриптивной теории множеств, все результаты формулируются и доказываются здесь для точечных множеств бэровского пространства $\mathbb{N}^\omega$. Однако в силу того, что $\mathbb{N}^\omega$ гомеоморфно "бэровской прямой", т.е. множеству всех иррациональных точек $\mathbb{R}$, посредством очень простого, в сущности рекурсивного отображения, большинство результатов дескриптивной теории множеств автоматически переносятся с $\mathbb{N}^\omega$ на $\mathbb{R}$. Это относится, в частности, к теореме 1 и к нашему главному результату – теореме 3, хотя для последней необходима некоторая дополнительная работа по получению $\mathbb{R}$-версий понятий, связанных с определением 2. Вообще о независимости вопросов дескриптивной теории множеств от выбора базового пространства говорится в [1, § 1A].

теперь $\xi < \omega_1$, то обозначим через $\mathbf{WO}_\xi$ множество всех $w \in \mathbb{N}^\omega$ таких, что Q_w имеет порядковый тип ξ в смысле естественного порядка $\mathbb{Q}$. Элементы множества $\mathbf{WO}_\xi$ считаются *кодами* ординала ξ. Наконец, положим $\mathbf{WO} = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{WO}_\xi$. Это множество принадлежит классу Π^1_1 (см. [1, § 1Д]), и на нем можно определить функцию $|w| = \xi$ для $w \in \mathbf{WO}_\xi$.

Рассматривая каждое $\mathbf{WO}_\xi$ как *изображение* ординала $\xi < \omega_1$, уже доступное для языка аналитических формул, мы приходим к следующему определению.

Определение 2. Формула $\varphi(w, x)$ (в любом языке) называется *w-инвариантной*, если всякий раз, когда $x \in \mathbb{N}^\omega$ и $w, w' \in \mathbf{WO}$ удовлетворяют равенству $|w| = |w'|$, имеем

$$\varphi(w, x) \iff \varphi(w', x).$$

Формула $\varphi(w, x)$ называется *абсолютно w-инвариантной*, если она остается w-инвариантной в любом генерическом расширении универсума.

Абсолютно инвариантным $\Sigma^1_2(a, \omega_1)$-множеством назовем всякое множество вида $X = \{x \in \mathbb{N}^\omega : \varphi(w_0, x)\}$, где $w_0 \in \mathbf{WO}$, а $\varphi(w, x)$ – абсолютно w-инвариантная Σ^1_2-формула с единственным параметром $a \in \mathbb{N}^\omega$.

Например, если $\psi(\xi, x)$ – любая формула, предполагающая, что $\xi < \omega_1$ и $x \in \mathbb{N}^\omega$, то формула $w \in \mathbf{WO} \wedge \psi(|w|, x)$ w-инвариантна. При этом она может быть аналитической формулой, каковой исходная формула ψ, конечно, не является. Для *абсолютной* инвариантности достаточно, чтобы инвариантность была доказуема в $\mathbf{ZFC}$, исходя из определения φ, например, как это имеет место для формул вида $w \in \mathbf{WO} \wedge \psi(|w|, x)$.

Любое $\Sigma^1_2(a)$-множество тривиальным образом является абсолютно инвариантным $\Sigma^1_2(a, \omega_1)$-множеством. Менее тривиальный пример: любое множество вида $\mathbf{WO}_\xi$, очевидно, является абсолютно инвариантным и даже $\Delta^1_1(a, \omega_1)$-множеством, но не принадлежит $\Sigma^1_2(a)$ в случае $\omega_1^{\mathbf{L}[a]} \leqslant \xi < \omega_1$. Поэтому следующая теорема (основная теорема этой заметки) усиливает теорему 1.

Теорема 3. *Если $a \in \mathbb{N}^\omega$ и абсолютно инвариантное $\Sigma^1_2(a, \omega_1)$-множество $X \subseteq \mathbb{N}^\omega$ не содержит совершенных подмножеств, то $X \subseteq \mathbf{L}[a]$. В частности, если дополнительно известно, что $\omega_1^{\mathbf{L}[a]} < \omega_1$, то X не более чем счетно.*

Доказательство. Пусть $X = \{x \in \mathbb{N}^\omega : \varphi(w, x)\}$, где $w \in \mathbf{WO}$, а $\varphi(w, x)$ есть абсолютно w-инвариантная Σ^1_2-формула с единственным параметром $a \in \mathbb{N}^\omega$. Пусть $\xi = |w|$.

Дальнейший ход доказательства связан с использованием *склеивающего форсинга*[4] $\mathbb{C}(\xi) = \mathrm{Coll}(\mathbb{N}, \xi)$. Таким образом, $\mathbb{C}(\xi)$ состоит из всех конечных последовательностей ординалов $< \xi$, иными словами, всех функций $p \colon m \to \xi$, где $m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$, и $p \leqslant q$ (т.е. p "сильнее"), когда $q \subseteq p$, т.е. p продолжает q как функция. Всякое $\mathbb{C}(\xi)$-генерическое множество $G \subseteq \mathbb{C}(\xi)$ производит функцию $f[G] = \cup G \colon \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \xi$ – *генерическую склейку* ξ. Обратно, мы имеем $G = \{f[G] \restriction n : n \in \mathbb{N}\}$.

[4]Предполагается некоторое знакомство читателя с форсингом (методом вынуждения). Краткое изложение главных теорем форсинга со ссылками на соответствующие источники имеется в [1, § 4А]. Мы будем применять эти теоремы без особых пояснений.

Удобный технический прием состоит в том, чтобы рассматривать универсум всех множеств $\mathbf{V}$ как модель в некотором "виртуальном" более широком универсуме, где существуют нужные нам генерические расширения $\mathbf{V}$. В частности, в таком более широком универсуме можно рассмотреть $\mathbb{C}(\xi)\times\mathbb{C}(\xi)$-генерическое расширение $\mathbf{V}[G,G']$ универсума $\mathbf{V}$, порожденное генерической над $\mathbf{V}$ (следовательно, и над $\mathbf{L}[a]$) парой множеств $G_1,G_2\subseteq\mathbb{C}(\xi)$, в котором, по-предыдущему, существуют две склеивающие функции, $f_1=\bigcup G_1$ и $f_2=\bigcup G_2$, из $\mathbb{N}$ на ξ. Соответственно имеются коды $w_1\in\mathbf{WO}_\xi\cap\mathbf{L}[f_1]$ и $w_2\in\mathbf{WO}_\xi\cap\mathbf{L}[f_2]$ ординала ξ. Напомним, что у нас есть еще и код $w\in\mathbf{WO}_\xi\cap\mathbf{V}$, принадлежащий, конечно, и классу $\mathbf{V}[f_1,f_2]$.

Заметим, что в наших предположениях формула φ является w-инвариантной в $\mathbf{V}[f_1, f_2]$. Таким образом, в этом расширенном универсуме $\mathbf{V}[f_1,f_2]$ множества

$$X'=\{x:\varphi(w,x)\},\qquad X_1'=\{x:\varphi(w_1,x)\},\qquad X_2'=\{x:\varphi(w_2,x)\}$$

совпадают. Для удобства условимся, что штрихованные большие буквы обозначают точечные множества, определяемые в расширенном универсуме $\mathbf{V}[f_1,f_2]$.

Мы утверждаем, что *множество* X' *не имеет совершенного ядра в* $\mathbf{V}[f_1,f_2]$. Для доказательства выберем, рассуждая в $\mathbf{V}[f_1,f_2]$, униформное $\Pi^1_1(a,w)$-множество $P'\subseteq\mathbb{N}^\omega\times\mathbb{N}^\omega$ такое, что $X'=\operatorname{dom}P'=\{x:\exists y\ \ P(x,y)\}$. (Используется теорема униформизации Новикова–Кондо–Аддисона; см., например, [1, п. 1.9].)

Из теоремы абсолютности Шенфилда[5] следует, что множество $P=P'\cap\mathbf{V}$ принадлежит $\mathbf{V}$, является $\Pi^1_1(a)$-множеством в $\mathbf{V}$ и удовлетворяет $X=\operatorname{dom}P$. Раз в $\mathbf{V}$ истинно, что X не содержит совершенных подмножеств, то то же самое справедливо и для P. Но тогда и P' не содержит совершенных подмножеств в $\mathbf{V}[f_1,f_2]$ снова по теореме абсолютности Шенфилда, поскольку отсутствие совершенного подмножества можно выразить Π^1_2-формулой, говорящей, что ни одна из конституант данного $\Pi^1_1(a)$-множества не содержит совершенного ядра. Тем самым, $P'\subseteq\mathbf{L}[a,w]$ в $\mathbf{V}[f_1,f_2]$ по теореме 1. Отсюда следует, что $X'\subseteq\mathbf{L}[a,w]$, а потому X' не содержит совершенного ядра в $\mathbf{V}[f_1,f_2]$ по теореме Грошек–Сламана[6], что и требовалось.

Опять согласно теореме 1 и благодаря доказанному отсутствию совершенного ядра одно и то же множество $X'=X_1'=X_2'$ удовлетворяет $X_1'\subseteq\mathbf{L}[a,f_1]$ и $X_2'\subseteq\mathbf{L}[a,f_2]$ в $\mathbf{V}[f_1,f_2]$, так что $X'\subseteq\mathbf{L}[a,f_1]\cap\mathbf{L}[a,f_2]$ в $\mathbf{V}[f_1,f_2]$. Однако по теореме о произведении форсингов [1, теорема 4.2(i)] мы имеем $\mathbf{L}[a,f_1]\cap\mathbf{L}[a,f_2]=\mathbf{L}[a]$ в $\mathbf{V}[f_1,f_2]$. Таким образом, $X'\subseteq\mathbf{L}[a,f_1]$, а тогда и $X\subseteq\mathbf{L}[a]$, поскольку $X=X'\cap\mathbf{V}$ (например, в силу того, что $P=P'\cap\mathbf{V}$). Теорема доказана.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Кановей В. Г., Любецкий В. А. О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств // УМН. 2003. Т. 58. №5. С. 3–88.

[2] Souslin M. Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis // C. R. Acad. Sci. Paris. 1917. V. 164. P. 88–90.

[5] Эта теорема утверждает, применительно к рассматриваемой ситуации, что всякая замкнутая Σ^1_2-формула или Π^1_2-формула с параметрами из $\mathbf{V}$ одновременно истинна в $\mathbf{V}$ и в $\mathbf{V}[f_1,f_2]$ или одновременно ложна в $\mathbf{V}$ и в $\mathbf{V}[f_1,f_2]$ (см., например, [1, 2.8]).

[6] Эта теорема утверждает, что множество $\mathbb{N}^\omega\cap\mathbf{L}[b]$, $b\in\mathbb{N}^\omega$, не может иметь совершенных подмножеств, за исключением случая, когда $\mathbb{N}^\omega\subseteq\mathbf{L}[b]$. Доказательство см., например, в [12].

[3] Lusin N., Sierpiński W. Sur quelques propriétés des ensembles (A) // Bull. Int. Acad. Sci. Cracowie. 1918. V. 4. P. 35–48; Лузин Н. Н. // Собр. соч. Т. 2. М.: Изд. АН СССР, 1958. С. 273–284.

[4] Новиков П. С. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств // Тр. МИАН. 1951. Т. 38. С. 279–316.

[5] Solovay R. M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. Math. 1970. V. 92. №1. P. 1–56.

[6] Кановей В. Г. Развитие дескриптивной теории множеств под влиянием трудов Н. Н. Лузина // УМН. 1985. Т. 40. №3 (243). С. 117–153.

[7] Успенский В. А. Вклад Н. Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания // УМН. 1985. Т. 40. №3 (243). С. 85–116.

[8] Любецкий В. А. Из существования неизмеримого множества типа A_2 вытекает существование несчетного множества, не содержащего совершенного подмножества, типа СА // Докл. АН СССР. 1970. Т. 195. №3. С. 548–550.

[9] Любецкий В. А. Независимость некоторых предложений дескриптивной теории множеств от теории множеств Цермело–Френкеля // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1971. №2. С. 78–82.

[10] Solovay R. M. On the cardinality of Σ^1_2 sets // Foundations of Mathematics. Symposium papers commemorating the 60th birthday of Kurt Gödel. Berlin: Springer-Verlag, 1969. P. 58–73.

[11] Любецкий В. А. Из существования неизмеримого множества типа A_2 следует существование несчетного множества типа СА, не содержащего совершенного подмножества // Тезисы докладов по алгебре, математической логике и вычислительной математике конференции пед. вузов центр. зоны РСФСР. Иваново, 1970. С. 22–24.

[12] Кановей В. Г., Любецкий В. А. О множестве конструктивных вещественных чисел // Тр. МИАН. 2004. Т. 257.

Институт проблем передачи информации РАН
E-mail: `lyubetsk@iitp.ru`

Поступило
31.10.2003