Математические заметки

Том 81 выпуск 6 июнь 2007

УДК 510.2

О сводимости монадических отношений эквивалентности

В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, М. Реекен

Каждое аддитивное сечение в нестандартном натуральном ряде ${}^*\mathbb{N}$ индуцирует отношение эквивалентности M_U на ${}^*\mathbb{N}$, т.е. $x\,\mathrm{M}_U\,y$, когда $|x-y|\in U$. Эти отношения эквивалентности называются монадическими. Изучается отношение сводимости между монадическими отношениями эквивалентности. Главный результат (теорема 3.1) состоит в том, что сводимость определяется в терминах конфинальности (или коинициальности) и особого параметра ширины сечения. Рассматриваются также вопросы гладкости и существования трансверсалей. Полученные результаты имеют сходство с теоремами современной дескриптивной теории множеств в области сводимости борелевских отношений эквивалентности.

Библиография: 15 названий.

Введение. Классическая дескриптивная теория множеств рассматривает в основном множества в польских (полных сепарабельных метрических) пространствах. Однако уже в 1980-х годах стало известно, что идеи дескриптивной теории множеств могут развиваться и в области нестандартного анализа, где польские пространства заменяются внутренними, например, гиперконечными множествами некоторой фиксированной нестандартной структуры. Эта область получила название *гиперконечная* или *нестандартная* дескриптивная теория множеств, см., например, [1]. В ней рассматриваются структуры, которые в чем-то похожи на те, что возникают в польских пространствах, но в чем-то сильно отличаются от них. Доказательства обычно основаны на комбинаторных идеях (с использованием насыщенности). В нестандартной дескриптивной теории множеств также рассматриваются объекты, вообще не имеющие аналогов в случае польских пространств, например, детерминированные множества.

Работа посвящена отношениям эквивалентности M_U на множестве ${}^*\mathbb{N}$ всех гипернатуральных чисел, которые индуцированы аддитивными сечениями (начальными сегментами) $U\subseteq{}^*\mathbb{N}$ в том смысле, что $x\,\mathrm{M}_U\,y$ равносильно $|x-y|\in U$. Их классы эквивалентности называются *U-монадами*. Такие *монадические* отношения эквивалентности (или разбиения) рассматривались в связи с разными вопросами нестандартного анализа начиная с 1980-х годов (см. [1], [2]). В работе [3] решен вопрос о существовании счетно детерминированных трансверсалей (т.е. множеств, выбирающих по элементу в каждой монаде) для отношений вида M_U. Ряд других задач

Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 03-01-00757 и № 06-01-00608) и гранта DFG 436 RUS 17/68/05. Работа второго автора выполнена при поддержке гранта МНТЦ 2766.

для счетно детерминированных отношений эквивалентности (дихотомические теоремы, гладкость, сводимость) решены в работе [4]. В частности, в ней доказано, что каждое из двух естественных семейств счетно детерминированных монадических отношений, т.е. счетно конфинальных и счетно коинициальных, линейно упорядочено отношением счетно детерминированной сводимости. При этом направление порядка зависит от параметра (здесь называемого *шириной*), характеризующего финальную скорость (в случае возрастания) конфинальной или (в случае убывания) коинициальной последовательности, определяющей данное сечение.

В несколько иной ситуации (в рамках нестандартной теории множеств) аналогичные результаты получены в монографии [5; гл. 9].

Настоящая работа посвящена исследованию монадических отношений эквивалентности, индуцируемых сечениями произвольной конфинальности и коинициальности. Точнее, предполагая κ^+-насыщенность исходного нестандартного универсума, где κ – данный бесконечный кардинал, мы рассматриваем аддитивные сечения, принадлежащие к типу κ-детерминированных множеств; каждое из них $\leqslant \kappa$-конфинально или $\leqslant \kappa$-коинициально. Соответственно, рассматривается κ-детерминированная сводимость M_U к M_V, означающая существование такого κ-детерминированного отображения ${}^*\mathbb{N}$ в ${}^*\mathbb{N}$, которое индуцирует вложение фактор-множества ${}^*\mathbb{N}/\,\mathrm{M}_U$ в ${}^*\mathbb{N}/\,\mathrm{M}_V$. Главный результат, теорема 3.1, характеризует такую сводимость в терминах свойств конфинальности, коинициальности и ширины сечений U, V. Попутно рассматриваются вопросы κ-гладкости (т.е. κ-детермированной сводимости к равенству) и существования κ-детермированных трансверсалей.

Отметим, что вопросы такого типа (борелевские отношения эквивалентности, борелевская сводимость) широко представлены в современной дескриптивной теории множеств (в польских пространств), см., например, [6], [7].

Предполагается знакомство читателя с основами нестандартного анализа (см. [8]–[11]), а также с основами гиперконечной дескриптивной теорией множеств в рамках, например, вводных частей статьи [1].

1. Детерминированные множества. Все данные ниже "нестандартные" понятия, например, ${}^*\mathbb{N}$, относятся к раз навсегда фиксированному "нестандартному универсуму" (например, к нестандартной суперструктуре, как в [10]), элементы которого будут называться *нестандартными* (внутренними или внешними) множествами. Степень насыщенности этого "нестандартного универсума" будет особо оговариваться, но как минимум это будет обычная $\aleph_1$-насыщенность. (См. [12] о насыщенности.)

Через $\mathscr{P}_{\mathrm{int}}X$ обозначается множество всех внутренних подмножеств нестандартного множества X. Далее, $\#(X) \in {}^*\mathbb{N}$ обозначает число всех элементов гиперконечного множества X, а $\operatorname{card} X$ – мощность X в универсуме всех множеств. Наконец, $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X) = \{Y \subseteq X : Y \text{ конечно}\}$.

Понятие *детерминированного множества* восходит к работам Колмогорова и Хаусдорфа 1920-х годов по δs-операциям (см. исторические замечания в [13]), а в контексте нестандартного анализа введено в [14], [15]. Зафиксируем бесконечный кардинал κ. Рассматриваются подмножества некоторого фиксированного внутреннего (в данном нестандартном универсуме) множества I.

Приведем два определения $\varkappa$-детерминированности:

1) множество $X \subseteq I$ называется *κ-детерминированным*, если оно имеет вид

$$\begin{gathered} X = \{x \in I : b(x) \in B\}, \qquad \text{где} \quad B \subseteq \mathscr{P}(\kappa), \\ b(x) = \{\xi < \kappa : x \in X_\xi\} \qquad \text{и} \qquad X_\xi \in \mathscr{P}_{\mathrm{int}}(I) \quad \text{для всех} \ \ \xi < \kappa; \end{gathered} \tag{1}$$

2) множество $X \subseteq I$ называется *κ-детерминированным*, если оно имеет вид

$$\begin{gathered} X = \bigcup_{b \in B} \bigcap_{\xi \in b} X_\xi, \qquad \text{где} \quad B \subseteq \mathscr{P}(\kappa), \\ X_\xi \in \mathscr{P}_{\mathrm{int}}(I) \qquad \text{для всех} \quad \xi < \kappa. \end{gathered} \tag{2}$$

Определения 1) и 2) эквивалентны. В самом деле, если X определено как в (2), то положив $B' = \bigcup_{b \in B} \{b' \subseteq \kappa : b \subseteq b'\}$, получим определение X типа 1). Обратно, если X определено как в 1), то положив $X'_{2\xi} = X_\xi$ и $X'_{2\xi+1} = I \setminus X_\xi$ и взяв в качестве B' множество всех $b' \subseteq \kappa$ таких, что $b = \{\xi : 2\xi \in b'\} \in B$ и $\{\xi : 2\xi + 1 \in b'\} = \kappa \setminus b$, получим определение типа 2)[1].

Лемма 1.1. *Если κ – бесконечный кардинал, а I – внутреннее множество, то семейство всех κ-детерминированных подмножеств I замкнуто относительно дополнений, а также объединений и пересечений в числе $\leqslant \kappa$.*

Доказательство. Работаем с определением 1). Чтобы получить дополнение, просто берем $B' = \mathscr{P}(\kappa) \setminus B$. Что касается объединений и пересечений в числе $\leqslant \kappa$, то по очевидным причинам можно считать, что все исходные множества детерминированы в смысле одного и того же индексированного семейства $\{X_\xi\}_{\xi<\kappa}$ множеств $X_\xi \in \mathscr{P}_{\mathrm{int}}(I)$, после чего задача сводится к объединению или пересечению соответствующих множеств $B \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$.

2. Сечения в гипернатуральных числах. Начальные сегменты $U \subseteq {}^*\mathbb{N}$ принято называть *сечениями*. Сечение U *аддитивно*, если $x \in U \Rightarrow 2x \in U$. К этому типу относятся, например, сечения

$$h\mathbb{N} = \{x \in {}^*\mathbb{N} : \exists\, n \in \mathbb{N} \ \ (x < nh)\} \qquad \text{и} \qquad h/\mathbb{N} = \left\{x \in {}^*\mathbb{N} : \forall\, n \in \mathbb{N} \ \ \left(x < \frac{h}{n}\right)\right\},$$

где $h \in {}^*\mathbb{N}$. *Конфинальностью* $\operatorname{cof} U$ сечения $U \subseteq {}^*\mathbb{N}$ называется наименьший кардинал ϑ такой, что U имеет возрастающую конфинальную подпоследовательность типа ϑ. *Коинициальностью* $\operatorname{coi} U$ сечения $U \subseteq {}^*\mathbb{N}$ называется наименьший кардинал ϑ такой, что ${}^*\mathbb{N} \setminus U$ имеет убывающую коинициальную подпоследовательность типа ϑ. Заметим, что если U не содержит наибольшего элемента, то $\operatorname{cof} U$ и $\operatorname{coi} U$ – бесконечные регулярные кардиналы. (Но аддитивное сечение кроме $\{0\}$ не может иметь наибольшего элемента.)

Лемма 2.1. *Предположим, что κ – бесконечный кардинал и нестандартный универсум является κ^+-насыщенным. Тогда любое κ-детерминированное сечение $\varnothing \neq U \subsetneqq {}^*\mathbb{N}$ удовлетворяет условию $\operatorname{cof} U \leqslant \kappa$ или $\operatorname{coi} U \leqslant \kappa$, причем если оба эти неравенства выполнены одновременно, то U содержит наибольший элемент (и тогда является внутренним множеством).*

[1] Мы принимаем, что 2ξ есть сумма ξ копий ординала 2, так что, например, $2\omega = \omega \neq \omega 2 = \omega + \omega$, а $2(\omega + 3) = 2\omega + 2 \cdot 3 = \omega + 6$.

Доказательство. Пусть

$$U = \bigcup_{b \in B} \bigcap_{\xi \in b} X_\xi,$$

где $B \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$ и множества $X_\xi \subseteq {}^*\mathbb{N}$ такие, как в (2). Положим, для любого $a \subseteq \kappa$

$$X_a = \bigcap_{\xi \in a} X_\xi \qquad \text{и} \qquad U_a = \{y \in {}^*\mathbb{N} : \exists\, x \in X_a \ \ (y \leqslant x)\}.$$

Если a конечно, то множества X_a и U_a внутренние, причем U_a – сечение в ${}^*\mathbb{N}$. Поэтому $U_a = [0, \mu_a)$, где $\mu_a = \max U_a + 1$ или условно $\mu_a = \infty$, если $U_a = {}^*\mathbb{N}$. Кроме того, $U = \bigcup_{b \in B} U_b$, а из κ^+-насыщенности следует, что

$$U_b = \bigcap_{a \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(b)} U_a.$$

Случай 1: $U_b \subsetneqq U$ для всех $b \in B$. Взяв $h_b \in U \setminus U_b$, мы получим $\mu_a \leqslant h_b$ хотя бы для одного $a = a(b) \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(b)$ (так как $U_b = \bigcap_{a \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(b)} U_a$), а потому множество $\{\mu_{a(b)} : b \in B\}$ конфинально в U.

Случай 2: $U_b = U$ для некоторого $b \in B$. Здесь, если $U_b \subsetneqq U_a$ для всех $a \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(b)$, то множество

$$\{\mu_a \neq \infty : a \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(b)\}$$

мощности $\leqslant \kappa$ коинициально в ${}^*\mathbb{N} \setminus U$, а если $U_b = U_a$ для некоторого $a \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(b)$, то $U = U_b = U_a$ – внутреннее множество, чья конфинальность и коинициальность равны 1.

Наконец, если множество $K \subseteq U$ мощности $\leqslant \kappa$ конфинально в U, а множество $L \subseteq {}^*\mathbb{N} \setminus U$ мощности $\leqslant \kappa$ коинициально в ${}^*\mathbb{N} \setminus U$, то по κ^+-насыщенности найдутся $x \in K$ и $y \in L$, являющиеся соответственно наибольшим элементом U и наименьшим элементом ${}^*\mathbb{N} \setminus U$, так что U – внутреннее множество.

Обратно, любое сечение $U \subseteq {}^*\mathbb{N}$, удовлетворяющее условию $\operatorname{cof} U \leqslant \kappa$ или $\operatorname{coi} U \leqslant \kappa$, κ-детерминировано. В самом деле, если последовательность $\{u_\xi\}_{\xi<\kappa}$, например, конфинальна в U, то $U = \bigcup_{\xi<\kappa} U_\xi$, где все множества $U_\xi = [0, u_\xi]$ внутренние, следовательно, κ-детерминированы, так что остается применить лемму 1.1.

3. Монадические разбиения. Всякое аддитивное (т.е. удовлетворяющее условию $a \in U \Rightarrow 2a \in U$) сечение $U \subseteq {}^*\mathbb{N}$ индуцирует отношение эквивалентности M_U на ${}^*\mathbb{N}$ так: $x \,\mathrm{M}_U\, y$, когда $|x-y| \in U$. Его классы эквивалентности

$$[x]_U = \{y : x \,\mathrm{M}_U\, y\} = \{y : |x-y| \in U\},$$

называются U-*монадами*, совокупность которых составляет *фактор-множество*

$${}^*\mathbb{N}/U = {}^*\mathbb{N}/\,\mathrm{M}_U = \{[x]_U : x \in {}^*\mathbb{N}\}.$$

Сами же отношения вида M_U называются *монадическими* отношениями эквивалентности или просто *монадическими разбиениями*.

Два вырожденных примера. Если $U = \varnothing$, то M_U совпадает с равенством на ${}^*\mathbb{N}$, которое часто обозначается через $\mathrm{D}_{{}^*\mathbb{N}}$ (*диагональ* ${}^*\mathbb{N}$). Если $U = {}^*\mathbb{N}$, то все $x \in {}^*\mathbb{N}$ M_U-эквивалентны друг другу. Невырожденный пример: $U = \mathbb{N}$, тогда $x \,\mathrm{M}_U\, y$ равносильно тому, что $|x-y|$ конечно.

Монады разных видов часто рассматриваются в работах по нестандартному анализу, а также по нестандартным моделям арифметики Пеано. О монадах, которые индуцированы аддитивными сечениями в $^*\mathbb{N}$, см., например, в [2], [3]. Мы рассматриваем здесь монадические разбиения и эквивалентности с точки зрения вопросов существования трансверсалей, гладкости и сводимости.

Напомним, что *трансверсалью* отношения эквивалентности E называется любое множество, имеющее ровно один общий элемент с каждым классом E-эквивалентности. Если κ – бесконечный кардинал, то отношение эквивалентности E на $^*\mathbb{N}$ назовем *κ-гладким*, если найдется κ-детерминорованная (как множество пар) функция $f\colon {}^*\mathbb{N}\to{}^*\mathbb{N}$ такая, что

$$x\,\mathrm{E}\,y \;\Leftrightarrow\; f(x)=f(y) \qquad \text{для всех}\quad x,y\in{}^*\mathbb{N}.$$

Наконец, если E и F – отношения эквивалентности на $^*\mathbb{N}$, то $\mathrm{E}\leqslant_\kappa \mathrm{F}$ (*κ-детерминированная сводимость* E к F) понимается как существование κ-детерминированного множества $R\subseteq{}^*\mathbb{N}\times{}^*\mathbb{N}$ такого, что

а) отношение R инвариантно в том смысле, что $x\,\mathrm{E}\,x' \Leftrightarrow y\,\mathrm{F}\,y'$ для всех пар $\langle x,y\rangle$ и $\langle x',y'\rangle$ из R, и, кроме того, (3)

б) $\operatorname{dom} R={}^*\mathbb{N}$.

В этом случае можно определить вложение $F\colon {}^*\mathbb{N}/\,\mathrm{E}\to{}^*\mathbb{N}/\,\mathrm{F}$ так, что $F([x]_{\mathrm{E}})=[y]_{\mathrm{F}}$, когда найдется $y'\in[y]_{\mathrm{F}}$, удовлетворяющее $\langle x,y'\rangle\in R$. Уместно отметить, что определенная выше κ-гладкость E равносильна соотношению $\mathrm{E}\leqslant_\kappa \mathrm{D}_{^*\mathbb{N}}$.

Согласно следующей теореме отношения κ-детерминированной сводимости между монадическими разбиениями определяются соотношением их конфинальностей (коинициальностей) и следующим параметром *ширины*:

$$\operatorname{wid} U=\bigcap_{u\in U,\,u'\in{}^*\mathbb{N}\setminus U}\left[0,\frac{u'}{u}\right)=\{h\in{}^*\mathbb{N}:\forall x\ \ (x\in U\Rightarrow hx\in U)\}$$

сечения $U\subsetneqq{}^*\mathbb{N}$.[2] Нетрудно проверить, что $\operatorname{wid} U$ – снова сечение, причем не только аддитивное, но и мультипликативное, т.е. $a\in\operatorname{wid} U\Rightarrow a^2\in\operatorname{wid} U$.

Аддитивные сечения наименьшей возможной ширины (кроме $\{0\}$) – это те, которые имеют вид $U=h\mathbb{N}$, $h\in{}^*\mathbb{N}$ и $U=h/\mathbb{N}$, $h\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, для них $\operatorname{wid} U=\mathbb{N}$. Эти сечения мы называем *медленными*. Остальные аддитивные сечения (кроме $h\mathbb{N}$ и $h/\mathbb{N}$) будут называться *быстрыми*. Отметим, что уже в предположении $\aleph_1$-насыщенности, сечение не может иметь вид одновременно и $c\mathbb{N}$ и $c'/\mathbb{N}$.

Теорема 3.1. *Допустим, что κ – несчетный кардинал, и данный нестандартный универсум κ^+-насыщен. Пусть U, V – аддитивные κ-детерминированные сечения в $^*\mathbb{N}$, отличные от $\varnothing$, $\{0\}$, $^*\mathbb{N}$. Тогда*

(i) $\mathrm{D}_{^*\mathbb{N}}\leqslant_\kappa \mathrm{M}_U$;

(ii) *следующие три утверждения равносильны*:

(1) M_U *является κ-гладким*;

(2) M_U *имеет κ-детерминированную трансверсаль*;

(3) *либо* (а) $U=h\mathbb{N}$, $h\in{}^*\mathbb{N}$, *либо* (б) $U=h/\mathbb{N}$, $h\in{}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, *и* $\mathfrak{c}\leqslant\kappa$;[3]

[2] В англоязычных работах *width*, *thickness*.

[3] Через $\mathfrak{c}=2^{\aleph_0}$ обозначается мощность континуума.

(iii) *если* U – *сечение типа* (ii) (3), *то* $\mathrm{M}_U \leqslant_\kappa \mathrm{M}_V$;

(iv) *если* $\operatorname{cof} U \leqslant \kappa$, $\operatorname{cof} V \leqslant \kappa$ *и* U *не имеет вида* $U = h\mathbb{N}$, $h \in {}^*\mathbb{N}$, *то* $\mathrm{M}_U \leqslant_\kappa \mathrm{M}_V$ *равносильно тому, что* $\operatorname{cof} U = \operatorname{cof} V$ *и* $\operatorname{wid} U \subseteq \operatorname{wid} V$;

(v) *если* $\operatorname{coi} U \leqslant \kappa$, $\operatorname{coi} V \leqslant \kappa$, *и* U *не имеет вида* $U = h/\mathbb{N}$, $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, *то* $\mathrm{M}_U \leqslant_\kappa \mathrm{M}_V$ *равносильно тому, что* $\operatorname{coi} U = \operatorname{coi} V$ *и* $\operatorname{wid} U \subseteq \operatorname{wid} V$;

(vi) *если* $\operatorname{cof} U \leqslant \kappa$, *но* $\operatorname{coi} V \leqslant \kappa$, *либо наоборот*, $\operatorname{coi} U \leqslant \kappa$, *но* $\operatorname{cof} V \leqslant \kappa$, *то* $\mathrm{M}_U \nleqslant_\kappa \mathrm{M}_V$, *за исключением случая, когда для* U *выполнено* (ii) (3).

Таким образом, монадические отношения линейно $\leqslant_\kappa$-(пред)упорядочены внутри каждого типа конфинальности/коинициальности, между же этими типами связь отсутствует, за исключением отношений, индуцированных сечениями вида $h\mathbb{N}$ и $h/\mathbb{N}$. Открытый вопрос в связи с теоремой состоит в следующем: если $\kappa < \mathfrak{c}$ и $U = h/\mathbb{N}$ для некоторого $h \in {}^*\mathbb{N}$, а V – κ-детерминированное аддитивное сечение с $\omega < \operatorname{coi} U \leqslant \kappa$, то может ли иметь место $\mathrm{M}_U \leqslant_\kappa \mathrm{M}_V$?

Отметим, что для случая $\kappa = \aleph_0$ теорема 3.1 доказана в [4].

4. Предварительные замечания и начало доказательства. Мы начнем со следующего определения. Назовем внутреннее множество $X \subseteq {}^*\mathbb{N}$ *разреженным*, если существует число $s \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ такое, что значение $\#(X \cap I)/s$ бесконечно мало для любого интервала I в ${}^*\mathbb{N}$ длины s.

Предложение 4.1. *В условиях теоремы* 3.1 ${}^*\mathbb{N}$ *не является объединением разреженных внутренних множеств в числе* $\leqslant \kappa$.

Доказательство. В силу насыщенности из покрытия внутренними множествами в числе $\leqslant \kappa$ можно выделить конечное подпокрытие, поэтому достаточно доказать утверждение для конечных объединений. Пусть

$$ {}^*\mathbb{N} = \bigcup_{k \leqslant n} X_k, $$

где $n \in \mathbb{N}$ и каждое X_k – разреженное множество с параметром $s_k \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Положим $s = s_0 \cdot s_1 \cdots s_n$ и $I = [0, s)$. Тогда $\#(X_k \cap I)/s$ бесконечно мало для любого k, откуда сразу следует противоречие, поскольку n конечно.

Доказательство теоремы 3.1 мы начинаем с нескольких простых ее пунктов.

(i) Пусть $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus U$. Отображение $x \mapsto [xh]$ доказывает $\mathrm{D}_{{}^*\mathbb{N}} \leqslant_\kappa \mathrm{M}_U$.

(ii) Если M_U имеет κ-детерминированную трансверсаль, то оно является κ-гладким. (Положим, для $x \in {}^*\mathbb{N}$, $f(x) = t_x$, где t_x – тот единственный элемент трансверсали, который эквивалентен x.)

Теперь допустим, что M_U является κ-гладким, т.е. $\mathrm{M}_U \leqslant_\kappa \mathrm{D}_{{}^*\mathbb{N}}$. Тогда $\mathrm{M}_U \leqslant_\kappa \mathrm{M}_V$ для любого другого аддитивного κ-детерминированного сечения согласно (i), так что U может быть только сечением типа (ii) (3) в силу (vi).

Наконец, допустим, что U – сечение типа (ii) (3). Для случая, когда $U = h\mathbb{N}$, $h \in {}^*\mathbb{N}$, существование даже счетно детерминированных трансверсалей доказано в [3] (см. также [4]). Допустим теперь, что $U = h/\mathbb{N}$, $h \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$, и выполнено неравенство $\mathfrak{c} \leqslant \kappa$. В этом случае M_U не имеет счетно детерминированных трансверсалей ([3], см. также [4] или 9.7.14 в [5]). Однако неравенство $\mathfrak{c} \leqslant \kappa$ упрощает ситуацию. В самом деле, ограниченное отношение $\mathrm{M}_U \restriction [0, h)$ имеет, очевидно, ровно $\mathfrak{c}$ классов эквивалентности, а раз $\mathfrak{c} \leqslant \kappa$, то выбрав в каждом из них по элементу, мы получим

κ-детерминированную трансверсаль $T \subseteq [0,h)$ для $\mathrm{M}_U \restriction [0,h)$ по лемме 1.1. Остается репродуцировать копию T в каждом из интервалов вида $[ph, ph+h)$, $p \in {}^*\mathbb{N}$, при помощи соответствующего сдвига.

(iii) M_U является κ-гладким по (ii). Теперь используем (i).

Доказательства остальных утверждений теоремы проведены в следующих пунктах.

5. Конфинальные сечения. Здесь мы докажем пункт (iv) теоремы в направлении $\Leftarrow$. Фиксируем возрастающие последовательности $\{u_\xi\}_{\xi<\vartheta}$ и $\{v_\eta\}_{\eta<\tau}$, конфинальные соответственно в U и V; $\vartheta = \operatorname{cof} U \leqslant \kappa$ и $\tau = \operatorname{cof} V \leqslant \kappa$ – бесконечные регулярные кардиналы.

Итак, мы предполагаем, что $\mathrm{M}_U \leqslant_\kappa \mathrm{M}_V$. Это означает, что найдется κ-детерминированное множество $R \subseteq {}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{N}$, удовлетворяющее условиям $\operatorname{dom} R = {}^*\mathbb{N}$ и

$$xRy \wedge x'Ry' \;\Rightarrow\; (|x-x'| \in U \Leftrightarrow |y-y'| \in V)\ [4] \tag{4}$$

для всех $x, y, x', y' \in {}^*\mathbb{N}$. По определению (2) имеем $R = \bigcup_{b \in B} R_b$, где $B \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$, $R_b = \bigcap_{\zeta<\kappa} R_\zeta$ для каждого $b \subseteq \kappa$, и все множества $R_\zeta \subseteq {}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{N}$ внутренние.

Часть 1. Докажем, что $\operatorname{wid} U \subseteq \operatorname{wid} V$. Предположим противное, т.е. $\operatorname{wid} U \not\subseteq \operatorname{wid} V$, и пусть $e \in \operatorname{wid} U \setminus \operatorname{wid} V$. Утверждается следующее:

для любого $b \in B$ найдется конечное множество $a(b) \subseteq b$ такое, что множество $D_b = \operatorname{dom} R_{a(b)}$ разреженное в смысле предложения 4.1. (5)

Отсюда следует противоречие с 4.1, поскольку ${}^*\mathbb{N} = \operatorname{dom} R = \bigcup_{b \in B} D_b$ (из-за того, что $R_b \subseteq R_{a(b)}$), а с другой стороны совокупность всех конечных множеств $a \subseteq \kappa$ имеет мощность κ.

Для доказательства (5) зафиксируем $b \in B$. Мы имеем $R_b \subseteq R$, так что

$$(\forall\, \zeta \in b\ \ (xR_\zeta y \wedge x'R_\zeta y') \wedge \exists\, \eta < \tau(|y-y'| < v_\eta)) \;\Rightarrow\; (\exists\, \xi < \vartheta\ \ (|x-x'| < u_\xi))$$

для всех $x, x', y, y' \in {}^*\mathbb{N}$ согласно (4). Выводим, используя κ^+-насыщенность, что

$$\begin{gathered}\forall\, \eta < \tau \quad \exists^{\text{fin}}\, a \subseteq b \quad \exists\, \xi < \vartheta \quad \forall\, x, x', y, y' \in {}^*\mathbb{N}: \\ xR_a y \wedge \exists\, x'R_a y' \wedge |y-y'| < v_\eta \;\Rightarrow\; |x-x'| < u_\xi,\end{gathered} \tag{6}$$

где $\exists^{\text{fin}}\, a$ означает: существует конечное a. Аналогичное рассуждение дает

$$\begin{gathered}\forall\, \xi' < \vartheta \quad \exists^{\text{fin}}\, a' \subseteq b \quad \exists\, \eta' < \tau \quad \forall\, x, x', y, y' \in {}^*\mathbb{N}: \\ xR_{a'} y \wedge x'R_{a'} y' \wedge |x-x'| < u_{\xi'} \;\Rightarrow\; |y-y'| < v_{\eta'}.\end{gathered} \tag{7}$$

По выбору $e \in \operatorname{wid} U \setminus \operatorname{wid} V$ найдется индекс $\eta < \tau$ такой, что $ev_\eta \notin V$, и в то же время $eu_\xi \in U$ для любого ξ. Возьмем a и ξ так, чтобы было выполнено (6) для этого η. Поскольку $eu_\xi \in U$, существует индекс $\xi' > \xi$ такой, что $u_{\xi'}/u_\xi > e$, причем, поскольку U – быстрое сечение, то мы можем, не ограничивая общности, предполагать, что отношение $(u_{\xi'}/u_\xi) : e$ бесконечно велико. Теперь возьмем m' и

[4] Если R – бинарное отношение (множество пар), то xRy означает, что $\langle x, y\rangle \in R$.

η' так, что выполнено (7). Можно предполагать, что $a \subseteq a'$ и $\eta \leqslant \eta'$ – иначе берем объединение в первом случае и максимум во втором. Тогда, для всех $\langle x, y\rangle$, $\langle x', y'\rangle$ из множества $R_{a'}$ выполнено

$$|y-y'| < v_\eta \ \Rightarrow\ |x-x'| < u_\xi \qquad \text{и} \qquad |x-x'| < u_{\xi'} \ \Rightarrow\ |y-y'| < v_{\eta'}. \tag{8}$$

Для доказательства разреженности множества $D_b = \operatorname{dom} R_{a'}$ заметим, что любой интервал в ${}^*\mathbb{N}$ длины $v_{\eta'}$ состоит примерно из $s = v'_\eta / v_\eta$ подынтервалов длины v_η. Соответственно, любой интервал длины $v_{\xi'}$ состоит примерно из $t = u'_\xi / u_\xi$ подынтервалов длины u_ξ. При этом дробь s/t бесконечно мала по выбору ξ'. Теперь из (8) следует, что дробь $\#(I \cap D_b)/\#(I)$ бесконечно мала для любого интервала I в ${}^*\mathbb{N}$ длины $u_{\xi'}$. Значит, D_b – разреженное множество, что и требовалось.

Часть 2. Выведем равенство $\operatorname{cof} U = \operatorname{cof} V$, т.е. докажем $\vartheta = \tau$. Пусть напротив, $\vartheta \neq \tau$, например, для определенности, $\vartheta < \tau$. Опять достаточно доказать (5). Пусть $b \in B$. Из мощностных соображений существует индекс $\eta < \tau$ такой, что (7) выполнено сразу для всех $\xi' < \vartheta$, так что

$$\begin{gathered} \forall\, \xi' < \vartheta \quad \exists^{\text{fin}}\, a' \subseteq b \quad \forall\, x, x', y, y' \in {}^*\mathbb{N}\colon \\ xR_{a'}y \wedge x'R_{a'}y' \wedge |x-x'| < u_{\xi'} \ \Rightarrow\ |y-y'| < v_\eta. \end{gathered} \tag{9}$$

Возьмем индекс $\xi < \vartheta$ и конечное $a \subseteq b$ так, чтобы (6) имело место для этого η, а затем применим (9) для такого $\xi' > \xi$, что отношение $u_{\xi'}/u_\xi$ бесконечно велико. Получим конечное $a' \subseteq b$ такое, что $a \subseteq a'$ и для всех $x, x' \in D_b = \operatorname{dom} R_{a'}$ выполнено

$$|x-x'| < u_{\xi'} \ \Rightarrow\ |x-x'| < u_\xi. \tag{10}$$

Отсюда и следует, что множество D_b разреженное.

Если же $\tau < \vartheta$, то порядок рассуждений несколько иной. Именно, существует ординал $\xi < \vartheta$ такой, что (6) выполнено сразу для всех $\eta' < \tau$, так что

$$\begin{gathered} \forall\, \eta' < \tau \quad \exists^{\text{fin}}\, a \subseteq b \quad \forall\, x, x', y, y' \in {}^*\mathbb{N}\colon \\ xR_a y \wedge x'R_a y' \wedge |y-y'| < v_{\eta'} \ \Rightarrow\ |x-x'| < u_\xi. \end{gathered} \tag{11}$$

Выберем $\xi' > \xi$ так, что отношение $u_{\xi'}/u_\xi$ бесконечно велико, и возьмем ординал $\eta' < \tau$ и конечное $a' \subseteq b$ так, чтобы (7) имело место для ξ', а затем применим (11) для η'. Опять получим конечное $a \subseteq b$ такое, что $a' \subseteq a$ и для всех $x, x' \in D_b = \operatorname{dom} R_a$ выполняется (10), и так далее.

6. Коинициальные сечения. Доказываем импликацию $\Leftarrow$ пункта (v) теоремы. Здесь выкладки отличаются от данных в п. 5 лишь в некоторых достаточно очевидных деталях. Мы дадим лишь набросок вывода $\operatorname{wid} U \subseteq \operatorname{wid} V$. Начинаем с *убывающих* последовательностей $\{u_\xi\}_{\xi<\vartheta}$ и $\{v_\eta\}_{\eta<\tau}$, коинициальных соответственно в U и V.

Предположим противное, т.е. пусть $e \in \operatorname{wid} U \setminus \operatorname{wid} V$. Та же последовательность рассуждений, что и в п. 5, приводит к соотношениям

$$\begin{gathered} \forall\, \eta < \tau \quad \exists^{\text{fin}}\, a \subseteq b \quad \xi < \vartheta \quad \forall\, x, x', y, y' \in {}^*\mathbb{N}\colon \\ xR_a y \wedge x'R_a y' \wedge |x-x'| < u_\xi \ \Rightarrow\ |y-y'| < v_\eta, \end{gathered} \tag{6'}$$

$$\begin{gathered} \forall \xi' < \vartheta \quad \exists^{\text{fin}}\, a' \subseteq b \quad \eta' < \tau \quad \forall\, x, x', y, y' \in {}^*\mathbb{N}\colon \\ xR_{a'} y \wedge x'R_{a'} y' \wedge |y-y'| < v_{\eta'} \ \Rightarrow\ |x-x'| < u_{\xi'}, \end{gathered} \tag{7'}$$

и далее к двум парам индексов $\xi < \xi'$ и $\eta < \eta'$ таким, что $v_\eta / v_{\eta'} < e$, $u_\xi / u_{\xi'} > e$, и следующей форме ключевого соотношения (8):

$$|y - y'| < v_{\eta'} \ \Rightarrow\ |x - x'| < u_{\xi'} \qquad \text{и} \qquad |x - x'| < u_\xi \ \Rightarrow\ |y - y'| < v_\eta. \tag{8'}$$

Поскольку U – быстрое сечение, то снова ξ' можно выбрать так, что отношение $(u_\xi / u_{\xi'}) : e$ бесконечно велико, и получить противоречие тем же способом.

7. Смешанный случай. Здесь мы доказываем пункт (vi) теоремы 3.1. Предположим противное: κ-детерминированное множество $R \subseteq {}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{N}$ обеспечивает $\mathrm{M}_U \leqslant_\kappa \mathrm{M}_V$, т.е. $\operatorname{dom} R = {}^*\mathbb{N}$ и выполнено (4). Как и выше, $R = \bigcup_{b \in B} R_b$, где $B \subseteq \mathscr{P}(\kappa)$, $R_b = \bigcap_{\zeta < \kappa} R_\zeta$ и все множества $R_\zeta \subseteq {}^*\mathbb{N} \times {}^*\mathbb{N}$ внутренние.

Случай 1: $\operatorname{cof} U \leqslant \kappa$, $\operatorname{coi} V \leqslant \kappa$, U не имеет вида $h\mathbb{N}$. Фиксируем возрастающую конфинальную последовательность $\{u_\xi\}_{\xi < \vartheta}$ в U и убывающую коинициальную последовательность $\{v_\eta\}_{\eta < \tau}$ в ${}^*\mathbb{N} \setminus V$; $\vartheta = \operatorname{cof} U \leqslant \kappa$ и $\tau = \operatorname{coi} V \leqslant \kappa$ – бесконечные регулярные кардиналы.

Фиксируем $b \in B$. Рассуждая как в п. 5, мы получаем следующее:

$$\begin{gathered} \exists^{\mathrm{fin}}\, a \subseteq b \quad \exists\, \xi < \vartheta \quad \exists\, \eta < \tau \quad \forall\, x, x', y, y' \in {}^*\mathbb{N}: \\ x R_a y \wedge x' R_a y' \wedge |y - y'| < v_\eta \ \Rightarrow\ |x - x'| < u_\xi, \end{gathered} \tag{12}$$

а в обратном направлении

$$\begin{gathered} \forall\, \xi' < \vartheta \quad \forall\, \eta < \tau \quad \exists^{\mathrm{fin}}\, a' \subseteq b \quad \forall\, x, x', y, y' \in {}^*\mathbb{N}: \\ x R_{a'} y \wedge x' R_{a'} y' \wedge |x - x'| < u_{\xi'} \ \Rightarrow\ |y - y'| < v_\eta. \end{gathered} \tag{13}$$

Возьмем ξ, η, a такие, как в (12), затем $\xi' \geqslant \xi$ такое, что $u_{\xi'} / u_\xi$ бесконечно велико, и, наконец, a' такое, как в (13), для ξ', удовлетворяющее $a \subseteq a'$. Тогда для всех x, x' из множества $D_b = \operatorname{dom} R_{a'}$ выполнено

$$|x - x'| < u_{\xi'} \ \Rightarrow\ |x - x'| < u_\xi,$$

так что множество D_b является разреженным. Это доказывает (5) и приводит к искомому противоречию.

Случай 2: $\operatorname{coi} U \leqslant \kappa$, $\operatorname{cof} V \leqslant \kappa$, и либо U не имеет вида $h/\mathbb{N}$, либо $U = h/\mathbb{N}$ и $\kappa < \mathfrak{c}$. Фиксируем убывающую коинициальную последовательность $\{u_\xi\}_{\xi < \vartheta}$ в ${}^*\mathbb{N} \setminus U$ и возрастающую конфинальную последовательность $\{v_\eta\}_{\eta < \tau}$ в V.

Фиксируем $b \in B$. Как и выше, получаем

$$\begin{gathered} \exists^{\mathrm{fin}}\, a \subseteq b \quad \exists\, \xi < \vartheta \quad \exists\, \eta < \tau \quad \forall\, x, x', y, y' \in {}^*\mathbb{N}: \\ x R_a y \wedge x' R_a y' \wedge |x - x'| < u_\xi \ \Rightarrow\ |y - y'| < v_\eta, \end{gathered} \tag{14}$$

а в обратном направлении

$$\begin{gathered} \forall\, \xi' < \vartheta \quad \forall\, \eta < \tau \quad \exists^{\mathrm{fin}}\, a' \subseteq b \quad \forall\, x, x', y, y' \in {}^*\mathbb{N}: \\ x R_{a'} y \wedge x' R_{a'} y' \wedge |y - y'| < v_\eta \ \Rightarrow\ |x - x'| < u_{\xi'}. \end{gathered} \tag{15}$$

Возьмем ξ, η, a такие, как в (12), а затем $a' \supseteq a$ такое, как в (13), но для какого-нибудь $\xi' > \xi$. Тогда для всех x, x' из множества $D_b = \operatorname{dom} R_{a'}$ выполнено соотношение

$$|x - x'| < u_\xi \ \Rightarrow\ |x - x'| < u_{\xi'}.$$

Если $U \neq h/\mathbb{N}$, то ξ' можно выбрать так, что u'_ξ/u_ξ бесконечно мало. В этом случае каждое множество D_b оказывается разреженным, и так далее.

Остается рассмотреть случай, когда $U = h/\mathbb{N}$, $h \in {}^*\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}$, и $\kappa < \mathfrak{c}$. Можно считать, что $\vartheta = \mathbb{N}$ и $u_\xi = h/\xi$ для всех $\xi \in \mathbb{N}$. Здесь идея с разреженными множествами не работает, и приходится действовать по-другому.

Зафиксируем $b \in B$ и возьмем ξ, η, $a = a(b)$ в соответствии с (14). Заметим, что $|y - y'| < v_\eta$ влечет $y \,\mathrm{M}_V\, y'$, а это в свою очередь равносильно $x \,\mathrm{M}_U\, x'$ при условии, что xRy и $x'Ry'$. Тем самым, для всех $x, x' \in D_b = \operatorname{dom} R_{a(b)}$ выполнено $|x - x'| < u_\xi \ \Rightarrow\ x \,\mathrm{M}_U\, x'$. Однако интервал $I = [0, h]$ в ${}^*\mathbb{N}$ разбивается на конечное число ξ подынтервалов длины u_ξ. Поэтому $D_b \cap I$ пересекает лишь конечное число классов M_U-эквивалентности. Но мы имеем лишь $\leqslant \kappa$ множеств вида $a(b)$ (поскольку $\operatorname{card} \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(\kappa) = \kappa$), а потому и $\leqslant \kappa$ множеств вида $D_b = \operatorname{dom} R_{a(b)}$, а их объединение накрывает ${}^*\mathbb{N}$. Таким образом, I пересекает $\leqslant \kappa$ M_U-классов, что противоречит неравенству $\kappa < \mathfrak{c} = \operatorname{card}(I/\,\mathrm{M}_U)$.

8. Построение редукций. Здесь доказывается импликация $\Rightarrow$ в пунктах (iv) и (v) теоремы 3.1.

(iv) Предположим, что $\operatorname{coi} U = \operatorname{coi} V = \vartheta \leqslant \kappa$ (ϑ – бесконечный регулярный кардинал) и $\operatorname{wid} U \subseteq \operatorname{wid} V$, и докажем, что $\mathrm{M}_U \leqslant_\kappa \mathrm{M}_V$. Выберем возрастающие конфинальные последовательности $\{u_\xi\}_{\xi<\vartheta}$, $\{v_\xi\}_{\xi<\vartheta}$ в U и V соответственно. Согласно аддитивности сечений можно предполагать, что все члены u_ξ, v_ξ этих последовательностей являются гиперцелыми степенями числа 2 в ${}^*\mathbb{N}$.

Соотношение $\operatorname{wid} U \subseteq \operatorname{wid} V$ означает, что

$$\forall \eta \quad \exists \xi \quad \forall \xi' > \xi \quad \exists \eta' > \eta \qquad \left(\frac{u_{\xi'}}{u_\xi} \leqslant \frac{v_{\eta'}}{v_\eta}\right).$$

(Здесь и по ходу доказательства ξ, ξ', η, η', ζ обозначают ординалы $< \vartheta$.)

Это позволяет выделить неограниченную подпоследовательность в $\{u_\xi\}_{\xi<\vartheta}$ такую, что после перенумерации выполняется следующее:

$$\forall \zeta \quad \forall \xi > \zeta \quad \exists \eta > \zeta \qquad \left(\frac{u_\xi}{u_\zeta} \leqslant \frac{v_\eta}{v_\zeta}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{v_\zeta}{u_\zeta} \leqslant \frac{v_\eta}{u_\xi}\right),$$

а затем выделить неограниченную подпоследовательность теперь уже в $\{v_\eta\}_{\eta<\vartheta}$ такую, что после перенумерации выполняется

$$\forall \xi < \eta < \vartheta \qquad \left(\frac{v_\xi}{u_\xi} \leqslant \frac{v_\eta}{u_\eta}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{u_\eta}{u_\xi} \leqslant \frac{v_\eta}{v_\xi}\right). \tag{16}$$

В этих предположениях, функция f, отображающая каждое u_ξ в v_ξ, удовлетворяет следующим условиям: $\operatorname{dom} f = \{u_\xi : \xi < \vartheta\}$ (множество мощности ϑ в ${}^*\mathbb{N}$), $\operatorname{dom} f$ и $\operatorname{ran} f$ состоят из степеней числа 2 и $f(u)/u \leqslant f(u')/u'$ для всех $u < u'$ в $\operatorname{dom} f$ согласно (16). Используя κ^+-насыщенность, нетрудно вывести существование внутренней функции φ такой, что

$D = \operatorname{dom}\varphi$ – гиперконечное подмножество ${}^*\mathbb{N}$, $\operatorname{dom} f \subseteq \operatorname{dom}\varphi$, $\varphi(u_\xi) = v_\xi$ для всех ξ, множества D и $Z = \operatorname{ran}\varphi$ состоят из степеней числа 2, и $\varphi(d)/d \leqslant \varphi(d')/d'$ выполнено для всех $d < d'$ в D – тогда, как нетрудно проверить, φ – биекция, множества $D \cap U$, $D \cap V$ конфинальны соответственно в U, V, а множества $D \setminus U$, $D \setminus V$ коинициальны соответственно в ${}^*\mathbb{N} \setminus U, {}^*\mathbb{N} \setminus V$. (17)

Пусть $h = \#(D) = \#(Z)$ и $D = \{d_1, d_2, \dots, d_h\}$, $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_h\}$ в порядке возрастания в ${}^*\mathbb{N}$, так что $z_\nu = \varphi(d_\nu)$ для каждого $\nu = 1, \dots, h$. Раз все члены d_ν, z_ν являются степенями 2, отношения $j_\nu = d_{\nu+1}/d_\nu$ и $k_\nu = z_{\nu+1}/z_\nu$ принадлежат ${}^*\mathbb{N}$, и в наших предположениях $j_\nu \leqslant k_\nu$. Кроме того, $d_1 \in U$ и $z_1 \in V$.

Каждое число $x \in {}^*\mathbb{N}$ допускает единственное внутреннее представление в виде $x = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{h} \alpha_\nu\, d_\nu$, где $\alpha_\nu \in {}^*\mathbb{N}$, $\alpha_0 < d_1$, и $0 \leqslant \alpha_\nu < j_\nu$ для всех $\nu = 1, \dots, h-1$ (но коэффициент α_h, конечно, не ограничен). Можно было бы попробовать взять отображение $\sigma(x) = \sum_{\nu=1}^{h} \alpha_\nu z_\nu$ в качестве редукции M_U к M_V – но это даст не совсем то, что нужно. В самом деле, пусть

$$x = \sum_{\nu=1}^{h} d_\nu \qquad \text{и} \qquad x' = \sum_{\nu=1}^{h-1} (j_\nu - 1)\, d_\nu,$$

так что $x - x' = 1$, но значение $|\sigma(x) - \sigma(x')|$ может быть очень большим в случае, когда, например, $k_\nu > j_\nu$ для всех ν. Требуется определенная модификация.

Допустим, что $x = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{h} \alpha_\nu\, d_\nu \in {}^*\mathbb{N}$, причем опять $\alpha_0 < d_1$ и $0 \leqslant \alpha_\nu < j_\nu$ для $1 \leqslant \nu < h$. Скажем, что x – число *типа* 1, если имеются индексы $1 \leqslant \nu' < \nu'' < h$ такие, что $d_{\nu'} \in U$, $d_{\nu''} \notin U$ и $\alpha_\nu = j_\nu - 1$ для каждого ν из области $\nu' \leqslant \nu \leqslant \nu''$. В этом случае берем наибольшее ν'' и наименьшее ν' такие, что пара ν', ν'' удовлетворяет этому требованию, и определяем $\bar\alpha_\nu = a_\nu$ для всех $\nu < \nu'$ и всех $\nu > \nu''$, затем $\bar\alpha_\nu = 0$ при $\nu' \leqslant \nu \leqslant \nu''$, и, наконец, $\bar\alpha_{\nu''+1} = \alpha_{\nu''+1} + 1$, и полагаем

$$\bar x = \sum_{\nu=1}^{h} \bar\alpha_\nu\, d_\nu.$$

Иначе, говорим, что x – число *типа* 2 и полагаем

$$\bar x = x.$$

Заметим, что $\bar x - x = \alpha_0 + d_{\nu'} \in U$, когда x имеет тип 1.

Теперь доказываем, что *отображение* $\rho(x) = \sigma(\bar x)$ *удовлетворяет* (3), т.е.

$$|x - x'| \in U \ \Leftrightarrow\ |\sigma(\bar x) - \sigma(\bar y)| \in V \qquad \text{для всех} \quad x, x' \in {}^*\mathbb{N}.$$

Предположим, что

$$x = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{h} \alpha_\nu d_\nu \qquad \text{и} \qquad y = \gamma_0 + \sum_{\nu=1}^{h} \gamma_\nu d_\nu,$$

где $\alpha_0, \gamma_0 < d_1$ и $\alpha_\nu, \gamma_\nu < j_\nu$ для всех $1 \leqslant \nu < h$. Предположим, что $|x - y| \in U$, следовательно, $|x - y| < d_\nu \in U$ для подходящего $1 \leqslant \nu < h$. Пусть, для определенности, $x < y$. Можно предполагать, что числа x, y имеют тип 2, в частности,

$\alpha_0 = \gamma_0 = 0$. (Иначе заменим их на $\bar{x}$, $\bar{y}$.) Тогда существует бесконечно (но гиперконечно) много индексов $\nu' > \nu$ таких, что $\alpha_{\nu'} \neq j_{\nu'} - 1$. Мы имеем $\alpha_{\nu'} = \gamma_{\nu'}$ для любого $\nu' \geqslant \nu$ согласно предположению $|x-y| < d_\nu$. Тем самым, $|\sigma(x)-\sigma(y)| \in V$ (поскольку $j_{\nu'} \leqslant k_{\nu'}$ для всех ν'), что и требовалось.

Теперь пусть $x<y$ таковы, как указано выше (и типа 2), но $|x-y| \notin U$. Множество $D'' = \{d_\nu \in D : \alpha_\nu \neq \gamma_\nu\}$ внутреннее, значит, оно имеет наибольший элемент $d_{\nu''} = \max D''$. При этом $d_{\nu''} \notin U$. (Иначе $|x-y| \in U$, см. выше.) Итак, $\alpha_{\nu''} < \gamma_{\nu''}$ (так как $x<y$). В этом случае единственной возможностью для $|\sigma(x)-\sigma(y)| \in V$ является существование индекса $\nu' < \nu''$ такого, что $z_{\nu'} \in V$ и $\gamma_\nu = 0$, $\alpha_\nu = j_\nu - 1 = k_\nu - 1$ для всех ν между ν' и ν''. Но это противоречит тому, что x имеет тип 2. Таким образом, $|\sigma(x)-\sigma(y)| \notin V$, что и требовалось.

Остается проверить, что ρ есть κ-детерминированное отображение. Заметим, что σ – очевидно, даже внутренняя функция, так что остается разобраться с отображением $x \mapsto \bar{x}$. Оно, конечно, не внутреннее, но формулы, выражающие то, что x – число типа 1 и $y=\bar{x}$, могут быть представлены как пропозициональные внутренних отношений с операциями объединения и пересечения в числе $\leqslant \kappa$ (так как U имеет конфинальную подпоследовательность из $\leqslant \kappa$ членов), после чего результат следует из леммы 1.1.

(v) Теперь мы предположим, что $\operatorname{coi} U = \operatorname{coi} V = \vartheta \leqslant \kappa$ и $\operatorname{wid} U \subseteq \operatorname{wid} V$, и докажем, что $\mathrm{M}_U \leqslant_\kappa \mathrm{M}_V$. Выберем убывающие коинициальные последовательности $\{u_\xi\}_{\xi<\vartheta}$, $\{v_\xi\}_{\xi<\vartheta}$ в ${}^*\mathbb{N} \setminus U$ и ${}^*\mathbb{N} \setminus V$ соответственно. Можно предполагать, что все члены u_ξ, v_ξ этих последовательностей являются гиперцелыми степенями числа 2 в ${}^*\mathbb{N}$. Соотношение $\operatorname{wid} U \subseteq \operatorname{wid} V$ означает в этом случае, что

$$\forall \eta \quad \exists \xi \quad \forall \xi' > \xi \quad \exists \eta' > \eta \qquad \biggl(\frac{u_{\xi'}}{u_\xi} \geqslant \frac{v_{\eta'}}{v_\eta}\biggr).$$

Как и в доказательстве (iv), можно выделить неограниченные подпоследовательности в $\{u_\xi\}_{\xi<\vartheta}$ и $\{v_\eta\}_{\eta<\vartheta}$ такие, что после перенумерации выполняется

$$\forall \xi < \eta < \vartheta \qquad \biggl(\frac{v_\xi}{u_\xi} \geqslant \frac{v_\eta}{u_\eta}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{u_\eta}{u_\xi} \geqslant \frac{v_\eta}{v_\xi}\biggr). \tag{18}$$

Снова функция $f(u_\xi) = v_\xi$ допускает продолжение до внутренней функции φ, удовлетворяющей (17), и т.д. как выше.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] H. J. Keisler, K. Kunen, A. Miller, S. Leth, “Descriptive set theory over hyperfinite sets”, *J. Symbolic Logic*, **54**:4 (1989), 1167–1180.

[2] H. J. Keisler, S. C. Leth, “Meager sets on the hyperfinite time line”, *J. Symbolic Logic*, **56**:1 (1991), 71–102.

[3] R. Jin, “Existence of some sparse sets of nonstandard natural numbers”, *J. Symbolic Logic*, **66**:2 (2001), 959–973.

[4] V. Kanovei, M. Reeken, “Borel and countably determined reducibility in nonstandard domain”, *Monatsh. Math.*, **140**:3 (2003), 197–231.

[5] V. Kanovei, M. Reeken, *Nonstandard Analysis*, *Axiomatically*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, Berlin, 2004.

[6] G. Hjorth, “Classification and Orbit Equivalence Relations”, *Mathematical Surveys and Monographs*, 75, AMS, Providence, RI, 2000.

[7] A. S. Kechris, “New directions in descriptive set theory”, *Bull. Symbolic Logic*, **5**:2 (1999), 161–174.

[8] Е. И. Гордон, А. Г. Кусраев, С. С. Кутателадзе, *Инфинитезимальный анализ*, ч. 1, 2, Изд-во ИМ РАН, Новосибирск, 2001.

[9] В. А. Успенский, *Что такое нестандартный анализ?*, Наука, М., 1987.

[10] T. Lindstrøm, “An invitation to nonstandard analysis”, *Nonstandard Analysis and its Applications* (Hull, 1986), London Math. Soc. Stud. Texts, **10**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988, 1–105.

[11] A. Robinson, *Non-standard Analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1966.

[12] Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн, *Теория моделей*, Мир, М., 1977.

[13] В. Г. Кановей, “Идеи А. Н. Колмогорова в теории операций над множествами”, *УМН*, **43**:6 (1988), 93–128.

[14] K. Čuda, P. Vopenka, “Real and imaginary classes in the alternative set theory”, *Comment. Math. Univ. Carolin.*, **20**:4 (1979), 639–653.

[15] C. W. Henson, “Unbounded Loeb measures”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **64**:1 (1979), 143–150.

В. Г. Кановей
Институт проблем передачи информации РАН, Москва
E-mail: kanovei@mccme.ru

В. А. Любецкий
Институт проблем передачи информации РАН, Москва
E-mail: lyubetsk@iitp.ru

М. Реекен
Университет Вупперталя, Германия
E-mail: reeken@math.uni-wuppertal.de

Поступило
20.12.2005
Исправленный вариант
24.08.2006