Математические заметки

Том 82 выпуск 3 сентябрь 2007

УДК 510.225

Нестандартные представления локально компактных групп

В. А. Любецкий, С. А. Пирогов

В заметке доказано, что бесконечномерное унитарное представление T прямого произведения групп $G = K \times N$, где K – компактная группа и N – локально компактная абелева группа, при естественных ограничениях изображается представлением нестандартного аналога $\widetilde{G}$ группы G в группе нестандартных матриц фиксированного нестандартного размера.

Библиография: 12 названий.

Введение. Булевозначный анализ, как и вообще нестандартный анализ, направлен на *изображение* (термин, появившийся в сходной ситуации у Новикова [1], или более привычный, но уже занятый термин – *представление*) более сложных математических объектов с помощью более простых, но зато последние рассматриваются в рамках нестандартной теории множеств. Эта теория множеств выступает здесь в форме модели, а именно, в форме булевозначного универсума V^B (см. [2]), где B – любая фиксированная полная булева алгебра. В качестве B подбирается булева алгебра, связанная с той или иной рассматриваемой проблемой (в нашем случае B будет булевой алгеброй попарно коммутирующих проекторов в алгебре операторов). Для разных проблем в качестве B рассматривают разные конкретные булевы (еще один пример – булева алгебра всех центральных идемпотентов кольца) или даже гейтинговы (например, решетка всех открытых множеств топологического пространства) и квантовые алгебры (иногда их называют квантовые логики; это, например, решетка всех линейных подпространств в любом $\mathbb{R}^n$) и т.д. Более сложные алгебры B приводят к более сложно организованному универсуму V^B, свойства которого труднее изучать, но зато исходные "стандартные" (т.е. из V^{Z_2}) объекты изображаются все более простыми "нестандартными" (т.е. из V^B) объектами. В этом смысле "простейший" универсум V^B, соответствующий как раз традиционной "стандартной" теории множеств, получается, когда B является простейшей алгеброй $Z_2 = \{0,1\}$; это будет самый обычный *класс всех множеств* $V \simeq V^{Z_2}$, который состоит по определению из "стандартных" математических объектов. Класс V канонически вкладывается в любой универсум V^B с помощью отображения $x^\vee \colon V^{Z_2} \to V^B$, индуцированного вложением алгебр $b^\vee \colon Z_2 \to B$, которое переводит 0 в 0_B и 1 в 1_B, где 0_B – наименьший и 1_B – наибольший элементы в B (см., например, [2], [3]). Для всех формул $\varphi(f_1,\dots,f_n)$ в обычном языке теории множеств с исходными двуместными отношениями '$\in$' и '$=$', где параметры $f_1,\dots,f_n \in V^B$, определяется *оценка* (также говорят: степень достоверности, "вероятность") того, что суждение $\varphi(f_1,\dots,f_n)$ верно в V^B. Эта оценка обозначается $[\![\varphi(f_1,\dots,f_n)]\!]$ и является элементом из B.

В частности, подразумевается, что упомянутые выше V^{Z_2} и V^B факторизованы отношением эквивалентности

$$[\![f=g]\!]=1_B,$$

где $f,g\in V^B$.

В заметке рассматривается бесконечномерное унитарное представление T прямого произведения групп $G=K\times N$, где K – компактная группа и N – локально компактная абелева группа. При естественных ограничениях это представление изображается представлением нестандартного аналога $\widetilde{G}$ группы G в группе нестандартных матриц фиксированного нестандартного размера. Случай, когда G – локально компактная абелева группа, рассмотрен в [4], [5] и даже в более общем виде, чем здесь, а именно, для представлений группы G в банаховом пространстве $\mathscr{H}$ спектральными операторами скалярного типа. В абелевом случае изображением операторов в комплексном банаховом пространстве являются нестандартные комплексные числа, которые, сами по себе, образуют коммутативную алгебру. В рассматриваемом теперь случае неабелевой группы G вместо нестандартных чисел естественно возникают нестандартные квадратные матрицы. Отметим, что такие матрицы имеют размер $n\times n$, где n – нестандартное натуральное число и их матричные элементы – нестандартные комплексные числа. При этом нестандартные комплексные числа обладают всеми свойствами обычного поля комплексных чисел и то же выполняется для кольца нестандартных матриц.

Нестандартная группа $\widetilde{G}$ определяется как *нестандартное пополнение* по левой равномерной структуре, порожденной всеми окрестностями нейтрального элемента группы G. Для рассматриваемого ниже класса групп, состоящего из коммутативных групп, компактных групп и их прямых произведений, левая и правая равномерные структуры совпадают. *Нестандартное пополнение* $\widetilde{X}$ равномерного пространства X было введено в работе [4] (см. также [2], [5]).

Цель изображения состоит в *переносе* свойств, в нашем случае свойств нестандартного гомоморфизма $\widetilde{T}$ (со значениями в алгебре нестандартных комплексных матриц фиксированного размера; такое $\widetilde{T}$ будет специально построено ниже, в теореме) на исходный стандартный гомоморфизм T. Конечно, такой перенос не может иметь место для произвольных свойств; он выполняется для свойств, записываемых, например, хорновыми формулами языка колец [2], но более важно, что индивидуальный анализ отдельных свойств позволяет получать заключения о T, используя $\widetilde{T}$, например, как это делается в [2].

Предполагается, что читатель знаком с первыми понятиями булевозначного анализа, например, по [2] или [6], и с соответствующими результатами функционального анализа. Изложение строится так, чтобы собственно логические понятия нестандартного анализа, в частности, понятия оценки и универсума V^B, использовались как можно меньше. Поэтому изложение, которое следует ниже, можно рассматривать как пример булевозначного анализа, приведенный без использования логических понятий.

Определения и формулировка результата. Пусть G – группа, являющаяся прямым произведением групп: $G=K\times N$, где K – компактная группа, а N – локально компактная абелева группа. Пусть задано сильно непрерывное унитарное представление T группы G в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть

$\mathbf{A}$ – некоторая алгебра фон Неймана операторов в пространстве $\mathscr{H}$. Предположим, что $\mathbf{A}$ содержит полную сильно замкнутую булеву алгебру $\mathbf{B}$ попарно коммутирующих проекторов. Обозначим $M(G)$ алгебру мер группы G, т.е. алгебру конечных борелевских мер на G с обычным сложением и сверткой в качестве умножения. Предположим, что образ представления T группы G лежит в алгебре $\mathbf{A}$. Тогда естественно определен гомоморфизм алгебры $M(G)$ в $\mathbf{A}$, который обозначим той же буквой T. Обозначим $\Sigma(\mathbf{B})$ слабо замкнутую подалгебру алгебры $\mathbf{A}$, порожденную $\mathbf{B}$. Очевидно, $\Sigma(\mathbf{B})$ – коммутативная алгебра фон Неймана.

Предположим, что выполнены следующие условия.

Условие 1. Образ центра $Z(M(G))$ алгебры $M(G)$ при гомоморфизме T лежит в $\Sigma(\mathbf{B})$.

Условие 2. Операторы $T(g)$ коммутируют с элементами алгебры $\Sigma(\mathbf{B})$.

Условия 1 и 2 имеют естественную квантово-механическую интерпретацию. Именно, $\mathbf{A}$ – алгебра наблюдаемых квантовой системы, $\Sigma(\mathbf{B})$ – алгебра ее “макроскопических наблюдаемых”, G – группа “внутренней симметрии” (условие 2), причем “операторы Казимира”, т.е. элементы центра алгебры мер, сами являются “макроскопическими наблюдаемыми” (условие 1). Свойство “макроскопической наблюдаемости” операторов Казимира лежит в основе всех существующих схем классификации элементарных частиц [7]. Например, слабое замыкание образа центра алгебры мер группы $SU(2)$, действующей в пространстве $\mathscr{H}$, порождено как алгебра фон Неймана центральными идемпотентами P_n, где $n = 1, 2, \dots$, которые в пространстве состояний частиц отвечают проекторам на подпространства состояний с заданным спином $j = (n-1)/2$.

Спектр алгебры $\Sigma(\mathbf{B})$, естественно изоморфный стоунову пространству булевой алгебры $\mathbf{B}$, обозначим S. Из полноты алгебры $\mathbf{B}$ следует, что пространство S экстремально несвязно [8]. Известно [9], что в локально компактной абелевой группе N существует открытая подгруппа вида $N_0 \times \mathbb{R}^n$, где N_0 – компактная абелева группа, $\mathbb{R}$ – аддитивная группа вещественных чисел. Обозначим

$$H = K \times N_0 \times \mathbb{R}^n = G_0 \times \prod_{i=1}^{n} G_i,$$

где $G_0 = K \times N_0$ и $G_i = \mathbb{R}$ для $i = 1, \dots, n$. Очевидно, H – открытая подгруппа в группе G. Ограничение T на подгруппу G_i, $i = 0, 1, \dots, n$, обозначим T_i. Поскольку N лежит в центре группы G, то из условия 1 на гомоморфизм T следует, что образ G_i, $i \geqslant 1$, при отображении T_i лежит в алгебре $\Sigma(\mathbf{B})$, которая, как известно, изоморфна алгебре $C(S)$ непрерывных комплекснозначных функций на компакте S. Выделим в G_i подгруппу Z_i, состоящую из целых чисел. Элемент группы G_i, соответствующий числу 1, обозначим e_i. Тогда $T_i(e_i)$, как элемент алгебры $\Sigma(\mathbf{B})$, соответствует некоторой не обращающейся в 0 непрерывной комплекснозначной функции φ_i на пространстве S.

Поскольку пространство S экстремально несвязно, то каждая ограниченная борелевская функция на S совпадает с точностью до значений на тощем множестве (в другой терминологии: на множестве первой категории) с непрерывной функцией на S. В частности, если взять композицию стандартного комплексного логарифма Ln (с разрезом вдоль отрицательной полуоси) [10] и функции φ_i, то получится ограниченная борелевская функция $\mathrm{Ln}\,\varphi_i$. Поэтому существует непрерывная на S функция, совпадающая с $\mathrm{Ln}\,\varphi_i$ вне некоторого тощего множества. Обозначим ее $\ln\varphi_i$. Очевидно, $\exp(\ln\varphi_i)=\varphi_i$ на дополнении к тощему множеству, а значит, по непрерывности, и всюду на S. Если теперь для $t\in G_i$ положить

$$T_i'(t)=T_i(t)\exp(-t\ln\varphi_i),$$

то T_i' есть гомоморфизм G_i в $\Sigma(\mathbf{B})$ такой, что $T_i'(e_i)=1$, и, следовательно, T_i' можно рассматривать как гомоморфизм компактной группы G_i/Z_i в $\Sigma(\mathbf{B})$.

Поскольку в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ действует C^*-алгебра $\Sigma(\mathbf{B})\simeq C(S)$, то $\mathscr{H}$ можно реализовать в виде прямого интеграла (см. [11] относительно определения прямого интеграла):

$$\mathscr{H}=\int_S^{\oplus}\mathscr{H}(\zeta)\,d\mu(\zeta),$$

где μ – конечная борелевская мера на S, а $\mathscr{H}(\zeta)$ – измеримое поле гильбертовых пространств. Таким образом, любой элемент $\mathscr{H}$ определяет измеримую функцию $h(\zeta)$ со значениями в $\mathscr{H}(\zeta)$, а операторы алгебры $\Sigma(\mathbf{B})$, реализованные как непрерывные числовые функции $f(\zeta)$, $\zeta\in S$, действуют по формуле $f\colon h(\zeta)\mapsto f(\zeta)h(\zeta)$, т.е. как операторы умножения [1]. По условию 2 операторы $T(g)$ коммутируют с $\Sigma(\mathbf{B})$, поэтому они реализуются как измеримые оператор-значные функции $t_g(\zeta)$, которые действуют поточечно, т.е.

$$T(g)\colon h(\zeta)\mapsto t_g(\zeta)h(\zeta).$$

При этом $t_g(\zeta)$ отнюдь не являются числами.

Однако группа G имеет вид $K\times N$, причем по условию 1 образы элементов из абелевого сомножителя N лежат в $\Sigma(\mathbf{B})$, т.е. реализуются непрерывными числовыми функциями на S. Что касается элементов $g\in K$, то воспользуемся тем, что центр алгебры мер $M(K)$ при гомоморфизме T отображается в $\Sigma(\mathbf{B})$.

Напомним, если Π – непрерывное неприводимое представление компактной группы K в конечномерном пространстве $H_\Pi=\mathbb{C}^{n_\Pi}$ и $\chi_\Pi(g)=\mathrm{tr}(\Pi(g))$ – его характер, то

$$P_\Pi=n_\Pi\int_K T(g)\overline{\chi_\Pi(g)}\,dg,$$

где dg – нормированная мера Хаара на K, является проектором и принадлежит образу центра алгебры $M(K)$. Проекторы P_Π образуют разложение единицы в пространстве $\mathscr{H}$.

Поскольку, как уже сказано, образ центра $M(K)$ лежит в $\Sigma(\mathbf{B})$, то проекторы P_Π реализуются непрерывными функциями на S, принимающими значения 0 и 1. Таким образом, проектору P_Π отвечает функция i_Π, являющаяся характеристической функцией открыто-замкнутого подмножества S_Π в S. Множества S_Π попарно не пересекаются, а их объединение $\widetilde{S}$ является множеством полной меры в S. Кроме того, дополнение $S\setminus\widetilde{S}$ является тощим множеством, поскольку точная верхняя

[1] Здесь используется общая форма спектральной теоремы в сепарабельном гильбертовом пространстве, см., например, [12; chap. II, S 6, Theoreme 1, p. 208.]

грань элементов S_Π в алгебре $\mathbf{B}$ является единицей в $\mathbf{B}$. Представление T группы K, ограниченное на образ проектора P_Π, является примарным представлением, кратным представлению Π. Следовательно, для $\zeta \in S_\Pi$ пространство $\mathscr{H}(\zeta)$ представляется в виде $\mathbb{C}^{n_\Pi} \otimes L(\zeta)$, где $L(\zeta)$ – некоторое измеримое поле гильбертовых пространств, а оператор $t_g(\zeta)$ имеет вид $\Pi(g) \otimes 1$. Определим редуцированное гильбертово пространство

$$\mathscr{H}_{\mathrm{red}} = \int_S^{\oplus} \mathbb{C}^{n(\zeta)}\, d\mu(\zeta),$$

где $n(\zeta)$ – целочисленная функция на S, равная n_Π на S_Π. В пространстве $\mathscr{H}_{\mathrm{red}}$ элементы $\Sigma(\mathbf{B})$ действуют, по-прежнему, как операторы умножения на числовые функции, а операторы $T(g)$, $g \in K$, – как матрично-значные функции, принимающие значение $\Pi(g)$ на S_Π. Следовательно, и все операторы $T(g)$, $g \in G$, реализуются как матрично-значные функции на S, причем размер соответствующих матриц $n(\zeta)$ одинаков для всех $g \in G$. Матричные элементы этих матриц являются непрерывными функциями на каждом из S_Π. Обозначим матрично-значную функцию, отвечающую элементу $g \in G$, через $I(g)$. Положим

$$I = \bigl\{ \langle g^\vee, I(g) \rangle\_ \mid g \in G \bigr\}\_,$$

где подчеркивание $U\_$ обозначает тождественно единичную функцию с областью определения U, а U, в свою очередь, состоит из каких-то функций со значениями в $\mathbf{B}$, область определения которых состоит из такого же типа функций. В результате $I \in V^{\mathbf{B}}$ и, конечно, $G^\vee \in V^{\mathbf{B}}$.

Теорема. *Объект I – непрерывная функция на группе $G^\vee$, которая, следовательно, продолжается по непрерывности до непрерывного гомоморфизма $\widetilde{T}$ группы $\widetilde{G}$ в группу комплексных матриц нестандартного размера $n(\zeta)$.*

Здесь $\widetilde{G}$ обозначает результат нестандартного пополнения $G^\vee \in V^{Z_2} \subseteq V^{\mathbf{B}}$ в $V^{\mathbf{B}}$ по естественной равномерной структуре в $G^\vee$. Формально теорема говорит, что указанное в ней утверждение, записанное формулой языка теории множеств Цермело–Френкеля, имеет булеву оценку, соответствующую универсуму $V^{\mathbf{B}}$, равную $1_{\mathbf{B}}$, и это доказуемо в обычной аксиоматике Цермело–Френкеля ZFC.

Доказательство. Из теоремы, приведенной в [4] (см. [2; теорема 24]), сразу следует, что $I(g)$ соответствует нестандартной комплексной матрице нестандартного размера $n(\zeta)$, т.е. значения функции I принадлежат указанной алгебре нестандартных матриц. Достаточно проверить, что I непрерывно в некоторой окрестности нейтрального элемента группы $G^\vee$. В качестве такой окрестности возьмем

$$H^\vee = G_0^\vee \times \prod_{i=1}^{n} G_i^\vee = K^\vee \times N_0^\vee \times \prod_{i=1}^{n} G_i^\vee,$$

где K – компактная группа, N_0 – компактная абелева группа, $G_i = \mathbb{R}$ для $i = 1, \dots, n$. Достаточно проверить, что $I(g)$ непрерывно по отдельности на $K^\vee$, $N_0^\vee$ и $G_i^\vee$, $i = 1, \dots, n$. Начнем с $K^\vee$. Пусть J_0 – совокупность открытых окрестностей нейтрального элемента группы K, $J_0^\vee = \{a^\vee \mid a \in J_0\}\_$, E – единичная матрица (переменного размера, зависящего от $\zeta \in S$). Условие непрерывности I в нейтральном элементе из $K^{\vee}$ состоит в том, что

$$[\![\forall\,\varepsilon \in (\mathbb{Q}_+^{\vee})\ \exists\,O \in J_0^{\vee}\ \forall\,g \in O \quad (\|I(g) - E\| < \varepsilon)]\!] = 1. \tag{1}$$

Здесь впервые появляется оценка, которая определяется следующим образом: кванторам '$\forall$' и '$\exists$' соответствуют операции '$\wedge$' (точная нижняя грань) и '$\vee$' (точная верхняя грань) в алгебре $\mathbf{B}$ (не путать их с пересечением и объединением множеств) и поэтому (1) сводится к равенству

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{O\in J_0}\ \bigwedge_{g\in O}[\![\|I(g^{\vee}) - E\| < \varepsilon^{\vee}]\!] = 1.$$

Это то же самое, что

$$\bigvee_{O\in J_0}\ \bigwedge_{g\in O}[\![\|I(g^{\vee}) - E\| < \varepsilon^{\vee}]\!] = 1$$

для всех $\varepsilon > 0$. Для данного $\varepsilon > 0$ и данного неприводимого представления Π группы K положим

$$O_{\Pi,\varepsilon} = \bigl\{g \in G \mid \|\Pi(g) - E\| < \varepsilon\bigr\}.$$

Проверим, что

$$\forall\,g \in O_{\Pi,\varepsilon} \quad \bigl([\![\|I(g^{\vee}) - E\| < \varepsilon^{\vee}]\!] \geqslant P_{\Pi}\bigr).$$

Действительно, поскольку $t_g(\zeta) = \Pi(g)$ при $\zeta \in S_{\Pi}$, то

$$[\![\|I(g^{\vee})P_{\Pi} - P_{\Pi}\| < \varepsilon^{\vee}]\!] = 1$$

для $g \in O_{\Pi,\varepsilon}$. Следовательно,

$$[\![\|I(g^{\vee}) - E\| < \varepsilon^{\vee}]\!] \geqslant P_{\Pi},$$

где P_{Π} внутри оценки – это скаляр 1 с достоверностью P_{Π} и скаляр 0 с достоверностью $\neg P_{\Pi}$.

Поскольку P_{Π} образуют разбиение единицы в булевой алгебре $\mathbf{B}$, т.е. они дизъюнктны и их точная верхняя грань равна единице в $\mathbf{B}$, отсюда имеем

$$\bigvee_{O\in J_0}\ \bigwedge_{g\in O}[\![\|I(g^{\vee}) - E\| < \varepsilon^{\vee}]\!] = 1.$$

Непрерывность $I(g)$ на $N_0^{\vee}$ доказывается аналогично, с тем отличием, что вместо разбиения единицы (в алгебре $\mathbf{B}$), соответствующего набору неприводимых представлений группы K, берем разбиение единицы, отвечающее неприводимым представлениям (компактной) группы N_0.

Ситуация слегка усложняется для групп $G_i^{\vee}$, поскольку $G_i = \mathbb{R}$ не компактно. Возьмем, скажем, группу G_1. Для $t \in G_1$ имеем

$$T(t) = T_1'(t)\exp(t\ln\varphi_i).$$

Здесь два представления группы G_1: одно T_1' и другое $\tau_1(t) = \exp(t\ln\varphi_i)$. Для каждого из них нужно проверить непрерывность. Представление T_1' является композицией представления T_1' компактной группы G_1/Z_1 и естественной проекции

$G_1 \to G_1/Z_1$. Для представления компактной группы G_1/Z_1 годится предыдущая конструкция, а непрерывность проекции очевидна. Непрерывность представления $\tau_1(t)$ вытекает из следующего факта: для непрерывной функции $a(\zeta)$, $\zeta \in S$, функция $\exp(ta(\zeta))$ непрерывна по совокупности переменных (t,ζ). А именно, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $t(\varepsilon) > 0$ так, чтобы при любом t, $|t| < t(\varepsilon)$, выполнялось неравенство $|\exp(ta(\zeta)) - 1| < \varepsilon$ для всех $\zeta \in S$. Достаточно взять

$$t(\varepsilon) = \frac{1}{\|a\|}\ln(1+\varepsilon), \qquad \text{где} \quad \|a\| = \max|a(\zeta)|.$$

Отсюда следует, что

$$\bigvee_{O\in J_0}\bigwedge_{t\in O} [\![\|\tau_1(t^\vee) - 1\| < \varepsilon^\vee]\!] = 1.$$

Авторы глубоко благодарны В. Г. Кановею за ценное обсуждение этой заметки и благодарят К. Ю. Горбунова за обсуждение и помощь в ее подготовке.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] П. С. Новиков, "О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств", Сборник статей: Посв. акад. И. М. Виноградову к его 60-летию, Тр. МИАН, **38**, Наука, М., 1951, 279–316.

[2] В. А. Любецкий, "Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа", *УМН*, **44**:4 (1989), 99–153.

[3] Т. Йех, *Теория множеств и метод форсинга*, Мир, М., 1973.

[4] Е. И. Гордон, В. А. Любецкий, *Булевозначные расширения равномерных структур* I, деп. в ВИНИТИ 711-80.

[5] В. А. Любецкий, Е. И. Гордон, "Булевы расширения равномерных структур.", *Исследования по неклассическим логикам и формальным системам*, Наука, М., 1983, 81–153.

[6] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, "О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств", *УМН*, **58**:5 (2003), 3–88.

[7] М. В. Терентьев, *Введение в теорию элементарных частиц*, ИТЭФ, М., 1998.

[8] Д. А. Владимиров, *Булевы алгебры*, Наука, М., 1969.

[9] Л. С. Понтрягин, *Непрерывные группы*, ГИТТЛ, М., 1954.

[10] М. А. Евграфов, *Аналитические функции*, Наука, М., 1968.

[11] М. А. Наймарк, *Нормированные кольца*, Наука, М., 1968.

[12] J. Dixmier, *Les algèbras d'opérateurs dans l'espace Hilbertien* (*algèbres de von Neumann*), Gauthier-Villars, Paris, 1969.

В. А. Любецкий
Институт проблем передачи информации РАН
E-mail: lyubetsk@iitp.ru

Поступило
29.11.2005
Исправленный вариант
29.01.2007

С. А. Пирогов
Институт проблем передачи информации РАН
E-mail: pirogov@mail.ru