Математические заметки

Том 91 выпуск 6 июнь 2012

УДК 510.225

Об эффективной компактности и сигма-компактности

В. Г. Кановей, В. А. Любецкий

Используя топологию Ганди–Харрингтона и другие методы эффективной дескриптивной теории множеств, мы доказываем несколько теорем о компактных и σ-компактных множествах. В частности, доказывается, что любое Δ^1_1-множество A бэровского пространства $\mathscr{N}$ либо является не более чем счетным объединением компактных Δ^1_1-множеств, и тогда это множество A σ-компактно, либо же A содержит относительно замкнутое подмножество, гомеоморфное $\mathscr{N}$ (и тогда, разумеется, A не может быть σ-компактным).

Библиография: 12 названий.

1. Введение. Эффективная дескриптивная теория множеств возникла в 1950-е годы в первую очередь как средство для уточнения и упрощения построений классической дескриптивной теории, а также как механизм использования некоторых теорем теории рекурсии для задач дескриптивной теории множеств. Вскоре, однако, выяснилось, что эффективная дескриптивная теория множеств сама приводит к постановке и решению таких задач, которые не имели прямых аналогов в классической дескриптивной теории. Примером может служить следующая *теорема о базисе*: любое счетное Δ^1_1-множество A бэровского пространства $\mathscr{N} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ состоит из Δ^1_1-точек. В классической дескриптивной теории ей отдаленно соответствует теорема Лузина–Новикова о расщеплении плоских борелевских множеств со счетными сечениями.

В настоящей заметке методы эффективной дескриптивной теории множеств применяются к исследованию множеств $A \subseteq \mathscr{N}$ в плане свойств компактности и σ-компактности. Главные результаты таковы:

Теорема 1.1. *Для любого Δ^1_1-множества $A \subseteq \mathscr{N}$ возможно одно и только одно из следующих двух утверждений*:

(I) *A совпадает с объединением U всех множеств вида $[T]$, где $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ – компактное дерево класса Δ^1_1 и $[T] \subseteq A$;*[1]

(II) *имеется множество $Y \subseteq A$, гомеоморфное $\mathscr{N}$ и замкнутое в A.*

Дополнительно, в случае (I), *если $A \neq \varnothing$, то A содержит Δ^1_1-точку.*

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 07-01-00445).

[1] Тогда множество A σ-компактно, поскольку каждый эффективный класс, в частности, класс Δ^1_1, не более чем счетен.

Условия (I) и (II) теоремы, очевидно, несовместимы, поскольку относительно замкнутое подмножество σ-компактного множества само σ-компактно, а пространство $\mathscr{N}$, а значит, и гомеоморфное ему множество Y в (II), не является σ-компактным.

Теорема 1.2. *Для любого Σ^1_1-множества $A \subseteq \mathscr{N}$ возможно одно и только одно из следующих двух утверждений*:

(I) *A включено в объединение U всех множеств вида $[T]$, где $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ есть компактное дерево класса Δ^1_1* [2];

(II) *имеется замкнутое в $\mathscr{N}$ множество $Y \subseteq A$, гомеоморфное $\mathscr{N}$.*

И здесь условия (I) и (II) несовместимы, иначе Y было бы замкнутым подмножеством σ-компактного множества U, что, как мы заметили выше, невозможно.

Отметим, что условие (I) теоремы 1.2 слабее условия (I) теоремы 1.1, и соответственно условие (II) теоремы 1.2 сильнее условия (II) теоремы 1.1. Если мы заменим условие (II) теоремы 1.1 более сильным условием (II) теоремы 1.2, то результат перестанет быть верным. В самом деле, пусть A состоит из всех точек $a \in 2^{\mathbb{N}}$, для которых множество $\{k : a(k) = 1\}$ бесконечно. Тогда A – не σ-компактное Δ^1_1-множество, но оно накрывается компактным множеством $2^{\mathbb{N}}$, а потому заведомо нет множеств $X \subseteq A$, замкнутых в $\mathscr{N}$ и гомеоморфных $\mathscr{N}$. Таким образом, для A не может выполняться ни (I) теоремы 1.1, ни (II) теоремы 1.2.

С другой стороны, если мы заменим условие (I) теоремы 1.1 более слабым условием (I) теоремы 1.2, то результат также становится неверным, в том смысле, что существует множество, именно, то же самое A из предыдущего абзаца, которое удовлетворяет как условию (I) теоремы 1.2, так и условию (II) теоремы 1.1. Оно само гомеоморфно $\mathscr{N}$ посредством отображения, сопоставляющего каждой точке $x \in \mathscr{N}$ точку $a = f(x) \in A$, определенную так, что при любом n значение $x(n)$ равно числу нулей между n-й и $(n+1)$-й единицами последовательности a.

Следствие 1.3. *Любое σ-компактное Δ^1_1-множество $A \subseteq \mathscr{N}$ является счетным объединением компактных Δ^1_1-множеств, и если оно непусто, то содержит Δ^1_1-точку.*

Следствие 1.4. *Если Δ^1_1-множество $A \subseteq \mathscr{N}$ не σ-компактно, то оно содержит подмножество, гомеоморфное $\mathscr{N}$ и замкнутое в A. Если Σ^1_1-множество $A \subseteq \mathscr{N}$ не накрыто σ-компактным множеством, то оно содержит подмножество, гомеоморфное $\mathscr{N}$ и замкнутое в $\mathscr{N}$.*

Как обычно, обе теоремы и следствия сохраняют силу в релятивизованной форме, т.е. когда классы Δ^1_1 и Σ^1_1 заменяются на классы вида $\Delta^1_1(p)$ и $\Sigma^1_1(p)$ соответственно, где $p \in \mathscr{N}$ – произвольный фиксированный параметр, причем те же самые доказательства подходят и для релятивизованных форм. Мы не будем углубляться в это обобщение.

Доказательство обеих теорем основано на таких методах эффективной дескриптивной теории множеств, как топология Ганди–Харрингтона, теорема Крайзеля о выборе и эффективный пересчет Δ^1_1-множеств.

[2] Множество U σ-компактно по той же причине, что и в (I) теоремы 1.1.

2. Основные определения и базовые результаты. Мы используем стандартные обозначения классов эффективной проективной иерархии Σ^1_1, Π^1_1, Δ^1_1 для точек и подмножеств бэровского пространства $\mathscr{N}$, а также обозначения $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Delta}^1_1$ для соответствующих проективных классов. О них см., например, в [1; глава 8], [2]–[4].

Через $\mathbb{N}^{<\omega}$ обозначается множество всех конечных кортежей (последовательностей) натуральных чисел, включающее и пустой кортеж Λ. Длина кортежа $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ обозначается через $\operatorname{lh} s$. Если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $n \in \mathbb{N}$, то $s^\wedge n$ – кортеж, полученный присоединением члена n справа к кортежу s. Положим для $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$

$$\mathscr{N}_s = \{x \in \mathscr{N} : s \subset x\} \qquad (\textit{бэровский интервал } \text{в } \mathscr{N}).$$

Множество $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ называется *деревом*, если мы имеем $s \in T$ всякий раз, когда $s^\wedge n \in T$ хотя бы для одного n. Понятно, что каждое непустое дерево содержит Λ. Дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ называется *компактным*, когда

1) оно не имеет *концевых вершин*: если $s \in T$, то и $s^\wedge n \in T$ хотя бы для одного n;
2) оно имеет *конечные ветвления*: если $s \in T$, то $s^\wedge n \in T$ выполнено лишь для конечно многих n.

В этом и только этом случае следующее множество компактно:

$$[T] = \{x \in \mathscr{N} : \forall m (x \restriction m \in T)\}.$$

Если $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ – любые множества и $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, то положим

$$\operatorname{pr} P = \{x \in \mathbb{X} : \exists y (\langle x, y\rangle \in P)\} \qquad \text{и} \qquad (P)_x = \{y \in \mathbb{Y} : \langle x, y\rangle \in P\}$$

– соответственно *проекция* множества P на первую ось $\mathbb{X}$ и *сечение* множества P, определенное элементом $x \in \mathbb{X}$. Множество $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ *однозначно*, если каждое его сечение $(P)_x$ (где $x \in \mathbb{X}$) содержит не более одной точки, и *счетнозначно*, если каждое сечение $(P)_x$ не более чем счетно.

В доказательствах наших главных теорем используются следующие хорошо известные результаты эффективной дескриптивной теории множеств, о которых см. в [5] и [6].

Теорема 2.1 (отделимость). *Если Σ^1_1-множества $X, Y \subseteq \mathscr{N}$ дизъюнктны, то найдется Δ^1_1-множество $Z \subseteq \mathscr{N}$ такое, что $X \subseteq Z$, но $Y \cap Z = \varnothing$.*

Теорема 2.2 (теорема Крайзеля о выборе). *Если Π^1_1-множество $P \subseteq \mathscr{N} \times \mathbb{N}$ таково, что проекция $\operatorname{pr} P$ имеет класс Δ^1_1, то имеется такая Δ^1_1-функция $f\colon \operatorname{pr} P \to \mathbb{N}$, что*

$$\langle x, f(x)\rangle \in P \qquad \textit{для всех} \quad x \in \operatorname{pr} P.^3$$

Следующая теорема предоставляет удобное эффективное перечисление всех Δ^1_1-множеств $X \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$. Собственно, множество $\mathbb{N}^{<\omega}$ всех (конечных) кортежей натуральных чисел здесь можно отождествить с $\mathbb{N}$ через любую рекурсивную биекцию $\mathbb{N}$ на $\mathbb{N}^{<\omega}$.

Теорема 2.3 (перечисление Δ^1_1-множеств). *Найдутся такие Π^1_1-множества $E \subseteq \mathbb{N}$ и $W \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$ и такое Σ^1_1-множество $W' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$, что*

[3] В этой ситуации говорят, что множество P униформизуется функцией f.

(i) *если* $e \in E$, *то множества*

$$(W)_e = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \langle e, s\rangle \in W\} \qquad \text{и} \qquad (W')_e$$

совпадают;

(ii) *множество* $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ *есть* Δ^1_1, *если и только если найдется число* $e \in E$, *для которого*

$$T = (W)_e = (W')_e.$$

Следствие 2.4. *Множество*

$$D = \{T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} : T \text{ есть } \Delta^1_1\}$$

принадлежит классу Π^1_1. *Множество*

$$\{\langle p, T\rangle : p \in \mathscr{N} \wedge T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega} \wedge T \text{ есть } \Delta^1_1(p)\}$$

также принадлежит классу Π^1_1.

Доказательство. Возьмем E, W, W', как указано в теореме 2.3. Тогда

$$\begin{aligned} T \in D &\iff \exists e(e \in E \wedge T = (W)_e) \\ &\iff \exists e\bigl(e \in E \wedge \forall s \in \mathbb{N}^{<\omega}(s \in (W')_e \implies s \in T \implies s \in (W)_e)\bigr), \end{aligned}$$

откуда и следует искомое.

Теорема 2.5. *Если* Δ^1_1*-множество* $P \subseteq \mathscr{N} \times \mathscr{N}$ *счетнозначно*, *то*

(i) $\operatorname{pr} P$ *есть* Δ^1_1*-множество*;

(ii) P *есть счетное объединение однозначных* Δ^1_1*-множеств*;

(iii) P *униформизуется* Δ^1_1*-множеством.*

Теоремы 2.1–2.3, 2.5 и следствие 2.4 остаются справедливыми, если фигурирующие в них классы Σ^1_1, Π^1_1, Δ^1_1 заменяются релятивизованными классами $\Sigma^1_1(p)$, $\Pi^1_1(p)$, $\Delta^1_1(p)$, где $p \in \mathscr{N}$ – произвольный параметр. Поэтому теоремы 2.1, 2.2, 2.5 также верны для проективных классов $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$, $\boldsymbol{\Pi}^1_1$, $\boldsymbol{\Delta}^1_1$.

3. Топология Ганди–Харрингтона. Топология Ганди–Харрингтона на бэровском пространстве $\mathscr{N}$ состоит из всех объединений произвольных Σ^1_1-множеств $S \subseteq \mathscr{N}$. Эта топология включает польскую топологию $\mathscr{N}$, но сама не является польской и даже не метризуема.

В самом деле, существует Π^1_1-множество $P \subseteq \mathscr{N}$, не являющееся $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-множеством. По определению P замкнуто в топологии Ганди–Харрингтона. Предположим, что эта топология метризуема. Однако в метрических пространствах все замкнутые множества являются множествами $\mathbf{G}_\delta$. Поэтому $P = \bigcap_n \bigcup_m S_{mn}$, где все $S_{mn} \subseteq \mathscr{N}$ являются Σ^1_1-множествами (т.е. базовыми открытыми множествами топологии Ганди–Харрингтона). Но класс $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$ замкнут относительно счетных объединений и пересечений. Тем самым, P оказывается $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-множеством, противоречие.

Тем не менее, топология Ганди–Харрингтона, не будучи сама польской, обладает одним свойством, которое позволяет получить некоторые результаты, типичные именно для польских пространств.

Определение 3.1. *Польской сетью* для семейства множеств $\mathscr{F}$ называется такая совокупность $\{\mathscr{D}_n : n \in \mathbb{N}\}$ открытых плотных множеств $\mathscr{D}_n \subseteq \mathscr{F}$, для которой имеет место следующее: для любой последовательности множеств $F_n \in \mathscr{D}_n$, удовлетворяющей условию непустоты конечных пересечений (т.е. $\bigcap_{k\leqslant n} F_k \neq \varnothing$ для каждого n), выполнено $\bigcap_n F_n \neq \varnothing$.

Здесь множество $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{F}$ называется *открытым плотным*, если соблюдены два условия:

$$\forall F \in \mathscr{F}\ \exists D \in \mathscr{D}\ (D \subseteq F),$$

$$\forall F \in \mathscr{F}\ \forall D \in \mathscr{D}\ (F \subseteq D \implies F \in \mathscr{D}).^4$$

Например, польская сеть имеется для семейства всех непустых замкнутых множеств любого полного метрического пространства $\mathbb{X}$: возьмем в качестве $\mathscr{D}_n$ все непустые замкнутые множества диаметра $\leqslant n^{-1}$ в $\mathbb{X}$. Следующая теорема не столь элементарна. Как теорема, так и следствие хорошо известны, см., например, [7], [8], или [9] на русском языке.

Теорема 3.2. *Найдется польская сеть для совокупности $\mathbb{P}$ всех непустых Σ^1_1-множеств в пространстве $\mathscr{N}$.*

Следствие 3.3. *Множество $\mathscr{N}$ с топологией Ганди–Харрингтона удовлетворяет теореме Бэра, т.е. все ко-тощие[5] множества всюду плотны.*

Доказательство теоремы 3.2 (эскиз). Пусть $P \subseteq \mathscr{N} \times \mathscr{N}$. Положим

$$\operatorname{pr} P = \{a : \exists b\, P(a,b)\}$$

(проекция) и

$$P_{st} = \{\langle a,b\rangle \in P : s \subset a \wedge t \subset b\} \qquad \text{для} \quad s,t \in \mathbb{N}^{<\omega}.$$

Через $\mathscr{D}(P,s,t)$ обозначим семейство всех непустых Σ^1_1-множеств $X \subseteq \mathscr{N}$ таких, что

$$\text{либо} \quad X \cap \operatorname{pr} P_{st} = \varnothing, \quad \text{либо} \quad X \subseteq \operatorname{pr} P_{s^\wedge i, t^\wedge j} \qquad \text{для каких-то} \quad i,j \in \mathbb{N}.$$

(Заметим, что во втором случае число i единственное, но j не обязательно единственное.) Поскольку эффективный класс Π^0_1 счетен, зафиксируем произвольное перечисление $\{\mathscr{D}_n : n \in \mathbb{N}\}$ всех семейств вида $\mathscr{D}(P,s,t)$, где $P \subseteq \mathscr{N} \times \mathscr{N}$ – множество класса Π^0_1. Докажем, что совокупность всех $\mathscr{D}_n$ образует польскую сеть для $\mathbb{P}$.

Нетрудно убедиться, что $\mathscr{D}(P,s,t)$ является открытым плотным множеством в $\mathbb{P}$ в смысле определения 3.1, каково бы ни было Π^0_1-множество $P \subseteq \mathscr{N} \times \mathscr{N}$. Так что все наши множества $\mathscr{D}_n$ открыты и плотны в $\mathbb{P}$.

Рассмотрим последовательность непустых Σ^1_1-множеств $X_n \in \mathscr{D}_n$, удовлетворяющую условию непустоты конечных пересечений. Докажем, что $\bigcap_n X_n \neq \varnothing$. Множества $Y_n = \bigcap_{k\leqslant n} X_k$ непусты, очевидно, принадлежат Σ^1_1 (вместе с множествами X_k)

[4] Множества $\mathscr{D}$, удовлетворяющие только первому требованию, называются *плотными*. Если множество $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{F}$ плотно, то множество $\mathscr{D}' = \{F \in \mathscr{F} : \exists D \in \mathscr{D}(F \subseteq D)\}$ открыто плотно. Эти понятия открытости и плотности можно связать с определенной топологией на $\mathscr{F}$, чего мы не будем делать, оставив их чисто комбинаторными.

[5] Ко-тощими называются множества, дополнительные в данном топологическом пространстве к тощим множествам, т.е. множествам первой категории.

и удовлетворяют $Y_n \subseteq X_n$. Поэтому мы имеем $Y_n \in \mathscr{D}_n$ вследствие открытой плотности множеств $\mathscr{D}_n$. Наконец, множества Y_n не просто удовлетворяют условию непустоты конечных пересечений, но вложены одно в другое, т.е. $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ для всех n. Нам достаточно доказать, что $\bigcap_n Y_n \neq \varnothing$.

Множество $X \subseteq \mathscr{N}$ назовем *позитивным*, если найдется индекс m такой, что $Y_m \subseteq X$. Для каждого n зафиксируем Π^0_1-множество $P^n \subseteq \mathscr{N} \times \mathscr{N}$, для которого $Y_n = \operatorname{pr} P^n$. Если $s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и проекция $\operatorname{pr} P^n_{st}$ позитивна, то по построению множеств Y_n найдутся единственное i и некоторое j, для которых проекция $\operatorname{pr} P^n_{s^\wedge i, t^\wedge j}$ также позитивна. В самом деле, пусть по позитивности $Y_m \subseteq \operatorname{pr} P^n_{st}$. Семейство $\mathscr{D}(P^n, s, t)$ совпадает с некоторым $\mathscr{D}_k$, так что найдется индекс k, для которого $Y_k \in \mathscr{D}(P^n, s, t)$. Тогда

$$\text{либо} \quad Y_k \cap \operatorname{pr} P^n_{st} = \varnothing, \quad \text{либо} \quad Y_k \subseteq \operatorname{pr} P^n_{s^\wedge i, t^\wedge j} \qquad \text{для каких-то} \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Но первое невозможно, поскольку $Y_m \subseteq \operatorname{pr} P^n_{st}$, а множества Y_j вложены одно в другое. Значит, $Y_k \subseteq \operatorname{pr} P^n_{s^\wedge i, t^\wedge j}$ для каких-то $i, j \in \mathbb{N}$. Но тогда проекция $P^n_{s^\wedge i, t^\wedge j}$ позитивна. Отсюда следует, что существует единственная точка $a = a_n \in \mathscr{N}$ и некоторая (не обязательно единственная) $b = b_n \in \mathscr{N}$ такие, что проекция $\operatorname{pr} P^n_{a \restriction k, b \restriction k}$ позитивна для каждого k. Из замкнутости множеств P^n следует, что $\langle a_n, b_n \rangle \in P^n$, а значит, $a_n \in X_n$ для каждого n.

Остается доказать, что все эти точки a_n совпадают друг с другом, т.е. $a_m = a_n$ даже при $m \neq n$. Для этого просто заметим, что если проекции $\operatorname{pr} P_{st}$ и $\operatorname{pr} Q_{s't'}$ обе позитивны (даже для двух разных множеств P, Q!), то согласно тому же условию непустоты конечных пересечений выполнено либо $s \subseteq s'$, либо $s' \subseteq s$.

4. О компактных Δ^1_1 множествах. Понятно, что если дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ имеет класс Δ^1_1, то тому же классу принадлежит и множество

$$[T] = \{a \in \mathscr{N} : \forall m (a \restriction m \in T)\},$$

поскольку мы имеем

$$x \in [T] \iff \forall m (x \restriction m \in T).$$

Лемма 4.1. *Если $F \subseteq \mathscr{N}$ – замкнутое Δ^1_1-множество, а $A \subseteq F$ – компактное Σ^1_1-множество, то найдется компактное Δ^1_1-дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ такое, что $A \subseteq [T] \subseteq F$. В частности, при $A = F$, если Δ^1_1-множество $A \subseteq \mathscr{N}$ компактно, то найдется компактное Δ^1_1-дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, для которого $A = [T]$.*

Доказательство. *Часть* 1. Сначала попробуем подобрать Δ^1_1-дерево S (не обязательно компактное), для которого $F = [S]$. Раз дополнительное Δ^1_1-множество $G = \mathscr{N} \setminus F$ открыто, множество

$$P = \{\langle x, t \rangle : x \in G \wedge t \in \mathbb{N}^{<\omega} \wedge x \in \mathscr{N}_t \subseteq G\} \subseteq \mathscr{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$$

удовлетворяет $\operatorname{dom} P = G$. Кроме того, P есть Π^1_1, так как ключевое соотношение $\mathscr{N}_t \subseteq G$ можно выразить Π^1_1-формулой

$$\forall x (t \subset x \implies x \in G).$$

Поэтому теорема 2.2 дает нам Δ^1_1-функцию $f : G \to \mathbb{N}^{<\omega}$ такую, что $x \in \mathscr{N}_{f(x)} \subseteq G$ для всех $x \in G$. Множество

$$U = \{f(x) : x \in G\} = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : \exists x \in G\,(f(x) = t)\}$$

тогда принадлежит Σ^1_1 и удовлетворяет $G = \bigcup_{t\in U} \mathscr{N}_t$. Однако

$$V = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : \mathscr{N}_t \subseteq G\} = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} : \forall x(x \in \mathscr{N}_t \implies x \in G)\}$$

есть Π^1_1-множество, причем $U \subseteq V$ и $G = \bigcup_{t\in U} \mathscr{N}_t$. По теореме 2.1 (отделимость) найдется Δ^1_1-множество W такое, что $U \subseteq W \subseteq V$, и тогда все еще $G = \bigcup_{t\in W} \mathscr{N}_t$. Положим

$$S = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \forall t\,(t \in W \implies t \not\subseteq s)\}.$$

Легко видеть, что S является Δ^1_1-деревом (возможно, с концевыми вершинами) и $[S] = F$, что и заканчивает часть 1 доказательства.

Часть 2. Заметим, что множество P всех пар $\langle s, u\rangle$ таких, что $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $u \subseteq \mathbb{N}$, конечно и непусто, и

$$\forall x \in \mathscr{N}\big((x \in A \wedge s \subset x) \implies \exists k \in u(s^\wedge k \subset x) \wedge \forall k \in u(s^\wedge k \in S)\big),$$

есть Π^1_1 в пространстве $\mathbb{N} \times \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}\mathbb{N}$, где второй множитель (множество всех конечных $u \subseteq \mathbb{N}$) отождествляется с $\mathbb{N}$ через какую-нибудь подходящую рекурсивную биекцию. При этом $\mathrm{dom}P = \mathbb{N}^{<\omega}$. (В самом деле, если s таково, что нет $x \in A$, для которых $s \subset x$, то $\langle s, u\rangle \in P$ для любого конечного u. Если же такая точка x есть, то множество $u = \{x(n) : s \subset x \in A\}$, где $n = \mathrm{lh}\, s$, конечно по компактности – его мы и берем.) Значит, снова имеется Δ^1_1-функция $f\colon \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}\mathbb{N}$ такая, что $\langle s, f(s)\rangle \in P$ для всех $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$. Остается взять

$$T = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \forall n < \mathrm{lh}\, s(s(n) \in f(s \restriction n))\}.$$

Следствие 4.2. *Любое компактное Δ^1_1-множество $A \subseteq \mathscr{N}$ содержит точку $x \in A$ класса Δ^1_1.*

Доказательство. Имеем $A = [T]$ для подходящего компактного Δ^1_1-дерева $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ по лемме 4.1. Возьмем в качестве x самую лексикографически левую ветвь дерева T, т.е. так, что для каждого n выполнено

$$x(n) = \min\big\{s(n) : s \in T \wedge n < \mathrm{lh}\, s \wedge s \restriction n = \langle x(0), \dots, x(n-1)\rangle\big\}.$$

5. Доказательство первой главной теоремы. Начиная доказательство теоремы 1.1, мы первым делом докажем, что множество U из (I) теоремы 1.1 (т.е. просто объединение всех компактных Δ^1_1-множеств $K \subseteq A$) есть Π^1_1. Возьмем Π^1_1-множества $E \subseteq \mathbb{N}$ и $W \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$ и Σ^1_1-множество $W' \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}^{<\omega}$ как в теореме 2.3. Теперь

$$x \in U \iff \exists e\big(e \in E \wedge (W)_e \text{ – компактное дерево} \wedge x \in [(W)_e] \subseteq A\big).$$

Свойство “быть компактным деревом” выражается занудно длинной арифметической формулой, которую мы не хотим здесь выписывать на несколько строк, а $[(W)_e] \subseteq A$ выражается Π^1_1-формулой

$$\forall y(\forall n(y \restriction n \in (W)_e) \implies y \in A),$$

где $y \restriction n \in (W)_e$ можно заменить на $\langle e, y \restriction n\rangle \in W$. Имеем арифметический квантор $\exists e$ на Π^1_1-формуле, т.е. Π^1_1-формулу. Итак, $U \in \Pi^1_1$. Это значит, что множество $A' = A \setminus U$ есть Σ^1_1. Остается доказать, что если $A' \neq \varnothing$, то имеется множество $Y \subseteq A'$, гомеоморфное $\mathscr{N}$ и замкнутое в A'.

Лемма 5.1. *Множество A' не имеет непустых замкнутых σ-компактных подмножеств класса Σ^1_1.*

Доказательство. Докажем сначала, что A' не имеет непустых компактных подмножеств класса Σ^1_1. Пусть, напротив, $\varnothing \neq Z \subseteq A'$ – компактное Σ^1_1-множество. Мы собираемся найти замкнутое Δ^1_1-множество F, для которого $Z \subseteq F \subseteq A$. Тогда по лемме 4.1 существует компактное Δ^1_1-дерево $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющее $Z \subseteq [T] \subseteq F \subseteq A$. Но тогда $[T] \subseteq U$ по определению множества U и, значит, $Z \subseteq U$ – противоречие.

Поскольку дополнение $C = \mathscr{N} \setminus Z$ открыто, множество

$$H = \{\langle x, s\rangle : x \in C \cap \mathscr{N}_s \wedge \mathscr{N}_s \cap Z = \varnothing\}$$

принадлежит Π^1_1 и удовлетворяет $\operatorname{pr} H = C$. В частности, Δ^1_1-множество $D = \mathscr{N} \setminus A$ включено в $\operatorname{pr} H$. Это означает, что более узкое Π^1_1-множество

$$H' = \{\langle x, s\rangle \in H : x \in D\}$$

удовлетворяет $\operatorname{pr} H' = D$. Отсюда по теореме 2.2 найдется Δ^1_1-функция $f\colon D \to \mathbb{N}^{<\omega}$, для которой

$$x \in D \implies \langle x, f(x)\rangle \in H,$$

или, другими словами, мы имеем

$$x \in \mathscr{N}_{f(x)} \subseteq C \qquad \text{для всех} \quad x \in D.$$

Тогда множество

$$\Sigma = \operatorname{ran} f = \{f(x) : x \in D\} \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$$

есть Σ^1_1 и

$$D \subseteq \bigcup_{s \in \Sigma} \mathscr{N}_s \subseteq C.$$

Однако

$$\Pi = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \mathscr{N}_s \subseteq C\}$$

есть Π^1_1 и $\Sigma \subseteq \Pi$. Значит, по теореме отделимости для Σ^1_1-множеств (теорема 2.1) найдется Δ^1_1-множество Δ, для которого выполнено $\Sigma \subseteq \Delta \subseteq \Pi$. Тогда все еще $D \subseteq \bigcup_{s\in\Delta} \mathscr{N}_s \subseteq C$, так что замкнутое множество $F = \mathscr{N} \setminus \bigcup_{s\in\Delta} \mathscr{N}_s$ удовлетворяет $Z \subseteq F \subseteq A$. Однако $x \in F$ равносильно

$$\forall s (s \in \Delta \implies x \notin \mathscr{N}_s),$$

так что F есть Δ^1_1 вместе с Δ, что и требовалось.

Теперь докажем полное утверждение леммы. Пусть напротив, непустое замкнутое Σ^1_1-множество $F = \bigcup_n F_n \subseteq A'$ σ-компактно, а все F_n компактны. Тогда существует базовое открыто-замкнутое множество $U \subseteq \mathscr{N}$ такое, что пересечение $Z = U \cap F$ непусто и целиком включено в одно из F_n. Таким образом, Z – непустое компактное Σ^1_1-множество, противоречие с уже доказанным. Лемма доказана.

Возвращаясь к теореме, мы предположим, что условие (I) теоремы 1.1 не имеет места, так что Σ^1_1-множество $A' \subseteq A$ непусто, и выведем отсюда (II) теоремы 1.1. Имеются следующие два случая.

Случай 1. Существует непустое замкнутое Σ^1_1-множество $F \subseteq A'$. Оно не σ-компактно по лемме 5.1, и простая конструкция сразу дает замкнутое множество $Y \subseteq F$, гомеоморфное пространству $\mathscr{N}$.

Случай 2. Непустых замкнутых Σ^1_1-множеств $F \subseteq A'$ нет. В этом предположении, чтобы получить искомое *относительно* замкнутое множество $Y \subseteq A$, гомеоморфное $\mathscr{N}$, мы построим систему непустых Σ^1_1-множеств $Y_s \subseteq A'$, удовлетворяющую таким техническим условиям:

(1) $Y_{s^\wedge i} \subseteq Y_s$ всякий раз, когда $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $i \in \mathbb{N}$;

(2) диаметр Y_s не превосходит $2^{-\operatorname{lh} s}$;

(3) $Y_{s^\wedge k} \cap Y_{s^\wedge n} = \varnothing$ для всех s и $k \neq n$, и более того, $Y_{s^\wedge k}$ можно заключить в открытое множество $Y'_{s^\wedge k}$, которое не пересекается с $\bigcup_{n \neq k} Y_{s^\wedge n}$;

(4) $Y_s \in \mathscr{D}_{\operatorname{lh} s}$, где по теореме 3.2 $\{\mathscr{D}_n : n \in \mathbb{N}\}$ – польская сеть для совокупности $\mathbb{P}$ всех непустых Σ^1_1-множеств $Y \subseteq \mathscr{N}$;

(5) если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $x_k \in Y_{s^\wedge k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то последовательность точек x_k сходится к точке из $\mathscr{N} \setminus A'$.

Если такое построение выполнено, то условие (4) обеспечивает непустоту каждого пересечения $\bigcap_m Y_{a \restriction m}$, где $a \in \mathscr{N}$ по определению польской сети. А согласно (2) каждое такое пересечение содержит ровно одну точку, которую мы обозначим через $f(a)$, и это отображение

$$f \colon \mathscr{N} \overset{\text{на}}{\to} Y = \operatorname{ran} f = \{f(a) : a \in \mathscr{N}\},$$

как легко видеть, является гомеоморфизмом. Заметим, что $Y = \bigcup_{a \in \mathscr{N}} \bigcap_m Y_{a \restriction m}$.

Для доказательства замкнутости множества Y в A' положим $y \in \overline{Y}$ (замыкание множества Y). Тогда $y \in \overline{Y}_\Lambda$, поскольку $Y \subseteq Y_\Lambda$. Далее, предположим, что $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $y \in \overline{Y}_s$. Тогда в наших предположениях $y \in \overline{\bigcup_k Y_{s^\wedge k}}$. Следовательно, согласно (5) либо $y \notin A'$, либо $y \in \overline{Y_{s^\wedge k}}$ для некоторого (на самом деле, единственного) k. Из этого рассуждения следует, что если $y \in \overline{Y} \cap A'$, то существует точка $a \in \mathscr{N}$, для которой $y \in \overline{Y_{a \restriction m}}$ для всех m. Но тогда $y = f(a)$ согласно (2), так что $y \in Y$, что и требовалось.

Наконец, расскажем о построении множеств Y_s.

Если мы уже имеем непустое Σ^1_1-множество $Y_s \subseteq \mathscr{N}$, то его замыкание $\overline{Y_s}$ – также множество из Σ^1_1, откуда следует $\overline{Y_s} \nsubseteq A'$ согласно гипотезе случая 2. Возьмем любую точку $y \in \overline{Y_s} \setminus A'$ и сходящуюся к ней последовательность попарно различных точек $y_n \in Y_s$. Пусть U_n – базовая окрестность точки y_n (т.е. бэровский интервал) диаметра $\leqslant 1/3$ от наименьшего из расстояний от y_n до точек y_k, $k \neq n$. Положим $Y_{s^\wedge n} = Y_s \cap U_n$, а затем еще сузим эти множества $Y_{s^\wedge n}$ до подходящих бэровских интервалов с тем, чтобы выполнить требования (2) и (4). Теорема доказана.

6. Доказательство второй главной теоремы. Здесь доказывается теорема 1.2. Множество U из (I) есть Π^1_1: это легко получается из следствия 2.4. Таким образом, разность $A \setminus U$ есть Σ^1_1-множество.

Лемма 6.1. *В условиях теоремы 1.2, если $Y \subseteq A \setminus U$ – непустое Σ^1_1-множество, то его топологическое замыкание в $\mathscr{N}$ некомпактно, т.е. дерево*

$$T(Y) = \{y \restriction n : y \in Y \wedge n \in \mathbb{N}\}$$

имеет хоть одно бесконечное ветвление.

Доказательство. Предположим противное. Тогда множество

$$H = \{\langle t, n\rangle : t \in \mathbb{N}^{<\omega} \wedge n \in \mathbb{N} \wedge \forall k (t^\wedge k \in T(Y) \implies k \leqslant n)\}$$

класса Π^1_1 (так как Σ^1_1-фрагмент $T(Y)$ встречается слева от импликации) удовлетворяет $\mathrm{dom} H = \mathbb{N}^{<\omega}$. Из теоремы 2.2 следует, что существует Δ^1_1-функция $f\colon \mathbb{N}^{<\omega} \to \mathbb{N}$ такая, что

$$\langle t, f(t)\rangle \in H \qquad \text{для всех} \quad t \in \mathbb{N}^{<\omega}.$$

Отсюда по определению H имеем $y(n) \leqslant f(y \restriction n)$ для всех $y \in Y$ и n, так что $Y \subseteq [T']$, где T' есть дерево из всех кортежей $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющих

$$t(n) \leqslant f(t \restriction n) \qquad \text{для каждого} \quad n < \mathrm{lh}\, t.$$

Но T' – компактное дерево, и легко видеть, что T' есть Δ^1_1 вместе с f. Отсюда $[T'] \subseteq U$, противоречие.

Возвращаясь к доказательству теоремы 1.2, предположим, что (I) не имеет места, т.е. множество $A \setminus U$ непусто. В этом предположении существует система непустых Σ^1_1-множеств $Y_s \subseteq A \setminus U$, удовлетворяющая техническим условиям (1)–(4) из п. 5, а также следующему требованию вместо (5):

(5′) если $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$ и $x_k \in Y_{s^\wedge k}$ для всех $k \in \mathbb{N}$, то последовательность точек x_k не имеет сходящихся подпоследовательностей в $\mathscr{N}$.

Если такая система множеств построена, то по тем же причинам, что и в доказательстве теоремы 1.1, ассоциированная функция $f\colon \mathscr{N} \to A \setminus U$ взаимно однозначна и является гомеоморфизмом из $\mathscr{N}$ на свой полный образ

$$Y = \mathrm{ran}\, f = \{f(a) : a \in \mathscr{N}\} \subseteq A \setminus U.$$

Проверка абсолютной замкнутости Y в $\mathscr{N}$ подобна проверке относительной замкнутости в доказательстве теоремы 1.1, но здесь условие (5′) сильнее. Таким образом, мы пришли к (II).

Теперь скажем о построении множеств Y_s. Если Σ^1_1-множество $Y_s \subseteq A \setminus U$ уже построено, то согласно лемме 6.1 можно подобрать $t \in T(Y_s)$ так, что $t^\wedge k \in T(Y_s)$ для всех k из бесконечного множества $K_s \subseteq \mathbb{N}$. Это позволяет выбрать последовательность попарно различных точек $y_k \in Y_s$, $k \in \mathbb{N}$, не имеющую сходящихся подпоследовательностей. Накрываем эти точки достаточно малыми бэровскими интервалами U_k с тем, чтобы для полученных Σ^1_1-множеств $Y_{s^\wedge i} = Y_s \cap U_s$ было верно (5′), а затем при необходимости ужимаем эти множества, чтобы удовлетворить требования (2) и (4). Теорема доказана.

7. Замечания. Основные результаты этой заметки можно сравнить со следующими теоремами классической дескриптивной теории множеств.

Теорема 7.1 (Гуревич [10]). *Пусть $\mathbb{X}$ – польское пространство. Любое не σ-компактное $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $A \subseteq \mathbb{X}$ имеет подмножество, гомеоморфное $\mathscr{N}$ и замкнутое в A.*

Теорема 7.2 (Сан-Раймон [11], см. также 21.23 в [12]). *Пусть $\mathbb{X}$ – польское пространство и $A \subseteq \mathbb{X}$ есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество, которое нельзя накрыть σ-компактным множеством $Z \subseteq \mathbb{X}$. Тогда найдется множество $P \subseteq A$, гомеоморфное $\mathscr{N}$ и замкнутое в $\mathbb{X}$.*

Выкладки в [12] показывают, что каждую из этих теорем достаточно получить для случая $\mathbb{X} = \mathscr{N}$, а затем распространить на множества любого польского пространства $\mathbb{X}$ уже чисто топологическими методами. В варианте для $\mathbb{X} = \mathscr{N}$ теорема 7.2 прямо следует из релятивизованной формы (т.е. для классов $\Sigma^1_1(p)$, где $p \in \mathscr{N}$ произвольно) нашей теоремы 1.2. Теорема же 7.1 выводится из релятивизованной формы теоремы 1.1 только для случая множеств A класса $\mathbf{\Delta}^1_1$ (т.е. борелевских). Интересная проблема состоит в том, чтобы соответственно распространить теорему 1.1 на класс Σ^1_1. Ожидаемый результат может при сохранении условия (II) теоремы 1.1 потребовать некоторого ослабления условия (I) теоремы, например, посредством обращения к деревьям не класса Δ^1_1.

Теорема 1.1 позволяет без особого труда получить, еще несколько известных результатов, которые собраны в следующей теореме.

Теорема 7.3 (ср. с теоремой 2.5). *Допустим, что множество $P \subseteq \mathscr{N} \times \mathscr{N}$ принадлежит Δ^1_1 и все сечения*

$$(P)_x = \{y : \langle x, y\rangle \in P\}, \qquad x \in \mathbb{X},$$

σ-компактны. Тогда

(i) $\operatorname{pr} P$ *есть Δ^1_1-множество;*

(ii) P *– счетное объединение Δ^1_1-множеств с компактными сечениями;*

(iii) P *униформизуется Δ^1_1-множеством.*

Доказательство. (i) Рассмотрим множество H всех пар $\langle x, T\rangle$ таких, что $x \in \mathscr{N}$, $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ – компактное дерево класса $\Delta^1_1(x)$, и $[T] \subseteq (P)_x$. Множество H имеет класс Π^1_1 согласно следствию 2.4. По теореме 1.1, если $\langle x, y\rangle \in P$, то найдется дерево T такое, что $\langle x, T\rangle \in H$ и $y \in [T]$. Поэтому Π^1_1-множество

$$E = \{\langle x, y, T\rangle : \langle x, y\rangle \in P \wedge \langle x, T\rangle \in H \wedge y \in [T]\} \subseteq \mathscr{N} \times \mathscr{N} \times 2^{(\mathbb{N}^{<\omega})}$$

удовлетворяет $\operatorname{pr}_{xy} E = P$, т.е. если $\langle x, y\rangle \in P$, то найдется дерево T, для которого $\langle x, y, T\rangle \in E$. Униформизуем E Π^1_1-множеством $U \subseteq E$, т.е. если $\langle x, y\rangle \in P$, то существует единственное T, для которого $\langle x, y, T\rangle \in U$. Но U есть и Σ^1_1, так как $\langle x, y, T\rangle \in U$ равносильно такой формуле:

$$\langle x, y\rangle \in P \wedge y \in [T] \wedge \forall T' \in \Delta^1_1(x) \qquad (\langle x, y, T'\rangle \in U \implies T = T'),$$

а кванторы вида $\forall x \in \Delta^1_1(y)$ сохраняют класс Σ^1_1. Итак, Σ^1_1-множество

$$F = \{\langle x, T\rangle : \exists y(\langle x, y, T\rangle \in U)\}$$

включено в Π^1_1-множество H. По теореме отделимости (теорема 2.1) найдется Δ^1_1-множество V, для которого $F \subseteq V \subseteq H$. И при этом по построению выполнено

$$\langle x, y\rangle \in P \iff \exists T(\langle x, T\rangle \in V \wedge y \in [T]).$$

Наконец, множество V счетнозначно: если $\langle x, T\rangle \in V$, то $T \in \Delta^1_1(x)$ (так как $V \subseteq H$). Сразу заметим, что $\operatorname{pr} P = \operatorname{pr} V$, а потому проекция $D = \operatorname{pr} P$ имеет класс Δ^1_1 по теореме 2.5.

(ii) По теореме 2.5 множество V равно объединению $V = \bigcup_n V_n$ однозначных множеств V_n класса Δ^1_1, причем каждая проекция $D_n = \operatorname{pr} V_n \subseteq D$ есть Δ^1_1. По существу каждое V_n есть график Δ^1_1-функции $\tau_n\colon D_n \to$ *компактные деревья*, и $(P)_x = \bigcup_{x \in D_n} [\tau_n(x)]$. Положим

$$P_n = \{\langle x, y\rangle : x \in D_n \wedge y \in [\tau_n(x)])\}$$

для каждого n. Тогда $P = \bigcup_n P_n$ по предыдущему все множества P_n имеют только компактные сечения, и каждое P_n есть Δ^1_1-множество, поскольку этому классу принадлежат множества D_n и функции τ_n.

(iii) Опять по теореме 2.5 (iii) множество V униформизуется однозначным Δ^1_1-множеством, т.е. найдется Δ^1_1-функция

$$\tau\colon D_n \to \textit{компактные деревья}$$

такая, что $\langle x, \tau(x)\rangle \in V$ для всех $x \in D$. Рассмотрим множество Q всех пар $\langle x, y\rangle \in P$ таких, что y есть самая лексикографически левая точка компактного множества $[\tau(x)]$. Нетрудно проверить, что Q имеет класс Δ^1_1 (см. доказательство следствия 4.2) и униформизует данное множество P.

Теорема 7.3 остается верной для класса $\Delta^1_1(p)$ с любым фиксированным параметром $p \in \mathscr{N}$ с тем же доказательством – а тогда, разумеется, и для проективного класса $\boldsymbol{\Delta}^1_1$ (всех борелевских множеств). Мы получаем такое следствие, соединяющее несколько классических результатов дескриптивной теории множеств (Арсенин, Кунугуи, Щегольков, Сан-Раймон, ссылки см. в [3; § 4]).

Следствие 7.4. *Пусть* $\mathbb{X}$, $\mathbb{Y}$ *– польские пространства, а* $\boldsymbol{\Delta}^1_1$*-множество* $P \subseteq \mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ *удовлетворяет такому условию: все сечения* $(P)_x = \{y : \langle x, y\rangle \in P\}$, $x \in \mathbb{X}$, σ*-компактны. Тогда*

(i) $\operatorname{pr} P$ *есть* $\boldsymbol{\Delta}^1_1$*-множество*;

(ii) P *– счетное объединение* $\boldsymbol{\Delta}^1_1$*-множеств с компактными сечениями*;

(iii) P *униформизуется* $\boldsymbol{\Delta}^1_1$*-множеством.*

Авторы благодарны рецензенту за ряд замечаний, улучшивших изложение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] *Справочная книга по математической логике*. Часть II. *Теория множеств*, ред. К. Дж. Баруайз, Наука, М., 1982.

[2] В. Г. Кановей, “Добавление. Проективная иерархия Лузина: современное состояние теории”, *Справочная книга по математической логике*. Часть II. *Теория множеств*, ред. К. Дж. Баруайз, Наука, М., 1982, 273–364.

[3] В. Г. Кановей, “Развитие дескриптивной теории множеств под влиянием трудов Н. Н. Лузина”, *УМН*, **40**:3 (1985), 117–155.

[4] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, “О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств”, *УМН*, **58**:5 (2003), 3–88.

[5] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*, МЦНМО, М., 2010.

[6] V. Kanovei, *Borel Equivalence Relations. Structure and Classification*, Univ. Lecture Ser., **44**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[7] L. A. Harrington, A. S. Kechris, A. Louveau, “A Glimm–Effros dichotomy for Borel equivalence relations”, *J. Amer. Math. Soc.*, **3**:4 (1990), 903–928.

[8] G. Hjorth, “Actions by the classical Banach spaces”, *J. Symbolic Logic*, **65**:1 (2000), 392–420.

[9] В. Г. Кановей, “Топологии, порожденные эффективно суслинскими множествами, и их приложения в дескриптивной теории множеств”, *УМН*, **51**:3 (1996), 17–52.

[10] W. Hurewicz, “Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A)”, *Fundam. Math.*, **12** (1928), 78–109.

[11] J. Saint-Raymond, “Approximation des sous-ensembles analytiques par l’intérieur”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **281**:2-3 (1975), 85–87.

[12] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Grad. Texts in Math., **156**, Springer-Verlag, New York, 1995.

В. Г. Кановей
Институт проблем передачи информации, г. Москва
E-mail: kanovei@rambler.ru

В. А. Любецкий
Институт проблем передачи информации, г. Москва
E-mail: lyubetsk@iitp.ru

Поступило
01.11.2009
Исправленный вариант
27.05.2011