В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, Об эффективной σ-ограниченности и σ-компактности в модели Соловея, *Матем. заметки*, 2015, том 98, выпуск 2, 247–257

Математические заметки

Том 98 выпуск 2 август 2015

УДК 510.225

Об эффективной σ-ограниченности и σ-компактности в модели Соловея

В. Г. Кановей, В. А. Любецкий

Доказаны две дихотомические теоремы об эффективных свойствах σ-ограниченности и σ-компактности ординально определимых точечных множеств в модели Соловея.

Библиография: 19 названий.

DOI: 10.4213/mzm10415

1. Введение. Эффективная дескриптивная теория множеств возникла в середине XX в. как набор технических средств и методов для уточнения и упрощения построений и рассуждений классической дескриптивной теории множеств, а также – в меньшей степени – как механизм использования некоторых теорем теории рекурсии для задач дескриптивной теории множеств. Однако вскоре выяснилось, что эффективная дескриптивная теория множеств сама приводит к задачам, не имеющим прямых аналогов в классической дескриптивной теории, в частности, задачам, связанным с *эффективностью* тех или иных свойств рассматриваемых множеств.

К этой категории относятся и следующие две теоремы (см. заметку [1], а также книгу [2; §§ 10.6 и 10.7] и статьи [3] и [4]) об эффективных вариантах σ-ограниченности[1] и σ-компактности множеств бэровского пространства $\mathcal{N} = \omega^\omega$.

Теорема 1. *Если $A \subseteq \mathcal{N}$ является множеством класса Σ^1_1, то выполнено одно и только одно из следующих двух утверждений*:

(I) *множество A Δ^1_1-эффективно σ-ограничено, т.е. найдется такая Δ^1_1-последовательность $\{T_n\}_{n\in\omega}$ компактных деревьев $T_n \subseteq \omega^{<\omega}$, что $A \subseteq \bigcup_n [T_n]$*;

(II) *существует суперсовершенное* $\mathbf{P}$ *– множество $Y \subseteq A$.*

Теорема 2. *Если $A \subseteq \mathcal{N}$ является множеством класса Δ^1_1, то выполнено одно и только одно из следующих двух утверждений*:

(I) *множество A Δ^1_1-эффективно σ-компактно, т.е. найдется такая Δ^1_1-последовательность $\{T_n\}_{n\in\omega}$ компактных деревьев $T_n \subseteq \omega^{<\omega}$, что $A = \bigcup_n [T_n]$*;

(II) *существует множество $Y \subseteq A$, гомеоморфное всему пространству $\mathcal{N}$ и относительно замкнутое в A.*

Исследование В. Г. Кановея выполнено за счет гранта РФФИ (13-01-00006). Исследование В. А. Любецкого выполнено за счет гранта Российского научного фонда (14-50-00150).

[1] Множество X бэровского пространства $\mathcal{N}$ *σ-ограничено*, если его можно накрыть σ-компактным множеством в $\mathcal{N}$.

Эффективность утверждений существования в этих двух теоремах состоит в том, что последовательности компактных деревьев в пунктах (I) принадлежат эффективному классу $\varDelta^1_1$. Неэффективный (более грубый) результат, соответствующий теореме 1, состоит в том, что любое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $A \subseteq \mathcal{N}$ либо накрывается σ-компактным множеством, либо же содержит суперсовершенное подмножество; это установлено в [5]. Аналогичный неэффективный результат, соответствующий теореме 2, получен в старой работе Гуревича [6].

Все эти упомянутые результаты относятся к типу *дихотомических теорем*, классифицирующих точечные множества на "малые" (тип (I) в обеих теоремах) и "большие" (тип (II)) с точки зрения того или иного критерия. Такие теоремы вызывают большой интерес в современной дескриптивной теории множеств, см., например, книги [7]–[9]. При этом тип "малых" множеств характеризуется тем или иным структурным свойством точечных множеств, а тип "больших" множеств – просто наличием подмножества, являющегося каноническим контрпримером к рассматриваемому свойству "малости", как, например, пространство Бэра $\mathcal{N} = \omega^\omega$ может рассматриваться как канонический пример не σ-компактного множества. К этому же классу дихотомических теорем относятся и главные результаты настоящей заметки – теоремы 3 и 4 ниже.

В нашей последующей работе [10] установлено, что теорема 2 не имеет места для случая, когда множество A принадлежит более широкому классу $\mathbf{\Sigma}^1_1$ (как в теореме 1), но для $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств имеется несколько более слабый результат. Там же получено далеко идущее обобщение теоремы 1, в котором свойство σ-ограниченности в части (I) теоремы ослаблено до свойства $\{\mathsf{F}_1, \dots, \mathsf{F}_n\}$-$\sigma$-ограниченности, где $\mathsf{F}_1, \dots, \mathsf{F}_n$ – заданные отношения эквивалентности класса $\varDelta^1_1$, а $\{\mathsf{F}_1, \dots, \mathsf{F}_n\}$-$\sigma$-ограниченность означает накрытие σ-ограниченным множеством и объединением счетного числа классов эквивалентности отношений $\mathsf{F}_1, \dots, \mathsf{F}_n$. Соответственно, условие (II) усиливается требованием, что суперсовершенное множество является попарно F_i-неэквивалентным для каждого $i = 1, \dots, n$.

Доказательства тех результатов, о которых шла речь выше, весьма специфичны именно для первого проективного уровня, и они не допускают обобщения на более высокие уровни проективной иерархии (например, для случая множеств A в классах $\varSigma^1_2$ и $\varDelta^1_2$) – где, как показано в [10], и соответствующие прямые обобщения самих теорем неверны. Правильные обобщения теоремы 1 для $\varSigma^1_2$-множеств получены в [3], а в более сложном варианте с классами эквивалентности – в [10]; по необходимости, они требуют несчетных объединений в пункте (I).

Как обычно, для третьего и более высоких уровней проективной иерархии результаты, подобные теоремам 1 и 2, невозможны. В этом случае принято решать возникающие задачи в контексте совместимости того или иного предложения с аксиомами Цермело–Френкеля **ZFC** или, что в принципе эквивалентно, исследовать положение дел в конкретных моделях теории **ZFC**. Среди последних особое место занимает *модель Леви–Соловея*, впервые использованная в [11] для доказательства непротиворечивости гипотезы измеримости всех проективных и даже всех вещественно-ординально определимых (класс **ROD**) множеств вещественных чисел; см. об этом в нашей книге [12; гл. 13].

В настоящей заметке доказывается, что в модели Леви–Соловея теоремы 1 и 2 допускают естественные обобщения, справедливые для множеств A весьма широкого (но все еще достаточно эффективного) класса OD *ординально определимых* точечных множеств, куда естественным образом включаются все классы Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n эффективной проективной иерархии. Главные результаты таковы:

Теорема 3 (в модели Соловея). *Если* $A \subseteq \mathcal{N}$ *– множество класса* OD, *то выполнено одно и только одно из следующих утверждений*:

(I) *множество* A OD-*эффективно* σ-*ограничено в том смысле, что существует* OD-*последовательность* $\{T_\xi\}_{\xi<\omega_1^{\mathbf{L}}}$ *компактных деревьев* $T_\xi \subseteq \omega^{<\omega}$, *для которой*

$$A \subseteq \bigcup_{\xi<\omega_1^{\mathbf{L}}} [T_\xi];$$

(II) *существует суперсовершенное* OD *множество* $Y \subseteq A$.

Теорема 4 (в модели Соловея). *Если* $A \subseteq \mathcal{N}$ *– множество класса* OD, *то выполнено одно и только одно из следующих утверждений*:

(I) *множество* A OD-*эффективно* σ-*компактно в том смысле, что существует* OD-*последовательность* $\{T_\xi\}_{\xi<\omega_1^{\mathbf{L}}}$ *компактных деревьев* $T_\xi \subseteq \omega^{<\omega}$, *для которой*

$$A = \bigcup_{\xi<\omega_1^{\mathbf{L}}} [T_\xi];$$

(II) *существует* OD-*множество* $Y \subseteq A$, *гомеоморфное всему пространству* $\mathcal{N}$ *и относительно замкнутое в* A.

Заметим, что в модели Соловея ординал $\omega_1^{\mathbf{L}}$ (т.е. первый несчетный кардинал конструктивного универсума $\mathbf{L}$) счетен в универсуме всех множеств – см. лемму 7 ниже, а потому объединения в пунктах (I) обеих теорем счетны, хотя и не индексированы (и не могут быть индексированы с сохранением ординальной определимости, см. замечание 16) прямо натуральными числами.

Отметим также, что теоремы 3 и 4 содержат условие эффективности на уровне OD также и в своих пунктах (II) – в отличие от теорем 1 и 2, где эффективности на рассматриваемых уровнях Δ^1_1 и Σ^1_1 в пунктах (II) достичь не удается.

Доказательства теорем 3 и 4 приведены в пп. 6 и 7, после технического введения в п. 3 и обзора свойств модели Леви–Соловея в пп. 4 и 5.

2. Замечание. Теоремы 3 и 4 опираются на свойства модели Соловея и не обязательно верны в других моделях теории множеств **ZFC**.

Например, в конструктивной модели Гёделя $\mathbf{L}$ (класс всех конструктивных множеств) любое вообще OD множество $X \subseteq \mathcal{N}$ удовлетворяет требованиям (I) обеих теорем, а потому строгая дихотомия уже невозможна.

С другой стороны, имеются и модели, где не все точечные множества из OD удовлетворяют дизъюнкции (I) $\vee$ (II) (в смысле одной – любой – из теорем). Именно, известны модели теории **ZFC**, в которых

(a) континуум-гипотеза неверна, т.е. $\omega_1 < 2^{\aleph_0}$, и

(b) существует полное упорядочение $\prec$ пространства $\mathcal{N}$ из OD, точнее, даже из одного из проективных классов Δ^1_n,

– см. статьи [13], [14]. Определенная модификация конструкции из [13] приводит к модели, в которой дополнительно выполняется следующее:

(c) $\omega_1^{\mathbf{L}} < \omega_1$.

Теперь, проводя в этой модели известное построение *множества Бернштейна* – т.е. такого $A \subseteq \mathcal{N}$, что ни A, ни дополнительное множество $A' = \mathcal{N} \setminus A$ не содержат совершенных подмножеств – в котором абстрактная аксиома выбора заменяется в нужных местах выбором $\prec$-наименьшей точки (где $\prec$ – полное упорядочение из условия (b)), мы получаем OD-множество Бернштейна A. Это множество не может включать несчетных борелевских подмножеств по теореме Александрова–Хаусдорфа, так что для него не выполнены свойства (II) обеих теорем. Но и свойства (I) также не могут быть выполнены. В самом деле, если A удовлетворяет условию (I) теоремы 3 (это слабейшее из двух свойств), то согласно (c) A есть множество первой категории в $\mathcal{N}$, а тогда дополнительное множество $A' = \mathcal{N} \setminus A$ заведомо включает совершенное подмножество, и мы имеем противоречие с выбором A.

Интересная нерешенная задача состоит в построении модели с таким же контрпримером, но при условии, что $\omega_1^{\mathbf{L}} = \omega_1$.

3. Техническое введение. Мы используем стандартные обозначения $\varSigma^1_1$, $\varPi^1_1$, $\varDelta^1_1$ для эффективных проективных классов в бэровском пространстве $\mathcal{N}$, а также $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Delta}^1_1$ для соответствующих неэффективных классов, см. [2], [7], [12], [15], [16].

Через $\omega^{<\omega}$ обозначим множество всех кортежей (конечных последовательностей) натуральных чисел, включая пустой кортеж Λ. Если $u, v \in \omega^{<\omega}$ то $\operatorname{lh} u$ – *длина* u, а $u \subset v$ означает, что v – *собственное продолжение* кортежа u. Если $s \in \omega^{<\omega}$ и $n \in \omega$, то $s^\wedge n$ есть кортеж, полученный добавлением члена n к s справа. Пусть

$$\mathcal{N}_s = \{x \in \mathcal{N} \mid s \subset x\} \quad (\textit{бэровский интервал } \text{в } \mathcal{N} = \omega^\omega)$$

для $s \in \omega^{<\omega}$. Если множество $X \subseteq \mathcal{N}$ содержит по крайней мере две точки, то существует наибольший кортеж $s = s_X$, для которого $X \subseteq \mathcal{N}_s$. В этом случае, пусть $\operatorname{diam} X = 1/(1 + \operatorname{lh} s)$, но $\operatorname{diam} X = 0$, если X содержит не более одной точки.

Множество $T \subseteq \omega^{<\omega}$ называется *деревом*, если $u \in T$ выполнено всякий раз, когда $u^\wedge n \in T$ для хотя бы одного n. Элементы $u \in T$ дерева T называются его *вершинами*. Вершина $u \in T$ называется *концевой*, если нет ни одного такого n, что $u^\wedge n \in T$. Любое непустое дерево содержит пустой кортеж Λ. Вершина $u \in T$ является *точкой ветвления* в T, если существуют такие числа $k \neq n$, что $u^\wedge k \in T$ и $u^\wedge n \in T$; $\operatorname{bran} T$ есть множество всех точек ветвления в T.

Дерево $T \subseteq \omega^{<\omega}$ без концевых вершин называется *компактным*, если оно имеет *конечные ветвления*, т.е. если $u \in \operatorname{bran} T$, то $u^\wedge n \in T$ выполнено лишь для конечно многих n. В этом случае, множество

$$[T] = \{x \in \mathcal{N} \mid \forall\, m\ (x \restriction m \in T)\}$$

пространства $\mathcal{N}$ компактно. Обратно, если $X \subseteq \mathcal{N}$ компактно, то множество

$$T = \operatorname{tree}(X) = \{x \restriction n \mid x \in X \wedge n \in \omega\}$$

является компактным деревом и $X = [T]$.

Дерево $T \subseteq \omega^{<\omega}$ без концевых вершин называется *совершенным*, если для каждой вершины $u \in T$ имеется точка ветвления $v \in \operatorname{bran} T$, для которой $u \subset v$. В этом случае множество $[T]$ совершенно. Совершенное дерево T называется *суперсовершенным*, если для каждой точки ветвления $u \in \operatorname{bran} T$ существует бесконечно много чисел n, для которых $u^\wedge n \in T$. В этом случае множество $[T]$ суперсовершенно. Обратно, если $X \subseteq \mathcal{N}$ – совершенное множество, то и дерево $\operatorname{tree}(X)$ совершенно, а для любого суперсовершенного множества $X \subseteq \mathcal{N}$ найдется суперсовершенное дерево $T \subseteq \operatorname{tree}(X)$. Напомним, что множество $X \subseteq \mathcal{N}$ называется:

- *совершенным*, если оно не имеет изолированных точек;
- *суперсовершенным*, если оно не имеет непустых открыто-замкнутых σ-компактных подмножеств.

4. О модели Соловея. Доказательства наших главных результатов – теорем 3 и 4 – приводятся ниже, а в этом пункте мы изложим те свойства модели Соловея, которые будут нужны в доказательствах теорем.

Прежде всего, под *моделью Соловея* мы имеем в виду ту модель аксиом **ZFC**, построенную в [11], в которой все проективные множества вещественных чисел измеримы по Лебегу, а не другую, более узкую модель из [11], в которой выполнены только аксиомы $\mathbf{ZF} + \mathrm{DC}$ (т.е. полная аксиома выбора заменена аксиомой зависимого выбора DC), но уже все вообще множества вещественных чисел измеримы. Об этих моделях см. подробнее в книге [12; гл. 13] и статье [17; § 4].

Определение 5. Пусть Ω – произвольный ординал. Через Ω-SM обозначим конъюнкцию следующих трех гипотез (A), (B), (C):

(A) $\Omega = \omega_1$;

(B) в классе $\mathbf{L}$ (гёделев универсум конструктивных множеств) истинно, что Ω – строго недостижимый кардинал;

(C) теоретико-множественный универсум $\mathbf{V}$ есть генерическое расширение класса $\mathbf{L}$ в смысле свертывающего форсинга $\mathscr{P} = \operatorname{Coll}(\omega, {<}\,\Omega)$, как в [12; § 13.6].

Таким образом, Ω-SM есть гипотеза о том, что универсум $\mathbf{V}$ является моделью Соловея над исходной моделью $\mathbf{L}$ и с ключевым кардиналом Ω.

Определение 6. Класс OD есть класс всех ординально определимых множеств. Другими словами, множество X принадлежит OD, если его можно определить формулой языка теории **ZFC**, содержащей лишь ординалы в роли параметров.[2]

Лемма 7. *В предположении* Ω-SM *выполнены следующие утверждения*:

(i) *если X – счетное* OD*-множество, то существуют ординал $\lambda < \Omega$ и взаимно однозначное* OD*-отображение* $f\colon \lambda \xrightarrow{\text{на}} X$;

(ii) *если $\xi < \Omega$ и $a \in \mathcal{N}$, то* $\omega_\xi^{\mathbf{L}[a]} < \Omega$; *в частности,* $\omega_\xi^{\mathbf{L}} < \Omega$;

(iii) *если $X \subseteq Y \in \mathbf{L}$, то $X \in \mathbf{L}$, если и только если* $X \in \mathrm{OD}$.

Доказательство. (i) Используем каноническое OD-отображение $F\colon \mathrm{Ord} \xrightarrow{\text{на}} \mathrm{OD}$ (см. утверждение 1 в [18; гл. 14]). Тогда отношения $F(\xi) \in X$ и $F(\xi) = F(\eta)$ (с аргументами ξ, η) также принадлежат OD. Далее очевидно.

(ii) и (iii) См. леммы 13.6.5, 13.6.7 книги [12].

Следующая лемма выражает ключевые свойства модели Соловея.

Лемма 8. *В предположении* Ω-SM *выполнены следующие утверждения*:

(i) *если $\lambda < \Omega$ и $f\colon \omega \xrightarrow{\text{на}} \lambda$, то универсум является $\mathscr{P}$-генерическим расширением класса* $\mathbf{L}[f]$;

[2] О некоторых деталях в связи с этим определением см. [12; § 3.5] и [18; гл. 14].

(ii) *если* $\varphi(x)$ *– любая* $\in$*-формула, то найдется* $\in$*-формула* $\overline{\varphi}(\lambda, x)$*, для которой для любых* $\lambda < \Omega$ *и функции* $f\colon \omega \xrightarrow{\text{на}} \lambda$ *выполнена эквивалентность*

$$\varphi(f) \quad \Longleftrightarrow \quad \textit{в } \mathbf{L}[f] \textit{ истинно } \overline{\varphi}(\lambda, f).$$

Доказательство. (i) Для случая $\lambda = \omega$, т.е. когда $f \in \mathscr{N}$ (даже не требуя выполнения $\operatorname{ran} f = \omega$) результат содержится в лемме 13.6.6 книги [12]. Чтобы свести случай произвольного λ к этому частному случаю, сопоставим каждой функции $f\colon \omega \xrightarrow{\text{на}} \lambda$ точку $f' \in \mathscr{N}$ следующим условием: если $n = 2^m \cdot 3^k \in \omega$ и $f(k) < f(m)$, то $f'(n) = 1$, а иначе $f'(n) = 0$. Тогда $\mathbf{L}[f'] = \mathbf{L}[f]$, и результат для f получается из результата для f'.

(ii) Лемма 13.6.7 (A) книги [12] для $w = \varnothing$ содержит результат для случая $\lambda = \omega$: формула $\overline{\varphi}(\lambda, f)$ выражает вынуждение $\varphi(f)$ над $\mathbf{L}[f]$. Общий случай получается тем же преобразованием, что и для утверждения (i).

Важность утверждения (ii) леммы 8 состоит в том, что она сводит истинность формулы $\varphi(f)$ в модели Соловея к истинности некоторой другой формулы $\overline{\varphi}(f)$ в классе $\mathbf{L}[f]$ всех множеств, конструктивных относительно f. Эта редукция будет использована в следующем пункте.

5. Форсинг OD-множествами в модели Соловея.

Определение 9 (в предположении Ω-SM). Через $\mathbf{P}$ обозначим множество всех непустых OD-множеств $Y \subseteq \mathscr{N}$. Множество $\mathbf{P}$ рассматривается как форсинг, поэтому его элементы будут называться (*вынуждающими*) “*условиями*” – и при этом меньшие по включению множества из $\mathbf{P}$ считаются *более сильными* “условиями”. Множество “условий” $W \subseteq \mathbf{P}$ называется:

- *плотным*, когда для каждого $Y \in \mathbf{P}$ существует “условие” $Z \in W$, $Z \subseteq Y$;
- $\mathbf{P}$*-генерическим*, когда выполнены следующие утверждения:
  1) если $X, Y \in W$, то $X \cap Y \in W$, и
  2) если множество $D \subseteq \mathbf{P}$ принадлежит OD и плотно, то $W \cap D \neq \varnothing$.

Предложение 10. *В предположении* Ω-SM, *если множество* $G \subseteq \mathbf{P}$ *является* $\mathbf{P}$*-генерическим, то пересечение* $\bigcap G$ *содержит единственную точку.*

Доказательство. См. лемму 14 в статье [19].

Множество $\mathbf{P}$ несчетно, а потому существование $\mathbf{P}$-генерических множеств прямо не следует из гипотезы Ω-SM. Однако к счастью множество $\mathbf{P}$ оказывается, в определенном смысле, *локально счетным.*

Определение 11 (в предположении Ω-SM). Назовем множество $X \in \mathrm{OD}$ *регулярным*, если OD-часть $\mathscr{P}^{\mathrm{OD}}(X) = \mathscr{P}(X) \cap \mathrm{OD}$ его множества-степени $\mathscr{P}(X)$ не более чем счетна. Через $\mathbf{P}^*$ обозначим множество всех регулярных $X \in \mathbf{P}$.

Например, в предположении Ω-SM множество $X = \mathscr{N} \cap \mathrm{OD} = \mathscr{N} \cap \mathbf{L}$ всех OD-точек бэровского пространства принадлежит $\mathbf{P}^*$. В самом деле,

$$\mathscr{P}^{\mathrm{OD}}(X) = \mathscr{P}(X) \cap \mathrm{OD} = \mathscr{P}(X) \cap \mathbf{L},$$

и поэтому $\mathscr{P}^{\mathrm{OD}}(X)$ допускает OD-биекцию на ординал $\omega_2^{\mathbf{L}}$, а мы знаем, что $\omega_2^{\mathbf{L}} < \Omega$ по лемме 7 (ii).

Напомним, что для $\lambda \in \mathrm{Ord}$ $\mathrm{Coll}(\omega, \lambda) = \lambda^{<\omega}$ есть форсинг для свертки ординала λ. Он состоит из всех (конечных) кортежей ординалов $\alpha < \lambda$ и порождает генерическую функцию $f\colon \omega \xrightarrow{\text{на}} \lambda$; см. книгу [12; § 9.7].

Лемма 12. *В предположении* Ω-SM, *если* $\lambda < \Omega$, *то множество* Coh_λ *всех функций* $f \in \lambda^\omega$, $\mathrm{Coll}(\omega, \lambda)$*-генерических над* $\mathbf{L}$, *является регулярным.*

Доказательство. Прежде всего, $\mathrm{Coh}_\lambda \in \mathbf{P}$ по очевидным соображениям. Далее, рассмотрим произвольное множество $Y \subseteq \mathrm{Coh}_\lambda$, $Y = \{f \in \mathrm{Coh}_\lambda \mid \varphi(f)\} \in \mathrm{OD}$, где формула φ содержит лишь ординалы в роли параметров. Тогда по лемме 8 (ii)

$$Y = \{f \in \mathrm{Coh}_\lambda \mid \text{в } \mathbf{L}[f] \text{ истинно } \overline{\varphi}(f)\}$$

для некоторой другой формулы $\overline{\varphi}(f)$ с ординалами в роли параметров. Значит,

$$Y = \mathrm{Coh}_\lambda \cap \bigcup_{p \in S} \{f \in \lambda^\omega \mid p \subset f\},$$

где S состоит из всех "условий" $p \in \mathrm{Coll}(\omega, \lambda)$, вынуждающих формулу $\overline{\varphi}(\dot f)$, а $\dot f$ – имя $\mathrm{Coll}(\omega, \lambda)$-генерического элемента. Но семейство $\mathscr{S}$ всех таких множеств S принадлежит $\mathbf{L}$ (поскольку форсинг над $\mathbf{L}$ выразим в $\mathbf{L}$) и имеет мощность $\aleph^{\mathbf{L}}_{\lambda+1}$ в $\mathbf{L}$. Следовательно, опять согласно лемме 7 (ii) $\mathscr{S}$ счетно в предположении Ω-SM. Однако, по предыдущему каждое множество $Y \subseteq \mathrm{Coh}$, $Y \in \mathrm{OD}$ однозначно определяется подходящим $S \in \mathscr{S}$.

Лемма 13 ([19]; в предположении Ω-SM). *Множество* $\mathbf{P}^*$ *плотно в* $\mathbf{P}$, *т.е. для всякого* $X \in \mathbf{P}$ *существует такое "условие"* $Y \in \mathbf{P}^*$, *что* $Y \subseteq X$.

Доказательство. Возьмем любое "условие" $X \in \mathbf{P}$. По определению $X \neq \varnothing$; рассмотрим произвольную точку $x \in X$. В предположении Ω-SM согласно лемме 13.6.5 книги [12] x принадлежит определенному подклассу $\mathbf{L}[\mathscr{G}_{\leqslant\lambda}]$ всей модели Соловея, где $\lambda < \omega_1 = \Omega$, причем этот подкласс сам является $\mathrm{Coll}(\omega, \lambda)$-генерическим расширением $\mathbf{L}$, т.е. $\mathbf{L}[\mathscr{G}_{\leqslant\lambda}] = \mathbf{L}[f]$, где $f \in \mathrm{Coh}_\lambda$ (см. доказательство леммы 13.6.5 в [12]). Отсюда следует, что существует OD отображение $H\colon \lambda^\omega \to \mathscr{N}$, для которых выполнено $x = H(f)$. Множество

$$P = \{f' \in \mathrm{Coh}_\lambda \mid H(f') \in X\}$$

также принадлежит OD и непусто (содержит f), и то же самое верно для его образа $Y = \{H(f') \mid f' \in P\} \subseteq X$ (содержит x). Наконец, множество Coh_λ регулярно по лемме 12, откуда вытекает регулярность и множества Y, т.е. $Y \in \mathbf{P}^*$.

6. Доказательство теоремы об эффективной σ-ограниченности. В этом пункте дается доказательство теоремы 3.

Мы рассуждаем в модели Соловея, т.е. предполагая Ω-SM.

Лемма 14. *Условия* (I) *и* (II) *теоремы* 3 *несовместимы.*

Доказательство. В модели Соловея множество $S = \bigcup_{\xi < \omega_1^{\mathbf{L}}} [T_\xi]$ в (I) есть счетное объединение компактных множеств; следовательно, оно σ-компактно. Значит, если $Y \subseteq A$ – суперсовершенное множество, как в (II), то оно накрыто σ-компактным множеством, что невозможно.

Теперь рассмотрим произвольное OD множество $A \subseteq \mathcal{N}$. Через U обозначим объединение всех множеств вида $[T]$, где $T \subseteq \omega^{<\omega}$ является компактным деревом из OD. Множества U и $A' = A \setminus U$, очевидно, принадлежат OD.

Лемма 15. *В условиях теоремы 3, если множество $\varnothing \neq Y \subseteq A'$ принадлежит* OD, *то его топологическое замыкание $\overline{Y}$ в $\mathcal{N}$ некомпактно.*

Доказательство. Если замыкание $\overline{Y}$ компактно, то дерево $T = \operatorname{tree}(Y)$ также компактно и принадлежит OD, а потому $Y \subseteq \overline{Y} = [T] \subseteq U$, что противоречит предположению $Y \subseteq A'$.

Мы имеем два случая.

Случай 1: $A' = \varnothing$, т.е. $A \subseteq U$. Покажем, что тогда выполнено условие (I) теоремы 3. На самом деле достаточно заметить, что в предположении Ω-SM точки пространства $\mathcal{N}$ из класса OD – это то же самое, что конструктивные точки (из $\mathbf{L}$), а потому существует OD-перечисление всех OD деревьев ординалами $\xi < \omega_1^{\mathbf{L}}$.

Случай 2: множество $A' = A \setminus U$ непусто. Согласно лемме 13 найдется “условие” $A'' \subseteq A'$, $A'' \in \mathbf{P}^*$. Тогда множество $P = \mathcal{P}^{\mathrm{OD}}(A'') = \mathcal{P}(A'') \cap \mathrm{OD}$ не более чем счетно. По лемме 7 имеются ординал $\lambda < \Omega$ и OD отображение $f\colon \lambda \xrightarrow{\text{на}} P$. Но множество $\mathcal{P}^{\mathrm{OD}}(\lambda)$ счетно, следовательно, счетным будет и $\mathcal{P}^{\mathrm{OD}}(P)$ (ввиду наличия отображения f). Фиксируем произвольное перечисление $\{\mathscr{D}_n\}_{n\in\omega}$ всех OD множеств $\mathscr{D} \subseteq P = \mathcal{P}^{\mathrm{OD}}(A'')$, плотных в $\mathbf{P}^*$ ниже A''[3].

Мы утверждаем, что существует система “условий” $Y_s \in \mathbf{P}^*$, $Y_s \subseteq A''$, индексированных кортежами $s \in \omega^{<\omega}$, удовлетворяющая таким требованиям:

(1) если $s \in \omega^{<\omega}$ и $i \in \omega$, то $Y_{s^\wedge i} \subseteq Y_s$;

(2) $\operatorname{diam} Y_s \leqslant 2^{-\operatorname{lh} s}$;

(3) если $s \in \omega^{<\omega}$ и $k \neq n$, то $Y_{s^\wedge k} \cap Y_{s^\wedge n} = \varnothing$ и, более того, “условия” $Y_{s^\wedge k}$ допускают покрытие попарно непересекающимися (открыто-замкнутыми) бэровскими интервалами $J_{s^\wedge k}$;

(4) если $s \in \omega^{<\omega}$, то $Y_s \in \mathscr{D}_{\operatorname{lh} s}$, где множества $\mathscr{D}_n$ определены как выше;

(5) если $s \in \omega^{<\omega}$ и $x_k \in Y_{s^\wedge k}$ для всех $k \in \omega$, то последовательность точек x_k не имеет сходящихся подпоследовательностей в $\mathcal{N}$.

Для построения начального “условия” Y_Λ заметим, что из-за плотности $\mathscr{D}_0$ найдется “условие” $Z \subseteq A''$ из $\mathscr{D}_0$. Чтобы выполнить (2), возьмем в роли Y_Λ пересечение Z с подходящим бэровским интервалом достаточно малого диаметра. Затем для удовлетворения (4) сужаем полученное “условие” еще раз; при этом используется плотность множества $\mathscr{D}_0$.

Теперь, рассуждая индукцией по длине кортежей, предположим, что $s \in \omega^{<\omega}$ и “условие” $Y_s \in \mathbf{P}^*$, $Y_s \subseteq A''$, уже построено. Согласно лемме 15 существует такой кортеж $\tau \in \operatorname{tree}(Y_s)$, что множество

$$K_s = \{k \in \omega \mid \tau^\wedge k \in \operatorname{tree}(Y_s)\}$$

бесконечно. Это позволяет определить последовательность из попарно различных точек $y_k \in Y_s$, $k \in \omega$, не имеющую ни одной сходящейся подпоследовательности. Накрываем эти точки бэровскими интервалами U_k, достаточно малыми для того,

[3] Множество $\mathscr{D} \subseteq P = \mathcal{P}^{\mathrm{OD}}(A'')$ плотно в $\mathbf{P}^*$ *ниже* A'', если пополненное множество $\mathscr{D}^+ = \mathscr{D} \cup \{Y \in \mathbf{P}^* \mid Y \cap Y'' = \varnothing\}$ плотно в $\mathbf{P}^*$ в смысле определения 9. В этом случае $\mathscr{D}^+$ плотно и в $\mathbf{P}$ согласно лемме 13.

чтобы требование (5) было выполнено для OD-множеств $Y_{s^\wedge i} = Y_s \cap U_i$, а затем сужаем эти множества, чтобы удовлетворить (2) и (4); при этом в отношении (4) используем плотность множеств $\mathscr{D}_n$. Это завершает индуктивный шаг построения "условий" Y_s.

По завершении конструкции заметим, что для любой точки $a \in \mathcal{N}$ пересечение $\bigcap_m Y_{a\restriction m}$ также содержит единственную точку согласно предложению 10, поскольку условие (4) обеспечивает требуемую генеричность множества

$$\{Y_{a\restriction m} \mid m \in \omega\}.$$

Пусть $\bigcap_m Y_{a\restriction m} = \{f(a)\}$. Отображение

$$f\colon \mathcal{N} \xrightarrow{\text{на}} Y = \{f(a) \mid a \in \mathcal{N}\}$$

по достаточно очевидным соображениям является гомеоморфизмом.

Проверим, что множество Y замкнуто в $\mathcal{N}$. Рассмотрим произвольную последовательность точек $a_n \in \mathcal{N}$ и предположим, что соответствующая последовательность точек $y_n = f(a_n) \in Y$ сходится к $y \in \mathcal{N}$; требуется доказать, что $y \in Y$.

Докажем, что последовательность $\{a_n\}_{n\in\omega}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. В самом деле, иначе последовательность $\{a_n\}_{n\in\omega}$ не может быть накрыта компактным множеством. Отсюда следует, что существуют кортеж $u \in \omega^{<\omega}$, бесконечное множество $K \subseteq \omega$ и для каждого $k \in K$ число $n(k)$, для которых $u^\wedge k \subset a_{n(k)}$. Но тогда по построению $y_{n(k)} \in Y_{u^\wedge k}$. Поэтому последовательность $\{y_{n(k)}\}_{k\in\omega}$ расходится по (5), противоречие.

Итак, последовательность $\{a_n\}_{n\in\omega}$ содержит подпоследовательность $b_k = a_{n(k)}$, сходящуюся к некоторой точке $b \in \mathcal{N}$. Тогда последовательность $z_k = f(b_k)$ (подпоследовательность последовательности $\{y_n\}_{n\in\omega}$) сходится к точке $z = f(b) \in Y$, что и требовалось.

Замкнутость множества Y этим доказана, что и завершает вывод требования (II) теоремы 3 для множества A.

Замечание 16. Требование (I) доказанной теоремы 3 не может быть усилено до следующего вида: *существует такая* OD-*последовательность* $\{T_n\}_{n\in\omega}$ *компактных деревьев* $T_n \subseteq \omega^{<\omega}$, *что* $A \subseteq \bigcup_n [T_n]$. В роли контрпримера возьмем $A = \mathcal{N} \cap \mathbf{L}$ (все конструктивные точки в $\mathcal{N}$). Это счетное множество в модели Соловея, допускающее OD-биекцию на ординал $\omega_1^{\mathbf{L}}$. Значит, требование (I) теоремы 3 выполнено (а (II) не выполнено), но существование последовательности компактных деревьев $\{T_n\}_{n\in\omega}$ в классе OD (следовательно, конструктивной), как легко видеть, невозможно.

7. Доказательство теоремы об эффективной σ-компактности. Здесь доказывается теорема 4. Мы рассуждаем в модели Соловея, т.е. предполагая Ω-SM.

Лемма 17. *Условия* (I) *и* (II) *теоремы* 4 *несовместимы.*

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 14 выше, множество $A = \bigcup_{\xi<\omega_1^{\mathbf{L}}} [T_\xi]$ в (I) σ-компактно, а потому оно не может содержать относительно замкнутых подмножеств, гомеоморфных бэровскому пространству.

Теперь рассмотрим произвольное OD-множество $A \subseteq \mathcal{N}$. Через U обозначим объединение всех множеств вида $[T]$, где $T \subseteq \omega^{<\omega}$ является компактным деревом из OD и $[T] \subseteq A$. Множество U и дополнительное к A множество $A' = A \setminus U$, очевидно, принадлежат OD.

По уже доказанной теореме 3 можно, не ограничивая общности, предполагать, что множество A σ-ограничено (т.е. накрывается σ-компактным множеством), а потому каждое замкнутое множество $F \subseteq A$ также σ-компактно.

Лемма 18. *Если* $\varnothing \neq F \subseteq A'$ *– непустое* OD *множество, то* $\overline{F} \nsubseteq A$.

Доказательство. Пусть, напротив, $\overline{F} \subseteq A$. Согласно не ограничивающему общности предположению выше множество $\overline{F}$ σ-компактно, т.е. $\overline{F} = \bigcup_n F_n$, где все множества F_n компактны. Понятно, что найдется такой бэровский интервал $\mathcal{N}_s$, что множество $X = \mathcal{N}_s \cap \overline{F}$ непусто и $X \subseteq F_n$ для какого-то n. Тогда $X \subseteq A$ есть непустое компактное OD-множество. Поэтому по определению $X \subseteq U$ и $A' \cap X = \varnothing$. Другими словами, $\mathcal{N}_s \cap \overline{F} \cap A' = \varnothing$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{N}_s \cap F = \varnothing$ (так как $F \subseteq A'$), а это противоречит соотношению $X = \mathcal{N}_s \cap \overline{F} \neq \varnothing$.

Случай 1: $A' = \varnothing$, т.е. $A = U$. Отсюда следует условие (I) теоремы.

Случай 2: $A' \neq \varnothing$. Как и в доказательстве теоремы 3, возьмем произвольное множество $A'' \subseteq A'$, $A'' \in \mathbf{P}^*$, и зафиксируем перечисление $\{\mathscr{D}_n\}_{n\in\omega}$ всех OD-множеств $\mathscr{D} \subseteq P = \mathcal{P}^{\mathrm{OD}}(A'')$, плотных в $\mathbf{P}^*$ ниже A''. Чтобы получить множество $Y \subseteq A''$, *относительно* замкнутое в A и гомеоморфное пространству $\mathcal{N}$, мы используем систему "условий" $Y_s \in \mathbf{P}^*$, $Y_s \subseteq A''$, удовлетворяющих требованиям (1)–(4) п. 6 и следующему требованию вместо (5):

(5′) если $s \in \omega^{<\omega}$, то существует такая точка $y_s \in \overline{Y_s} \setminus A$, что любая последовательность точек $x_k \in Y_{s^\wedge k}$, $k \in \omega$, сходится к y_s.

Построение аналогично соответствующему построению п. 6. Именно, допустим, что $s \in \omega^{<\omega}$ и "условие" $Y_s \subseteq A''$ уже построено. Тогда его замыкание $\overline{Y_s}$ удовлетворяет $\overline{Y_s} \nsubseteq A$ по лемме 18. Тогда существует последовательность попарно различных точек $x_n \in Y_s$, сходящаяся к точке $y_s \in \overline{Y_s} \setminus A$. Пусть U_n – некоторый бэровский интервал, содержащий x_n и имеющий диаметр меньше, чем $1/3$ от наименьшего расстояния от x_n до точек x_k, $k \neq n$. Положим $Y_{s^\wedge n} = Y_s \cap U_n$ для каждого n и сузим множества $Y_{s^\wedge n}$ с целью обеспечить требования (2) и (4). Этим индуктивный шаг построения закончен.

Имея эту систему множеств Y_s, мы получаем (см. п. 6) такой гомеоморфизм

$$f\colon \mathcal{N} \xrightarrow{\text{на}} Y = \operatorname{ran} f = \{f(a) \mid a \in \mathcal{N}\} \subseteq A'',$$

что равенство $\bigcap_m Y_{a \restriction m} = \{f(a)\}$ выполнено для всех точек $a \in \mathcal{N}$.

Остается проверить, что множество Y относительно замкнуто в A.

Рассмотрим такую последовательность точек $a_n \in \mathcal{N}$, что соответствующая последовательность их образов $y_n = f(a_n) \in Y$ сходится к точке $y \in \mathcal{N}$; требуется доказать, что $y \in Y$ или $y \notin A$. Если последовательность $\{a_n\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $b \in \mathcal{N}$, то, как и в доказательстве теоремы 3, последовательность $\{y_n\}$ сходится к точке $f(b) \in Y$. Если же $\{a_n\}$ не имеет сходящихся подпоследовательностей, то существуют кортеж $s \in \omega^{<\omega}$, бесконечное множество $K \subseteq \omega$ и для каждого $k \in K$ число $n(k)$ такие, что $s^\wedge k \subset a_{n(k)}$. Но тогда $y_{n(k)} \in Y_{s^\wedge k}$ по построению. Следовательно, подпоследовательность $\{y_{n(k)}\}_{k\in\omega}$ сходится к точке $y_s \notin A$ по (5′), что и требовалось.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, “Об эффективной компактности и сигма-компактности”, *Матем. заметки*, **91**:6 (2012), 840–852.

[2] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*, МЦНМО, М., 2010.

[3] A. S. Kechris, “On a notion of smallness for subsets of the Baire space”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **229** (1977), 191–207.

[4] A. Louveau, J. Saint Raymond, “Borel classes and closed games: Wadge-type and Hurewicz-type results”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **304** (1987), 431–467.

[5] J. Saint Raymond, “Approximation des sous-ensembles analytiques par l’interior”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, **281** (1975), 85–87.

[6] W. Hurewicz, “Relativ perfekte Teile von Punktmengen und Mengen (A)”, *Fundam. Math.*, **12** (1928), 78–109.

[7] V. Kanovei, *Borel Equivalence Relations. Structure and Classification*, Univ. Lecture Ser., **44**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[8] Su Gao, *Invariant Descriptive Set Theory*, Pure Appl. Math. (Boca Raton), **293**, CRC Press, Boca Raton, FL, 2009.

[9] V. Kanovei, M. Sabok, J. Zapletal, *Canonical Ramsey Theory on Polish Spaces*, Cambridge Tracts in Math., **202**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.

[10] V. Kanovei, V. Lyubetsky, “On effective σ-boundedness and σ-compactness”, *MLQ Math. Log. Q.*, **59**:3 (2013), 147–166.

[11] R. M. Solovay, “A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable”, *Ann. of Math.* (2), **92** (1970), 1–56.

[12] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы*, МЦНМО, М., 2013.

[13] L. Harrington, “Long projective wellorderings”, *Ann. Math. Logic*, **12**:1 (1977), 1–24.

[14] В. Г. Кановей, “О дескриптивных формах счетной аксиомы выбора”, *Исследования по неклассическим логикам и теории множеств*, Наука, М., 1979, 3–136.

[15] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, “О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств”, *УМН*, **58**:5 (2003), 3–88.

[16] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Grad. Texts in Math., **156**, Springer-Verlag, New York, 1995.

[17] В. Г. Кановей, “Проективная иерархия Лузина: современное состояние теории”, *Справочная книга по математической логике*. Часть II. *Теория множеств*, Наука, М., 1982, 273–364.

[18] Т. Йех, *Теория множеств и метод форсинга*, Мир, М., 1973.

[19] V. Kanovei, “An Ulm-type classification theorem for equivalence relations in Solovay model”, *J. Symbolic Logic*, **62**:4 (1997), 1333–1351.

В. Г. Кановей
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва;
Московский государственный университет путей
сообщения (МИИТ)
E-mail: kanovei@iitp.ru

Поступило
27.09.2013
Исправленный вариант
03.03.2015

В. А. Любецкий
Институт проблем передачи информации
им. А. А. Харкевича РАН, г. Москва
E-mail: lyubetsk@iitp.ru