Математические заметки

Том 102 выпуск 3 сентябрь 2017

УДК 510.225+510.223

# Определимое счетное множество, не содержащее определимых элементов

**В. Г. Кановей, В. А. Любецкий**

Доказана непротиворечивость существования счетного определимого множества вещественных чисел, не содержащего определимых элементов. Модель, где такое множество существует, получена с помощью счетного произведения форсинга Йенсена с конечной поддержкой.

Библиография: 17 названий.

**Ключевые слова:** счетные множества, определимые элементы, форсинг Йенсена.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm10842

**1. Введение. К проблеме выбора определимого элемента.** Вопросы, связанные с определимостью математических объектов, оказались в центре внимания дискуссий по основаниям математики сразу после выхода в 1905 г. знаменитой работы Цермело по аксиоме выбора и ее приложению к проблеме полного упорядочивания произвольного множества, а также в какой-то мере в связи с одновременной публикацией парадокса Ришара. Например, Адамар, Борель, Бэр и Лебег, участники дискуссии, опубликованной в статье [1], несмотря на значительное различие позиций по вопросам оснований математики, подчеркивали, что доказательство непустоты, т.е. чистое доказательство существования элемента в данном множестве, и прямое определение (эффективное построение) такого элемента – это разные математические результаты, из которых второй не следует из первого. В частности, Лебег в своей части [1] указал на трудности в вопросе эффективного выбора, т.е. выбора определимого элемента в определимом же (непустом) множестве[1].

Для удобства ссылок, представим замечание Лебега так.

Проблема 1 (Лебег). Верно ли, что всякое непустое определимое множество имеет определимый элемент?

Исследование В. Г. Кановея выполнено за счет грантов Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 13-01-00006 и 17-01-00705). Исследование В. А. Любецкого выполнено за счет гранта Российского научного фонда (грант № 14-50-00150).

[1]“Ainsi je vois déjà une difficulté dans ceci dans un $M'$ déterminé je puis choisir un $m'$ déterminé”, в оригинале. Thus I already see a difficulty with the assertion that “in a determinate $M'$ I can choose a determinate $m'$”, в английском переводе.

Уровень развития оснований математики в начале XX века был недостаточен не только для решения, но даже для адекватной математической формулировки проблемы. После работы Тарского [2] о невозможности математически определить сами понятия истинности и определимости, стало ясно, что формулировка проблемы нуждается в уточнении. Такое уточнение было получено на основе понятия ординальной определимости. Множество $x$ *ординально определимо* [3], если его можно определить теоретико-множественной формулой, содержащей один или несколько ординалов в роли параметров определения. При этом класс Ord всех ординалов является продолжением натурального ряда, единственным в своем роде и достаточно определенным для того, чтобы не настаивать на определимости самих ординалов.

В отличие от "просто" определимости (без параметров), для ординальной определимости имеется теоретико-множественная формула $\mathrm{od}(x)$, адекватно выражающая свойство множества $x$ быть ординально определимым, см. [4; § 3.5]. Это позволяет корректно определить класс $\mathrm{OD} = \{x : \mathrm{od}(x)\}$ всех ординально определимых множеств, и переформулировать проблему 1 так.

Проблема 2. Верно ли, что всякое непустое ординально определимое множество имеет элемент также из OD?

В такой постановке проблема корректно сформулирована, но не имеет определенного решения в современной теории множеств **ZFC**. Точнее, ответ может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от того, какие теоретико-множественные универсумы (модели **ZFC**) рассматриваются.

Например, в универсуме **L** конструктивных множеств Гёделя все множества ординально определимы, а потому ответ тривиально *положительный*.

С другой стороны, во многих моделях, полученных как расширения универсума **L** посредством форсинга (генерические расширения), не все даже вещественные числа[2] ординально определимы, так что множество

$$X = \mathbb{R} \setminus \mathrm{OD} = \{x \in \mathbb{R} : \neg\, \mathrm{od}(x)\}$$

всех чисел, не являющихся ординально определимыми, непусто, принадлежит OD (даже просто определимо посредством формулы $\mathrm{od}(x)$), но не содержит ни одного числа из OD, что дает *отрицательный* ответ на поставленный вопрос. Таково положение, к примеру, в известной модели Соловея [5], той где где все проективные множества измеримы по Лебегу.

Простой анализ показывает, что множество $X = \mathbb{R} \setminus \mathrm{OD}$, если непусто (как к примеру в упомянутой модели Соловея), то является достаточно *большим*, т.е. заведомо мощности континуум, если измеримым, то имеющим полную меру, и так далее. Существует ли подобный же пример среди множеств *малых*, скажем счетных? Это приводит к следующей проблеме, обсуждавшейся на таких известных дискуссионных площадках современной международной математики как *Mathoverflow* [6] и *Foundations of mathematics* (FOM) [7].

[2] Под *вещественными числами* (reals) в современных работах по теории множеств понимаются не столько элементы собственно вещественной прямой, сколько точки бэровского пространства $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ или канторова дисконтинуума $2^{\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Именно в этом смысле следует понимать и $\mathbb{R}$ в этом разделе. Точное понимание зависит от контекста, но все сказанное здесь в равной степени относится к $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, или собственно вещественной прямой, в силу наличия определимых взаимно однозначных соответствий между всеми тремя областями.

Проблема 3. Доказать непротиворечивость утверждения о существовании непустого *счетного* ординально определимого множества вещественных чисел, не имеющего ни одного элемента из OD.

Отметим, что любое *конечное* OD множество вещественных чисел заведомо состоит только из OD элементов, и потому не может служить искомым примером.

Следующая теорема, наш основной результат, содержит решение.

Теорема 4. *Существует такое генерическое расширение* $\mathbf{L}[\langle x_n\rangle_{n<\omega}]$ *конструктивного универсума* $\mathbf{L}$ *последовательностью точек* $x_n \in 2^{\mathbb{N}}$, *где истинно, что* $\{x_n : n < \omega\}$ *есть (счетное)* $\Pi^1_2$*-множество, не имеющее* OD *элементов.*

Таким образом, гипотеза существования счетного множества $X \subseteq \mathbb{R}$ класса $\Pi^1_2$, а, следовательно, OD, не содержащего OD элементов, в самом деле не противоречит аксиомам **ZFC**. Класс $\Pi^1_2$ является здесь наилучшей возможностью. В самом деле, даже двойственный класс $\Sigma^1_2$ не может содержать подобных примеров, так как благодаря теореме $\Pi^1_1$-униформизации [8; 8.4.1] или [9; 2.4.1] любое (не только счетное) непустое $\Sigma^1_2$-множество обязательно содержит элемент класса $\Delta^1_2$. Классы $\Sigma^1_n$, $\Pi^1_n$, $\Delta^1_n$ эффективной проективной иерархии (о них см. [8; гл. 6] или [9; гл. 1]) являются, разумеется, подмножествами в OD.

Следуя предположению Энайята [7], [10], мы используем для доказательства теоремы 4 произведение $\mathbb{P}^{<\omega}$ (с конечной базой) счетного числа копий форсинга $\mathbb{P}$, введенного Йенсеном в [11] для построения модели теории множеств с неконструктивной точкой $x \in 2^{\mathbb{N}}$ класса $\Delta^1_3$. Этот форсинг определяется в конструктивном универсуме $\mathbf{L}$, в виде $\mathbb{P} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbb{U}_\alpha$, где каждое $\mathbb{U}_\alpha$ – счетное множество, состоящее из совершенных деревьев в $2^{<\omega}$. Мы выполняем это построение в разделе 7, на основе предварительного материала разделов 2–4. Искомые свойства $\mathbb{P}^{<\omega}$ генерических расширений доказываются в разделе 8 при помощи ключевой теоремы 19.

Несколько слов о результатах, полученных этим же методом незадолго до выхода в печать настоящей статьи. Кановей и Любецкий [12] построили модель, в которой имеется проективное множество эффективного класса $\Pi^1_2$ в $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}$ со счетными вертикальными сечениями, которое не допускает униформизации никаким проективным множеством. Ими же построены модели [13] с контрпримерами, относящимися к принципам отделимости и редукции для третьего проективного уровня. Голшани, Кановей и Любецкий [14] построили модель, в которой имеется $\Pi^1_2$-пара счетных дизъюнктных множеств $X, Y \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, эффективно неразличимых в том смысле, что если $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ – проективное множество любого эффективного класса $\Pi^1_n$, то $X \cap A \neq \varnothing$ равносильно $Y \cap A \neq \varnothing$.

**2. Совершенные деревья.** Через $2^{<\omega}$ (полное диадическое дерево) обозначается множество всех *кортежей* (конечных последовательностей) чисел 0, 1, включая *пустой кортеж* $\Lambda$. Если $s, t \in 2^{<\omega}$, то $s \subseteq t$ означает, что $t$ продолжает кортеж $s$ (включая возможность $t = s$), а $s \subsetneq t$ означает собственное продолжение ($s \subseteq t$ и $t \neq s$). Если $t \in 2^{<\omega}$ и $i = 0, 1$ то $t^\frown i$ обозначает продолжение $t$ членом $i$ справа. Если $s \in 2^{<\omega}$, то $\mathrm{lh}(s)$ есть длина кортежа $s$, и мы полагаем

$$2^n = \{s \in 2^{<\omega} : \mathrm{lh}(s) = n\}$$

(все кортежи длины $n$).

Множество $T \subseteq 2^{<\omega}$ называется *деревом*, если для любых кортежей $s \subsetneq t$ в $2^{<\omega}$ из $t \in T$ следует $s \in T$. В этом случае, если $s \in T$, то положим

$$T \restriction s = \{t \in T : s \subseteq t \vee t \subseteq s\}$$

(обрезка на кортеж).

Любое непустое дерево $T \subseteq 2^{<\omega}$ содержит пустой кортеж $\Lambda$.

Через $\mathbf{PT}$ обозначается множество всех *совершенных деревьев* $\varnothing \neq T \subseteq 2^{<\omega}$. Другими словами, непустое дерево $T \subseteq 2^{<\omega}$ принадлежит $\mathbf{PT}$, когда оно не имеет концевых вершин и изолированных ветвей. В этом случае имеется наибольший кортеж $s = \operatorname{stem} T \in T$, для которого $T = T \restriction s$ – *ствол* $T$, и тогда $s^\frown 1 \in T$ и $s^\frown 0 \in T$. Если $T \in \mathbf{PT}$, то пусть

$$[T] = \{a \in 2^{\mathbb{N}} : \forall n \ (a \restriction n \in T)\} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$$

– совершенное множество всех *ветвей дерева* $T$.

Пример 5. Полное дерево $2^{<\omega}$ принадлежит $\mathbf{PT}$ и $[2^{<\omega}] = 2^{\mathbb{N}}$.

Если $u \in 2^{<\omega}$, то дерево $T[u] = \{s \in 2^{<\omega} : u \subseteq s \vee s \subseteq u\}$ также принадлежит $\mathbf{PT}$ и $[T[u]] = \{a \in 2^{\mathbb{N}} : u \subsetneq a\}$ – *бэровский интервал* в $2^{\mathbb{N}}$.

Определение 6. *Форсингом из совершенных деревьев* (кратко, ФСД) называется любое непустое множество $\mathbb{P} \subseteq \mathbf{PT}$, для которого выполнено такое условие: если $u \in T \in \mathbb{P}$, то и $T \restriction u \in \mathbb{P}$.

Такое множество $\mathbb{P}$ можно рассматривать как форсинг (если $T \subseteq T'$, то $T$ – более сильное условие); оно присоединяет точку из $2^{\mathbb{N}}$ к исходной модели. Именно, если множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим, то пересечение $\bigcap_{T \in G}[T] = \{x\}$ содержит единственную точку $x = \mathbf{x}[G] \in 2^{\mathbb{N}}$, называемую $\mathbb{P}$-*генерической точкой*.

Определение 7. Пусть $\mathbb{P}$ есть ФСД. Через $\mathbb{P}^{<\omega}$ обозначается *произведение* $\omega$ *копий форсинга* $\mathbb{P}$ *с конечной базой*.

Другими словами, типичный элемент множества $\mathbb{P}^{<\omega}$ – будем называть их *мультидеревьями* (над $\mathbb{P}$) – есть последовательность вида $\boldsymbol{\tau} = \langle T_n \rangle_{n \in \omega}$, каждый член $T_n = \boldsymbol{\tau}(n)$ которой принадлежит $\mathbb{P} \cup \{2^{<\omega}\}$ (обычно $\mathbb{P}$ будет содержать $2^{<\omega}$), и множество $|\boldsymbol{\tau}| = \{n : T_n \neq 2^{<\omega}\}$ (база $\boldsymbol{\tau}$) конечно.

Множество $\mathbb{P}^{<\omega}$ упорядочивается покомпонентно: $\boldsymbol{\sigma} \leqslant \boldsymbol{\tau}$ (т.е. $\boldsymbol{\sigma}$ – более сильное условие), когда $\boldsymbol{\sigma}(n) \subseteq \boldsymbol{\tau}(n)$ в $\mathbb{P}$ для всех $n$. Как форсинг, $\mathbb{P}^{<\omega}$ присоединяет последовательность $\langle x_n \rangle_{n<\omega}$ $\mathbb{P}$-генерических точек $x_n \in 2^{\mathbb{N}}$. Именно, если множество $G \subseteq \mathbb{P}^{<\omega}$ является $\mathbb{P}^{<\omega}$-генерическим и $n < \omega$, то по теореме о произведении форсингов множество $G_n = \{\boldsymbol{\tau}(n) : \boldsymbol{\tau} \in G\}$ будет $\mathbb{P}$-генерическим, и потому точка $x_n = \mathbf{x}_n[G] = \mathbf{x}[G_n]$ является $\mathbb{P}$-генерической по предыдущему.

Замечание 8. Кортежи $\langle T_0, \dots, T_n \rangle$ деревьев $T_i \in \mathbb{P}$ будут использоваться для обозначения мультидеревьев

$$\langle T_0, \dots, T_n, 2^{<\omega}, 2^{<\omega}, 2^{<\omega}, \dots \rangle \in \mathbb{P}^{<\omega}.$$

**3. Расщепляющие системы деревьев.** Зафиксируем ФСД $\mathbb{P} \subseteq \mathbf{PT}$.

Определение 9. Множество $\mathbf{SS}(\mathbb{P})$ (*расщепляющие системы* над $\mathbb{P}$) состоит из всех систем $\varphi = \langle T_s \rangle_{s \in 2^{\leqslant n}}$, где $n = \operatorname{hgt}(\varphi) < \omega$ (высота $\varphi$), и

(1) каждое $T_s = T_s^\varphi = \varphi(s)$ есть дерево в $\mathbb{P}$,

(2) если $s^\frown i \in 2^{\leqslant n}$ $(i = 0, 1)$, то $T_{s^\frown i} \subseteq T_s$ и $\operatorname{stem} T_s {}^\frown i \subseteq \operatorname{stem} T_{s^\frown i}$, откуда легко следует, что $[T_{s^\frown 0}] \cap [T_{s^\frown 1}] = \varnothing$.

Положим, что *пустая система* $\boldsymbol{\Lambda}$ также принадлежит $\mathbf{SS}(\mathbb{P})$, и $\operatorname{hgt}(\boldsymbol{\Lambda}) = -1$. (Имеется много систем $\varphi \in \mathbf{SS}(\mathbb{P})$ с $\operatorname{hgt}(\varphi) = 0$; каждая из них содержит единственное дерево $T = T_\Lambda^\varphi$, где $\Lambda$ – пустой кортеж.)

Если $\varphi$, $\psi$ – системы из $\mathbf{SS}(\mathbb{P})$, то мы определяем, что

- $\varphi$ *продолжает* $\psi$ (символически $\psi \preccurlyeq \varphi$), если $n = \operatorname{hgt}(\psi) \leqslant \operatorname{hgt}(\varphi)$ и $\psi(s) = \varphi(s)$ для всех $s \in 2^{<n}$ (и отдельно $\boldsymbol{\Lambda} \preccurlyeq \varphi$ для любой $\varphi$);
- *строго продолжает* $\psi$ $(\psi \prec \varphi)$, если дополнительно $\operatorname{hgt}(\psi) < \operatorname{hgt}(\varphi)$;

и наконец $\varphi$ *измельчает* $\psi$, если

$$n = \operatorname{hgt}(\psi) = \operatorname{hgt}(\varphi), \qquad \varphi(s) \subseteq \psi(s), \quad s \in 2^{\operatorname{hgt}(\varphi)}, \qquad \varphi(s) = \psi(s), \quad s \in 2^{<\operatorname{hgt}(\varphi)}.$$

Таким образом, измельчение позволяет сужать деревья в самом верхнем уровне системы, но не изменяет тех деревьев, которые принадлежат более низким уровням.

Коль скоро $\mathbb{P}$ есть ФСД, существуют бесконечные строго $\prec$-возрастающие последовательности $\langle \varphi_n \rangle_{n<\omega}$ систем $\varphi_n$ из $\mathbf{SS}(\mathbb{P})$. Предельная система

$$\varphi = \bigcup_n \varphi_n = \langle T_s \rangle_{s \in 2^{<\omega}}$$

такой последовательности, очевидно, удовлетворяет условиям (1) и (2) определения 9 на всей области $2^{<\omega}$.

Лемма 10. *В этом случае как* $T = \bigcap_n \bigcup_{s \in 2^n} T_s$, *так и все пересечения вида* $T \cap T_s$ *– деревъя в* $\mathbf{PT}$ (*не обязательно в* $\mathbb{P}$), *и мы имеем*

$$[T] = \bigcap_n \bigcup_{s \in 2^n} [T_s] \qquad \text{и} \qquad [T \cap T_s] = \bigcap_{n \geqslant \operatorname{lh}(s)} \ \bigcup_{v \in 2^n,\, s \subseteq v} [T_v].$$

*Если* $u \in T$, *то найдется такой кортеж* $s \in 2^{<\omega}$, *что* $T \upharpoonright u = T \cap T_s$.

Доказательство. Для последнего утверждения достаточно взять наименьший кортеж $s \in 2^{<\omega}$, для которого $s \subseteq \operatorname{stem} T_s$.

Определим $\mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$, *степень* $\mathbf{SS}(\mathbb{P})$ *с конечной базой*, как множество всех бесконечных последовательностей $\Phi = \langle \varphi_k \rangle_{k \in \omega}$, где каждый член $\varphi_k = \Phi(k)$ принадлежит $\mathbf{SS}(\mathbb{P})$, а множество $|\Phi| = \{k : \varphi_k \neq \boldsymbol{\Lambda}\}$ (база $\Phi$) конечно. Последовательности из $\mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$ будут называться *мультисистемами* (над $\mathbb{P}$).

Мы определяем $\Psi \preccurlyeq \Phi$, если $\Psi(k) \preccurlyeq \Phi(k)$ (в $\mathbf{SS}(\mathbb{P})$) для всех $k$. Тогда $\Psi \prec \Phi$ означает, что $\Psi \preccurlyeq \Phi$ и $\Psi(k) \prec \Phi(k)$ для хотя бы одного $k$. Дополнительно, $\Psi \prec\prec \Phi$, если $|\Psi| \subseteq |\Phi|$ и $\Psi(k) \prec \Phi(k)$ для всех $k \in |\Phi|$.

Дерево $T \in \mathbf{PT}$ *встречается в системе* $\varphi \in \mathbf{SS}(\mathbb{P})$, если $T = \varphi(s)$ для какого-то кортежа $s \in 2^{\leqslant \operatorname{hgt}(\varphi)}$, и *встречается в мультисистеме* $\Phi = \langle \varphi_k \rangle$, если оно встречается в одной из систем $\varphi_k$, $k \in |\Phi|$.

**4. Продолжение форсинга по Йенсену.** Целью нижеследующего ключевого определения 12 является построение форсинга $\mathbb{U}$, определенным образом *продолжающего* данный ФСД $\mathbb{P}$. Этот метод продолжения, вводящий важные свойства генеричности продолженного форсинга, был в контексте совершенных деревьев предложен Йенсеном [11].

Через $\mathbf{ZFC}'$ обозначим подтеорию теории множеств Цермело–Френкеля $\mathbf{ZFC}$, включающую все аксиомы кроме аксиомы степени, вместо которой вводится аксиома существования множества-степени $\mathscr{P}(X)$ для каждого не более чем счетного множества $X$. (Отсюда следует также существование ординала $\omega_1$ и таких континуальных множеств, как $\mathbf{PT}$.)

Определение 11. Пусть $\mathbb{P}$ есть ФСД. Множество $D \subseteq \mathbf{SS}(\mathbb{P})$ *плотно в* $\mathbf{SS}(\mathbb{P})$, если для любой системы $\psi \in \mathbf{SS}(\mathbb{P})$ имеется система $\varphi \in D$, продолжающая $\psi$, и *открыто плотно в* $\mathbf{SS}(\mathbb{P})$, если, дополнительно, всякая система $\varphi' \in \mathbf{SS}(\mathbb{P})$, продолжающая систему $\varphi \in D$, сама принадлежит $D$.

Наконец, $D$ *предплотно в* $\mathbf{SS}(\mathbb{P})$, если $\{\varphi' \in \mathbf{SS}(\mathbb{P}) : \exists\, \varphi \in D,\ \varphi \preccurlyeq \varphi'\}$ (множество всех продолжений систем из $D$) плотно в $\mathbf{SS}(\mathbb{P})$.

Определение 12. Пусть $\mathfrak{M}$ – счетная транзитивная модель теории $\mathbf{ZFC}'$.

Допустим, что $\mathbb{P} \in \mathfrak{M}$ есть ФСД, содержащий дерево $2^{<\omega}$. Тогда множества $\mathbb{P}^{<\omega}$, $\mathbf{SS}(\mathbb{P})$, $\mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$ также принадлежат $\mathfrak{M}$.

Зафиксируем $\preccurlyeq$-возрастающую последовательность $\varPhi = \langle \Phi^j \rangle_{j<\omega}$ мультисистем $\Phi^j = \langle \varphi_k^j \rangle_{k\in\omega} \in \mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$, *генерическую над* $\mathfrak{M}$, т.е. она непусто пересекает любое множество $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$, плотное в $\mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$. Тогда в частности $\varPhi$ пересекает каждое множество вида

$$D_k = \{\Phi \in \mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P}) : \forall k' \leqslant k,\ k \leqslant \operatorname{hgt}(\Phi(k'))\}.$$

Значит, если $k < \omega$, то последовательность $\{\varphi_k^j\rangle_{j<\omega}\}$ систем $\varphi_k^j \in \mathbf{SS}(\mathbb{P})$ *строго возрастает с перерывами*: $\varphi_k^j \prec \varphi_k^{j+1}$ для бесконечно многих индексов $j$ (и $\varphi_k^j = \varphi_k^{j+1}$ для прочих $j$). Поэтому существует такая система деревьев $\langle \mathbf{T}_k^{\varPhi}(s)\rangle_{k<\omega\wedge s\in 2^{<\omega}}$ в $\mathbb{P}$, что $\varphi_k^j = \langle \mathbf{T}_k^{\varPhi}(s)\rangle_{s\in 2^{<h(j,k)}}$, где $h(j,k) = \operatorname{hgt}(\varphi_k^j)$. Тогда

$$\mathbf{U}_k^{\varPhi} = \bigcap_n \bigcup_{s\in 2^n} \mathbf{T}_k^{\varPhi}(s) \qquad \text{и} \qquad \mathbf{U}_k^{\varPhi}(s) = \bigcap_{n\geqslant \operatorname{lh}(s)} \bigcup_{t\in 2^n,\, s\subseteq t} \mathbf{T}_k^{\varPhi}(t)$$

– деревья в $\mathbf{PT}$ (не обязательно в $\mathbb{P}$) по лемме 10 для всех $k$ и $s \in 2^{<\omega}$; причем

$$\mathbf{U}_k^{\varPhi} = \mathbf{U}_k^{\varPhi}(\Lambda), \qquad \mathbf{U}_k^{\varPhi}(s) = \mathbf{U}_k^{\varPhi} \cap \mathbf{T}_k^{\varPhi}(s).$$

Положим $\mathbb{U} = \{\mathbf{U}_k^{\varPhi}(s) : k < \omega \wedge s \in 2^{<\omega}\}$.

В нижеследующих леммах доказываются основные свойства этого множества $\mathbb{U}$.

Лемма 13. *Множества* $\mathbb{U}$ *и* $\mathbb{P}\cup\mathbb{U}$ *являются* ФСД $\mathbb{P}\cap\mathbb{U} = \varnothing$.

Доказательство. Для доказательства $\mathbb{P}\cap\mathbb{U} = \varnothing$ пусть $T \in \mathbb{P}$ и $U = \mathbf{U}_K^{\varPhi}(s) \in \mathbb{U}$, где $K \in \mathbb{N}$, $s \in 2^{<\omega}$. Требуется вывести, что $T \neq U$.

Множество $D(T,K)$ всех таких мультисистем

$$\Phi = \langle \varphi_k \rangle_{k\in\omega} \in \mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P}),$$

что $K \in |\Phi|$, $\mathrm{lh}(s) \leqslant h = \mathrm{hgt}(\varphi_K)$, и $T \setminus \bigcup_{t\in 2^h} \varphi_K(t) \neq \varnothing$, принадлежит $\mathfrak{M}$ и, очевидно, плотно в $\mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$. Следовательно, найдется индекс $j$, для которого мультисистема $\Phi^j$ принадлежит $D(T,K)$. Таким образом, $K \in |\Phi^j|$, $\mathrm{lh}(s) \leqslant h = \mathrm{hgt}(\varphi^j_K)$, и $T \setminus \bigcup_{t\in 2^h} \varphi_K(t) \neq \varnothing$. Для вывода $T \neq U$ осталось проверить, что $U \subseteq \bigcup_{t\in 2^h} \varphi^j_K(t)$.

Однако по определению

$$U = \mathbf{U}^{\varPhi}_K(s) \subseteq \bigcup_{t\in 2^h,\, s\subseteq t} \mathbf{T}^{\varPhi}_k(t) \subseteq \bigcup_{t\in 2^h} \mathbf{T}^{\varPhi}_k(t),$$

а значит, в самом деле $U \subseteq \bigcup_{t\in 2^h} \varphi^j_K(t)$, поскольку по определению $\mathbf{T}^{\varPhi}_k(t) = \varphi^j_K(t)$.

Лемма 14. *Множество* $\mathbb{U}$ *плотно в* $\mathbb{U}\cup\mathbb{P}$.

Доказательство. Пусть $T \in \mathbb{P}$. Множество $D(T)$ всех таких мультисистем $\Phi = \langle\varphi_k\rangle_{k\in\omega} \in \mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$, что $\varphi_k(\Lambda) = T$ для некоторого $k$, принадлежит $\mathfrak{M}$ и плотно в $\mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$. Значит, $\Phi^j \in D(T)$ для какого-то $j$, по выбору $\varPhi$. Тогда $\mathbf{T}^{\varPhi}_k(\Lambda) = T$ для некоторого $k$. Однако по построению $\mathbf{U}^{\varPhi}_k(\Lambda) \subseteq \mathbf{T}^{\varPhi}_k(\Lambda)$.

Лемма 15. *Если множество* $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbb{P}$ *предплотно в* $\mathbb{P}$ *и* $U \in \mathbb{U}$, *то существует конечное множество* $D' \subseteq D$, *удовлетворяющее* $U \subseteq \bigcup D'$: *формально*, $U \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup D$.

Доказательство. Мы предполагаем, что $D$ открыто плотно в $\mathbb{P}$. В самом деле, иначе заменим $D$ на множество $D_1 = \{T \in \mathbb{P} : \exists\, S \in D,\, T \subseteq S\}$. Допустим, что лемма доказана для множества $D_1$, которое, очевидно, открыто плотно. Таким образом, пусть $D_1' \subseteq D_1$ – конечное множество, для которого $U \subseteq \cup D_1'$. Однако по определению найдется такое конечное множество $D' \subseteq D$, что если $T \in D_1'$, то $\exists\, S \in D'$, $T \subseteq S$. Тогда $U \subseteq \cup D_1' \subseteq \cup D'$, что и требовалось.

Пусть $U = \mathbf{U}^{\varPhi}_k(s) \in \mathbb{U}$, где $s \in 2^{<\omega}$ и $k \in \mathbb{N}$.

Множество $\Delta \in \mathfrak{M}$ всех таких мультисистем $\Phi = \langle\varphi_k\rangle_{k\in\omega} \in \mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$, что $K \in |\Phi|$, $\mathrm{lh}(s) \leqslant h = \mathrm{hgt}(\varphi_K)$, и $\varphi_K(t) \in D$ для всех $t \in 2^h$, плотно в $\mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$ по выбору $D$. Поэтому имеется такой индекс $j$, что $\Phi^j \in \Delta$. Пусть $h(j) = \mathrm{hgt}(\varphi^j_K)$; $\mathrm{lh}(s) \leqslant h(j)$. Тогда дерево $S_t = \varphi^j_K(t) = \mathbf{T}^{\varPhi}_K(t)$ принадлежит $D$ для всех $t \in 2^{h(j)}$. Мы заключаем, что

$$U = \mathbf{U}^{\varPhi}_k(s) \subseteq \bigcup_{t\in 2^{h(j)},\, s\subsetneq t} \mathbf{T}^{\varPhi}_K(t) \subseteq \bigcup_{t\in 2^{h(j)},\, s\subsetneq t} S_t = \cup D',$$

где $D' = \{S_t : t \in 2^{h(j)} \wedge s \subsetneq t\} \subseteq D$ конечно.

Лемма 16. *Если множество* $D \in \mathfrak{M}$, $D \subseteq \mathbb{P}^{<\omega}$, *предплотно в* $\mathbb{P}^{<\omega}$, *то оно предплотно и в* $(\mathbb{P}\cup\mathbb{U})^{<\omega}$.

Доказательство. Задав мультидерево $\boldsymbol{\tau} \in (\mathbb{P}\cup\mathbb{U})^{<\omega}$, мы должны доказать, что $\boldsymbol{\tau}$ совместно в $(\mathbb{P}\cup\mathbb{U})^{<\omega}$ с каким-то мультидеревом $\boldsymbol{\sigma} \in D$. Для наглядности пусть $|\boldsymbol{\tau}| = \{0,1\}$, так что $\boldsymbol{\tau} = \langle U, V\rangle$ (см. замечание 8), где деревья $U = \mathbf{U}^{\varPhi}_k(s)$ и $V = \mathbf{U}^{\varPhi}_\ell(t)$ принадлежат $\mathbb{U}$.

Рассмотрим множество $\Delta \in \mathfrak{M}$ всех таких мультисистем $\Phi = \langle\varphi_k\rangle_{k\in\omega} \in \mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$, что существуют кортежи $s', t' \in 2^{<\omega}$ с $s \subseteq s'$, $t \subseteq t'$, $\mathrm{lh}(s') \leqslant \mathrm{hgt}(\varphi_k)$, $\mathrm{lh}(t') \leqslant \mathrm{hgt}(\varphi_\ell)$, и деревья $S, T \in \mathbb{P}$, для которых

$$\langle S, T\rangle \in D, \qquad \varphi_k(s') \subseteq U \cap S, \quad \varphi_\ell(t') \subseteq V \cap T.$$

Множество $\Delta$ плотно в $\mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$ согласно предплотности $D$. Поэтому имеется такой индекс $j$, что $\Phi^j = \langle \varphi^j_k \rangle_{k\in\omega} \in \Delta$.

Тогда существуют такие кортежи $s', t' \in 2^{<\omega}$ и мультидерево $\langle S, T\rangle \in D$, для которых $s \subseteq s'$, $t \subseteq t'$, $\varphi^j_k(s') \subseteq U \cap S$ и $\varphi^j_\ell(t') \subseteq V \cap T$. Однако по построению

$$U' = \mathbf{U}^{\Phi}_k(s') \subseteq \varphi^j_k(s'), \qquad V' = \mathbf{U}^{\Phi}_\ell(t') \subseteq \varphi^j_\ell(t').$$

Отсюда следует, что мультидерево $\langle U', V'\rangle \in \mathbb{U}^{<\omega}$ “сильнее” в $(\mathbb{P}\cup\mathbb{U})^{<\omega}$, чем каждое из $\langle U, V\rangle$, $\langle S, T\rangle$, что и требовалось.

**5. Имена и прямое вынуждение.** В этом разделе предполагается, что $\mathbb{P}$ есть ФСД и $2^{<\omega} \in \mathbb{P}$. Напомним, что $\mathbb{P}$ присоединяет генерическую точку $x = \mathbf{x}[G] \in 2^{\mathbb{N}}$, а $\mathbb{P}^{<\omega}$ – бесконечную последовательность $\mathbb{P}$ генерических точек $x_k = \mathbf{x}_k[G]$, п. 2.

Определение 17. Под $\mathbb{P}^{<\omega}$ *именем точки* будем понимать такую систему $\mathbf{c} = \langle C^i_n \rangle_{n<\omega,\, i<2}$ множеств $C^i_n \subseteq \mathbb{P}^{<\omega}$, что каждое множество $C_n = C^0_n \cup C^1_n$ предплотно в $\mathbb{P}^{<\omega}$ и любая пара мультидеревьев $S \in C^0_n$ и $T \in C^1_n$ несовместна в $\mathbb{P}^{<\omega}$. Если при этом множество $G \subseteq \mathbb{P}^{<\omega}$ является $\mathbb{P}^{<\omega}$-генерическим, по крайней мере, над семейством всех множеств $C_n$, то мы определим точку $\mathbf{c}[G] \in 2^{\mathbb{N}}$ так, что $\mathbf{c}[G](n) = i$, когда $G \cap C^i_n \neq \varnothing$.

Понятно, что $\mathbf{c} = \langle C^i_n \rangle$ является $\mathbb{P}^{<\omega}$-именем точки $\mathbf{c}[G] \in 2^{\mathbb{N}}$.

Пример 18. Пусть $k < \omega$. Определим $\mathbb{P}^{<\omega}$-имя точки $\dot{\mathbf{x}}_k = \langle C^k_{ni} \rangle$, так что каждое множество $C^k_{ni}$ содержит все такие мультидеревья $\rho \in \mathbb{P}^{<\omega}$, что

$$|\rho| = \{k\}, \qquad \rho(k) = T[s] = \{u \in 2^{<\omega} : s \subsetneq u \vee u \subseteq s\},$$

где $s \in 2^{n+1}$ и $s(n) = i$.

Таким образом, $\dot{\mathbf{x}}_k$ есть $\mathbb{P}^{<\omega}$-имя точки $x_k = \mathbf{x}_k[G]$, т.е. $k$-го члена $\mathbb{P}^{<\omega}$-генерической последовательности $\langle x_k \rangle_{k<\omega}$.

Пусть $\mathbf{c} = \langle C^i_n \rangle$, $\mathbf{d} = \langle D^i_n \rangle$ – $\mathbb{P}^{<\omega}$-имена точек. Дерево $T \in \mathbf{PT}$:

- *прямо вынуждает* $\mathbf{c}(n) = i$, где $n < \omega$, $i = 0, 1$, если $T \subseteq S$ для какого-то дерева $S \in C^i_n$;
- *прямо вынуждает* $s \subsetneq \mathbf{c}$, где $s \in 2^{<\omega}$, если для любого $n < \mathrm{lh}(s)$, дерево $T$ прямо вынуждает $\mathbf{c}(n) = i$, где $i = s(n)$;
- *прямо вынуждает* $\mathbf{d} \neq \mathbf{c}$, если имеются кортежи $s, t \in 2^{<\omega}$, несравнимые в $2^{<\omega}$ и такие, что $T$ прямо вынуждает $s \subsetneq \mathbf{c}$ и $t \subsetneq \mathbf{d}$;
- *прямо вынуждает* $\mathbf{c} \notin [U]$, где $U \in \mathbf{PT}$, если существует такой кортеж $s \in 2^{<\omega} \setminus U$, что дерево $T$ прямо вынуждает $s \subsetneq \mathbf{c}$.

**6. Ключевая теорема.** Рассуждая в условиях определения 12, целью следующей теоремы 19 будет доказательство того, что, каково бы ни было $\mathbb{P}$-имя точки $\mathbf{c}$, продолженный форсинг $\mathbb{P}\cup\mathbb{U}$ вынуждает, что $\mathbf{c}$ не принадлежит множествам $[U]$, где $U \in \mathbb{U}$, кроме случая, когда $\mathbf{c}$ – имя $\dot{\mathbf{x}}_k$ одной из генерических точек $x_k = \mathbf{x}_k[G]$.

Теорема 19. *В условиях определения* 12, *пусть* $\mathbf{c} = \langle C^i_m \rangle_{m<\omega,\, i<2} \in \mathfrak{M}$ *есть* $\mathbb{P}^{<\omega}$*-имя точки, и для каждого* $k$ *множество*

$$D(k) = \{\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{P}^{<\omega} : \boldsymbol{\tau} \text{ прямо вынуждает } \mathbf{c} \neq \dot{\mathbf{x}}_k\}$$

*плотно в* $\mathbb{P}^{<\omega}$. *Пусть* $U \in \mathbb{U}$ *и* $\mathbf{u} \in (\mathbb{P}\cup\mathbb{U})^{<\omega}$. *Тогда найдется мультидерево* $\mathbf{v} \in \mathbb{U}^{<\omega}$, $\mathbf{v} \leqslant \mathbf{u}$, *прямо вынуждающее* $\mathbf{c} \notin [U]$.

Доказательство. По определению мы имеем $U = \mathbf{U}^{\Phi}_K(s_0)$, где $K \in \mathbb{N}$ и $s_0 \in 2^{<\omega}$, и по смыслу теоремы можно предположить, что $s_0 = \Lambda$, откуда $U = \mathbf{U}^{\Phi}_K$. Для простоты и наглядности пусть $K = 1$, т.е. $U = \mathbf{U}^{\Phi}_1$. Согласно лемме 14 также можно допустить, что $\mathbf{u} \in \mathbb{U}^{<\omega}$. Для наглядности пусть

$$|\mathbf{u}| = \{0,1,2,3\}, \qquad \mathbf{u} = \langle U_0, U_1, U_2, U_3\rangle \in \mathbb{U}^{<\omega}$$

(см. замечание 8), где

$$U_0 = \mathbf{U}^{\Phi}_0(t_0), \qquad U_1 = \mathbf{U}^{\Phi}_0(t_1), \qquad U_2 = \mathbf{U}^{\Phi}_1(t_2), \qquad U_3 = \mathbf{U}^{\Phi}_1(t_3),$$

и $t_0$, $t_1$, $t_2$, $t_3$ – кортежи из $2^{<\omega}$. Пусть $H = \max\{\mathrm{lh}(t_0), \mathrm{lh}(t_1), \mathrm{lh}(t_2), \mathrm{lh}(t_3)\}$.

Рассмотрим множество $\mathscr{D}$ всех мультисистем $\Phi = \langle \varphi_k\rangle_{k\in\omega}$ из $\mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$, для которых $0, 1 \in |\Phi|$, $H \leqslant h = \mathrm{hgt}(\varphi_0) = \mathrm{hgt}(\varphi_1)$, и имеется такое мультидерево

$$\boldsymbol{\sigma} = \langle S_0, \dots, S_N\rangle \in \mathbb{P}^{<\omega}, \qquad N \geqslant 3,$$

что

(I) $\boldsymbol{\sigma}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [T]$, где $T = \bigcup_{s\in 2^h} \varphi_1(s)$;

(II) каждое дерево $S_i$ встречается в $\Phi$ (см. раздел 3);

(III) сверх того, $S_0 = \varphi_0(s_0)$, $S_1 = \varphi_0(s_1)$, $S_2 = \varphi_1(s_2)$, $S_3 = \varphi_1(s_3)$, где $s_0$, $s_1$, $s_2$, $s_3$ – кортежи из $2^h$ и $t_i \subseteq s_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Лемма 20. *В условиях теоремы множество $\mathscr{D}$ плотно в $\mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$.*

Доказательство. Рассмотрим любую мультисистему $\Phi' \in \mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$. Мы должны определить такую мультисистему $\Psi \in \mathscr{D}$, что $\Phi' \preccurlyeq \Psi$. Наш план состоит в следующем. Возьмем любую мультисистему $\Phi = \langle\varphi_k\rangle_{k\in\omega}$ из $\mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$, для которой

$$\Phi' \prec\!\prec \Phi, \qquad H \leqslant h = \mathrm{hgt}(\varphi_0) = \mathrm{hgt}(\varphi_1);$$

тогда всякая мультисистема $\Psi \in \mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$, измельчающая $\Phi$, удовлетворяет $\Phi' \prec\!\prec \Psi$. Итак, задача сводится к построению мультисистемы $\Psi \in \mathscr{D}$, измельчающей $\Phi$.

Выберем кортежи $s_0, s_1, s_2, s_3 \in 2^h$, для которых $t_i \subseteq s_i$, $i = 0, 1, 2, 3$. Рассмотрим мультидерево

$$\boldsymbol{\rho} = \langle R_0, R_1, R_2, R_3, R_4, \dots, R_N\rangle \in \mathbb{P}^{<\omega},$$

где $N = 1 + 2^h$ (здесь $2^h$ – арифметическая степень),

$$R_0 = \varphi_0(s_0), \qquad R_1 = \varphi_0(s_1), \qquad R_2 = \varphi_1(s_2), \qquad R_3 = \varphi_1(s_3),$$
$$R_j = \varphi_1(s_j), \quad j = 4, \dots, N,$$

где $\{s_4, \dots, s_N\}$ – произвольное перечисление множества $\{s \in 2^h : s \neq s_2, s_3\}$.

Согласно плотности множеств $D(k)$ имеется такое мультидерево

$$\boldsymbol{\sigma} = \langle S_0, S_1, S_2, S_3, \dots, S_N, \dots, S_M\rangle \in \mathbb{P}^{<\omega},$$

что $\boldsymbol{\sigma} \leqslant \boldsymbol{\rho}$ – так что $M \geqslant N$ и $S_i \subseteq R_i$ для всех $i \leqslant N$ – которое прямо вынуждает $\mathbf{c} \neq \dot{\mathbf{x}}_k$ для всех $k = 2, \dots, N$. Это значит, что имеются такие кортежи $u, v_2, \dots, v_N \in 2^{<\omega}$, что $\boldsymbol{\sigma}$ прямо вынуждает каждую из формул

$$u \subsetneq \mathbf{c}, \qquad \text{и также} \quad v_2 \subsetneq \dot{\mathbf{x}}_2, \quad v_3 \subsetneq \dot{\mathbf{x}}_3, \quad \dots, \quad v_N \subsetneq \dot{\mathbf{x}}_N,$$

и $u$ несравним в $2^{<\omega}$ ни с одним $v_k$. Отсюда следует $v_k \subseteq \operatorname{stem} S_k$, $k = 2, \dots, N$. Поэтому $\boldsymbol{\sigma}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [S]$, где $S = \bigcup_{2 \leqslant k \leqslant N} S_k$.

Теперь определим искомую мультисистему $\Psi = \langle \psi_k \rangle_{k \in \omega} \in \mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P})$.

*Шаг* 1. Напомним, что $R_0 = \varphi_0(s_0)$, $R_1 = \varphi_0(s_1)$, $R_2 = \varphi_1(s_2)$, $R_3 = \varphi_1(s_3)$ в $\Phi$. Положим

$$\psi_0(s_0) = S_0, \qquad \psi_0(s_1) = S_1, \qquad \psi_1(s_2) = S_2, \qquad \psi_1(s_3) = S_3.$$

Также положим $\psi_0(s) = \varphi_0(s)$ для всех $s \in 2^{\leqslant h}$, $s \neq s_0, s_1$.

*Шаг* 2. Пусть $4 \leqslant j \leqslant N$. По построению дерево $R_j$ тождественно $\varphi_1(s_j)$, где $s_j \in 2^h$, $s_j \neq s_2, s_3$; положим $\psi_1(s_j) = S_j$.

*Шаг* 3. Если $\ell \in |\Phi|$, $\ell \geqslant 2$, то пусть $\psi_\ell = \varphi_\ell$.

*Шаг* 4. Положим $\mu = \max |\Phi|$. Пусть $N + 1 \leqslant \ell < M$. Тогда $S_\ell \in \mathbb{P}$. Определим систему $\psi_{\mu+\ell} \in \mathbf{SS}(\mathbb{P})$, так что $\operatorname{hgt}(\psi_{\mu+\ell}) = 0$ и $\psi_{\mu+\ell}(\Lambda) = S_\ell$.

Легко видеть, что $\Psi \in \mathscr{D}$ – искомая мультисистема.

Вернемся к теореме 19. По лемме 20 найдется такой индекс $J$, что мультисистема $\Phi^J = \langle \varphi_k^J \rangle_{k \in \omega}$ принадлежит $\mathscr{D}$, так что $0, 1 \in |\Phi|$, $H \leqslant h = \operatorname{hgt}(\varphi_0^J) = \operatorname{hgt}(\varphi_1^J)$, и имеется мультидерево $\boldsymbol{\sigma} = \langle S_0, \dots, S_N \rangle \in \mathbb{P}^{<\omega}$, удовлетворяющее (I), (II), (III) для систем $\varphi_0 = \varphi_0^J$, $\varphi_1 = \varphi_1^J$.

Рассмотрим мультидерево $\mathbf{v} = \langle V_0, V_1, V_2, V_3, \dots, V_n \rangle \in \mathbb{U}^{<\omega}$, определенное так, что

$$V_0 = \mathbf{U}_0^{\Phi}(s_0), \qquad V_1 = \mathbf{U}_0^{\Phi}(s_1), \qquad V_2 = \mathbf{U}_1^{\Phi}(s_2), \qquad V_3 = \mathbf{U}_1^{\Phi}(s_3),$$

и если $4 \leqslant j \leqslant n$, то $V_j$ – любое дерево в $\mathbb{U}$, удовлетворяющее $V_k \subseteq S_k$ (см. лемму 14). Коль скоро $t_i \subseteq s_i$ для $i = 0, 1, 2, 3$, мы имеем $\mathbf{v} \leqslant \mathbf{u}$. А с другой стороны, $\mathbf{v} \leqslant \boldsymbol{\sigma}$, и потому $\mathbf{v}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [T]$ согласно (I), где

$$T = \bigcup_{s \in 2^h} \varphi_1^J(s) = \bigcup_{s \in 2^h} \mathbf{T}_1^{\Phi}(s).$$

Ноконец, по построению имеем $\mathbf{U}_1^{\Phi} \subseteq \bigcup_{s \in 2^h} \varphi_1^J(s)$, так что $\mathbf{v}$ прямо вынуждает $\mathbf{c} \notin [U_1^{\Phi}]$, что и требовалось.

**7. Трансфинитное построение форсинга по Йенсену.** В этом разделе мы рассуждаем в конструктивном универсуме $\mathbf{L}$. Через $\leqslant_{\mathbf{L}}$ обозначается каноническое полное упорядочение класса $\mathbf{L}$, см. [4; 8.1.6].

Определение 21 (в $\mathbf{L}$). Следуя конструкции в [11; Section 3] (с соответствующими изменениями), мы определяем, индукцией по $\xi < \omega_1$, счетный ФСД $\mathbb{U}_\xi \subseteq \mathbf{PT}$ (см. раздел 2), следующим образом.

Через $\mathbb{U}_0$ обозначим множество всех деревьев вида $T[s]$, см. пример 5, что включает и само полное дерево $2^{<\omega} = T[\Lambda]$.

Теперь предположим, что $0 < \lambda < \omega_1$, и счетные ФСД $\mathbb{U}_\xi \subseteq \mathbf{PT}$ уже определены для $\xi < \lambda$. Пусть $\mathfrak{M}_\xi$ есть наименьшая модель $\mathfrak{M}$ теории $\mathbf{ZFC}'$ вида $\mathbf{L}_\kappa$, $\kappa < \omega_1$, содержащая последовательность $\langle \mathbb{U}_\xi \rangle_{\xi < \lambda}$ и такая, что $\lambda < \omega_1^{\mathfrak{M}}$ и все множества $\mathbb{U}_\xi$, $\xi < \lambda$, счетны в $\mathfrak{M}$. Тогда множество $\mathbb{P}_\lambda = \bigcup_{\xi < \lambda} \mathbb{U}_\xi$ – также ФСД и счетно в $\mathfrak{M}$. Определим $\langle \Phi^j \rangle_{j < \omega}$ как $\leqslant_{\mathbf{L}}$-наименьшую последовательность систем $\Phi^j \in \mathbf{SS}^{<\omega}(\mathbb{P}_\lambda)$,

$\preccurlyeq$-возрастающую и генерическую над $\mathfrak{M}_\lambda$. Завершая индуктивный шаг, определим $\mathbb{U}_\lambda = \mathbb{U}$ согласно 12.

Наконец, полагаем $\mathbb{P} = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbb{U}_\xi$.

С точностью до технических деталей множество $\mathbb{P} = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbb{U}_\xi$ тождественно форсингу Йенсена из [11], а произведение $\mathbb{P}^{<\omega}$ с конечной базой мы используем для доказательства теоремы 4. Следующие результаты характерны для такого рода индуктивных конструкций форсинга.

Предложение 22 (в $\mathbf{L}$). *Последовательность $\langle \mathbb{U}_\xi \rangle_{\xi<\omega_1}$ принадлежит классу определимости $\Delta_1^{\text{НС}3}$.*

Лемма 23 (в $\mathbf{L}$). *Если множество $D \in \mathfrak{M}_\xi$, $D \subseteq \mathbb{P}_\xi^{<\omega}$ предплотно в $\mathbb{P}_\xi^{<\omega}$, то оно остается предплотным в $\mathbb{P}^{<\omega}$. Следовательно, если $\xi < \omega_1$, то само $\mathbb{U}_\xi^{<\omega}$ предплотно в $\mathbb{P}^{<\omega}$.*

Доказательство. Индукцией по $\lambda \geqslant \xi$, если $D$ предплотно в $\mathbb{P}_\lambda^{<\omega}$, то оно остается предплотным в $\mathbb{P}_{\lambda+1}^{<\omega} = (\mathbb{P}_\lambda \cup \mathbb{U}_\lambda)^{<\omega}$ по лемме 16. Предельный шаг очевиден. Для доказательства второго утверждения заметим, что $\mathbb{U}_\xi^{<\omega}$ плотно в $\mathbb{P}_{\xi+1}^{<\omega}$ по лемме 14, и $\mathbb{U}_\xi^{<\omega} \in \mathfrak{M}_{\xi+1}$.

Лемма 24 (в $\mathbf{L}$). *Если $X \subseteq \text{НС} = \mathbf{L}_{\omega_1}$, то множество $W_X$ всех таких ординалов $\xi < \omega_1$, что $\langle \mathbf{L}_\xi; X \cap \mathbf{L}_\xi \rangle$ – элементарная подмодель структуры $\langle \mathbf{L}_{\omega_1}; X \rangle$ и $X \cap \mathbf{L}_\xi \in \mathfrak{M}_\xi$, неограничено в $\omega_1$.*

*Вообще, если $X_n \subseteq \text{НС}$ выполнено для всех $n$, то множество $W$ всех таких ординалов $\xi < \omega_1$, что $\langle \mathbf{L}_\xi; \langle X_n \cap \mathbf{L}_\xi \rangle_{n<\omega} \rangle$ – элементарная подмодель структуры $\langle \mathbf{L}_{\omega_1}; \langle X_n \rangle_{n<\omega} \rangle$ и $\langle X_n \cap \mathbf{L}_\xi \rangle_{n<\omega} \in \mathfrak{M}_\xi$, неограничено в $\omega_1$.*

Доказательство. Пусть $\xi_0 < \omega_1$. Найдется счетная элементарная подмодель $M$ структуры $\mathbf{L}_{\omega_2}$, содержащая $\xi_0$, $\omega_1$, $X$, и такая, что $M \cap \text{НС}$ транзитивно. Пусть $\phi\colon M \xrightarrow{\text{onto}} \mathbf{L}_\lambda$ – свертка Мостовского, и пусть $\xi = \phi(\omega_1)$. Тогда $\xi_0 < \xi < \lambda < \omega_1$ и $\phi(X) = X \cap \mathbf{L}_\xi$ по выбору $M$. Отсюда следует, что $\langle \mathbf{L}_\xi; X \cap \mathbf{L}_\xi \rangle$ – элементарная подмодель в $\langle \mathbf{L}_{\omega_1}; X \rangle$. Кроме того, $\xi$ несчетно в $\mathbf{L}_\lambda$, откуда $\mathbf{L}_\lambda \subseteq \mathfrak{M}_\xi$. Мы заключаем, что $X \cap \mathbf{L}_\xi \in \mathfrak{M}_\xi$, поскольку $X \cap \mathbf{L}_\xi \in \mathbf{L}_\lambda$ по построению. Доказательство общего утверждения аналогично.

Следствие 25 (ср. с [11; лемма 6]). *Форсинг $\mathbb{P}^{<\omega}$ удовлетворяет условию счетности антицепей в $\mathbf{L}$.*

Доказательство. Рассмотрим максимальную антицепь $A \subseteq \mathbb{P}^{<\omega}$. По лемме 24 существует такой ординал $\xi$, что $A' = A \cap \mathbb{P}_\xi$ – максимальная антицепь в $\mathbb{P}_\xi^{<\omega}$ и $A' \in \mathfrak{M}_\xi$. Но тогда $A'$ остается предплотным множеством, поэтому все еще максимальной антицепью, во всем множестве $\mathbb{P}$ согласно лемме 23. Отсюда следует, что сама антицепь $A = A'$ счетна.

**8. Генерическое расширение.** Мы рассматриваем множества $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}^{<\omega}$ в $\mathbf{L}$ (см. определение 21) как форсинги для генерических расширений универсума $\mathbf{L}$. Напомним, что $\mathbb{P}$ (как и любой вообще ФСД) присоединяет генерическую точку из $2^{\mathbb{N}}$, а $\mathbb{P}^{<\omega}$ – бесконечную последовательность таких точек.

[3] О множестве НС всех наследственно-счетных множеств см. [8; 3.4] или [15; §§ 8 и 9]; при этом $\text{НС} = \mathbf{L}_{\omega_1}$ в классе $\mathbf{L}$. О классах определимости $\Sigma_n^X$, $\Pi_n^X$, $\Delta_n^X$ см. [15; гл. 5, § 4].

Лемма 26 (лемма 7 в [11]). *Точка* $x \in 2^{\mathbb{N}}$ *является* $\mathbb{P}$*-генерической над* $\mathbf{L}$, *если и только если* $x \in Z = \bigcap_{\xi<\omega_1^{\mathbf{L}}} \bigcup_{U \in \mathbb{U}_\xi} [U]$.

Доказательство. Если $\xi < \omega_1^{\mathbf{L}}$, то множество $\mathbb{U}_\xi$ предплотно в $\mathbb{P}$ по лемме 23. Поэтому любая точка $x \in 2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}$-генерическая над $\mathbf{L}$, принадлежит к $\bigcup_{U \in \mathbb{U}_\xi}[U]$. Обратно, допустим, что $x \in Z$, и покажем, что точка $x$ является $\mathbb{P}$-генерической над $\mathbf{L}$. Рассмотрим максимальную антицепь $A \subsetneq \mathbb{P}$ в $\mathbf{L}$; требуется проверить, что $x \in \bigcup_{T \in A}[T]$. Однако $A \subseteq \mathbb{P}_\xi$ для какого-то $\xi < \omega_1^{\mathbf{L}}$ согласно следствию 25. Но тогда любое дерево $U \in \mathbb{U}_\xi$ удовлетворяет $U \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup A$ по лемме 15, так что

$$\bigcup_{U \in \mathbb{U}_\xi} [U] \subseteq \bigcup_{T \in A} [T],$$

и, следовательно, $x \in \bigcup_{T \in A}[T]$, что и требовалось.

Следствие 27 (ср. со следствием 9 в [11]). *В любом генерическом расширении класса* $\mathbf{L}$ *множество всех точек из* $2^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{P}$*-генерических над* $\mathbf{L}$, *является множеством классов* $\Pi_1^{\mathrm{HC}}$ *и* $\Pi_2^1$.

Доказательство. Используем лемму 26 и предложение 22.

Определение 28. Фиксируем $\mathbb{P}^{<\omega}$-генерическое над $\mathbf{L}$ множество $G \subseteq \mathbb{P}^{<\omega}$. Если $k < \omega$, то множество $G_k = \{\boldsymbol{\tau}(k) : \boldsymbol{\tau} \in G\}$ является, соответственно, $\mathbb{P}$-генерическим над $\mathbf{L}$, и пересечение $X_k = \bigcap_{T \in G_k} [T]$ содержит единственный элемент $x_k \in 2^{\mathbb{N}}$, причем точка $x_k = \mathbf{x}[G_k]$ является $\mathbb{P}$-генерической над $\mathbf{L}$.

Все расширение $\mathbf{L}[G]$ тогда тождественно $\mathbf{L}[\langle x_k \rangle_{k<\omega}]$, и нашей целью будет доказать, что оно не содержит других $\mathbb{P}$-генерических точек.

Лемма 29 (ср. с леммой 10 в [11]). *Если* $y \in \mathbf{L}[G] \cap 2^{\mathbb{N}}$ *и* $y \notin \{x_k : k < \omega\}$, *то* $y$ *не является* $\mathbb{P}$*-генерической точкой над* $\mathbf{L}$.

Доказательство. Иначе имеется $\mathbb{P}^{<\omega}$-имя точки $\mathbf{c} = \langle C_n^i \rangle_{n<\omega,\, i=0,1} \in \mathbf{L}$ и условие $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{P}^{<\omega}$, $\mathbb{P}^{<\omega}$-вынуждающее, что точка $\mathbf{c}$ является $\mathbb{P}$-генерической, а весь форсинг $\mathbb{P}^{<\omega}$ вынуждает, что $\mathbf{c} \neq \dot{\mathbf{x}}_k$ для каждого $k$. (Напомним, что $\dot{\mathbf{x}}_k$ есть $\mathbb{P}^{<\omega}$-имя точки $x_k$.)

Все множества $C_n = C_n^0 \cup C_n^1$ предплотны в $\mathbb{P}^{<\omega}$. Поэтому по лемме 24 существует такой ординал $\lambda < \omega_1$, что все $C_n' = C_n \cap \mathbb{P}_\lambda$ предплотны в $\mathbb{P}_\lambda^{<\omega}$, и последовательность $\langle C_{ni}' \rangle_{n<\omega,\, i=0,1}$ принадлежит к $\mathfrak{M}_\lambda$, где $C_{ni}' = C_n' \cap C_n^i$; тогда множества $C_n'$ предплотны в $\mathbb{P}^{<\omega}$ по лемме 23. Таким образом, можно предположить, что $C_n = C_n'$, т.е. $\mathbf{c} \in \mathfrak{M}_\lambda$ и $\mathbf{c}$ является $\mathbb{P}_\lambda^{<\omega}$-именем точки.

Далее, коль скоро $\mathbb{P}^{<\omega}$ вынуждает $\mathbf{c} \neq \dot{\mathbf{x}}_k$, множество $D_k$ всех мультидеревьев $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{P}^{<\omega}$, прямо вынуждающих $\mathbf{c} \neq \dot{\mathbf{x}}_k$, плотно $\mathbb{P}^{<\omega}$ для каждого $k$. Поэтому, опять согласно лемме 24, можно предположить, что для того же ординала $\lambda$, каждое множество $D_k' = D_k \cap \mathbb{P}_\lambda^{<\omega}$ плотно в $\mathbb{P}_\lambda^{<\omega}$.

Применив теорему 19 для $\mathbb{P} = \mathbb{P}_\lambda$, $\mathbb{U} = \mathbb{U}_\lambda$, и $\mathbb{P} \cup \mathbb{U} = \mathbb{P}_{\lambda+1}$, мы получим, что если $U \in \mathbb{U}_\lambda$, то множество $Q_U$ всех мультидеревьев $\mathbf{v} \in \mathbb{P}_{\lambda+1}^{<\omega}$, прямо вынуждающих $\mathbf{c} \notin [U]$, плотно в $\mathbb{P}_{\lambda+1}^{<\omega}$. Поскольку $Q_U \in \mathfrak{M}_{\lambda+1}$ очевидно, мы заключаем, что $Q_U$ предплотно в полном форсинге $\mathbb{P}^{<\omega}$ по лемме 23. Отсюда следует, что форсинг $\mathbb{P}^{<\omega}$ вынуждает $\mathbf{c} \notin \bigcup_{U \in \mathbb{U}_\lambda}[U]$, и, следовательно, вынуждает, что $\mathbf{c}$ не является $\mathbb{P}$-генерической точкой, по лемме 26. Но это противоречит выбору $T$.

Следующая лемма выражает обычное свойство произведений форсингов.

Лемма 30 (в предположениях определения 28). *Если* $k < \omega$, *то точка* $x_k$ *не является* OD *в* $\mathbf{L}[G]$.

Доказательство. Предположим противное, т.е. пусть $\varphi(\alpha, x)$ – формула, содержащая параметр $\alpha \in \mathrm{Ord}$, и такая, что в $\mathbf{L}[G]$ истинно: $\exists!\, x\varphi(\alpha, x) \wedge \varphi(\alpha, x_k)$. Это $\mathbb{P}^{<\omega}$-вынуждается некоторым условием – мультидеревевом $\boldsymbol{\sigma} \in \mathbb{P}^{<\omega}$, т.е. $\boldsymbol{\sigma}$ вынуждает $\exists!\, x\varphi(\alpha, x) \wedge \varphi(\alpha, \dot{\mathbf{x}}_k)$. Множество $u = |\sigma| \subseteq \mathbb{N}$ по определению конечно; пусть $m = \max u$ – его наибольший элемент.

Рассмотрим биекцию $b\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\text{onto}} \mathbb{N}$, отображающую сегмент $[0, m]$ на $[m+1, 2m+1]$ с сохранением порядка, и тождественную на $[m+2, +\infty)$. Она очевидным образом индуцирует порядковый автоморфизм всего множества $\mathbb{P}^{<\omega}$. При этом мультидерево $\boldsymbol{\sigma}' = b(\boldsymbol{\sigma})$ удовлетворяет $|\boldsymbol{\sigma}'| \subseteq [m+1, 2m+1]$, так что $|\boldsymbol{\sigma}| \cap |\boldsymbol{\sigma}'| = \varnothing$. Поэтому $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\sigma}'$ совместны – фактически, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\sigma} \cup \boldsymbol{\sigma}'$ является мультидеревом, и условием более сильным, чем каждое из $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\sigma}'$.

Однако биекция $b$ индуцирует и преобразование имен, при котором $b(\dot{\mathbf{x}}_k) = \dot{\mathbf{x}}_{k'}$, где $k' \neq k$. Вследствие инвариантности отношения вынуждения (см., например, [5; I.3.5]), $\boldsymbol{\sigma}'$ вынуждает $\exists!\, x\varphi(\alpha, x) \wedge \varphi(\alpha, \dot{\mathbf{x}}_{k'})$, так что $\boldsymbol{\tau}$ вынуждает

$$\exists!\, x\varphi(\alpha, x) \wedge \varphi(\alpha, \dot{\mathbf{x}}_k) \wedge \varphi(\alpha, \dot{\mathbf{x}}_{k'}),$$

что противоречит соотношению $k \neq k'$.

Остается только закончить доказательство нашей главной теоремы.

Доказательство теоремы 4. Рассуждая в $\mathbb{P}^{<\omega}$-генерической модели $\mathbf{L}[G] = \mathbf{L}[\langle x_k \rangle_{k<\omega}]$, мы видим, что счетное множество $X = \{x_k : k < \omega\}$ тождественно множеству всех $\mathbb{P}$-генерических точек по лемме 29, поэтому оно принадлежит $\Pi^1_2$ согласно следствию 27, и наконец не содержит OD точек по лемме 30.

Замечание 31. Особенностью форсинга Йенсена $\mathbb{P}$ является то, что его конструкция предполагает, что исходным универсумом (где определяется форсинг) является конструктивный универсум Гёделя $\mathbf{L}$. Представляет интерес обобщить этот метод, например, на исходные универсумы, в которых применимы кодирующие методы, введенные в [4] и [17].

Авторы благодарны анонимному рецензенту за ценные замечания, позволившие дополнить и улучшить изложение.

## СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


[1] J. Hadamard, R. Baire, H. Lebesgue, E. Borel, "Cinq lettres sur la théorie des ensembles", *Bull. Soc. Math. France*, **33** (1905), 261–273.

[2] A. Tarski, "Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen", *Stud. Philos.*, **1** (1936), 261–405.

[3] J. Myhill, D. Scott, "Ordinal definability", 1971 *Axiomatic Set Theory*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1971, 271–278.

[4] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы*, МЦНМО, М., 2013.

[5] R. M. Solovay, "A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable", *Ann. of Math.* (2), **92** (1970), 1–56.

[6] *A Question About Ordinal Definable Real Numbers*, Mathoverflow, 2010, http://mathoverflow.net/questions/17608.

[7] A. Enayat, *Ordinal Definable Numbers*, Foundations of Mathematics, 2010, http://cs.nyu.edu/pipermail/fom/2010-July/014944.html.

[8] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*, МЦНМО, М., 2010.

[9] V. Kanovei, *Borel Equivalence Relations. Structure and Classification*, Univ. Lecture Ser., **44**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[10] A. Enayat, "On the Leibniz–Mycielski axiom in set theory", *Fund. Math.*, **181**:3 (2004), 215–231.

[11] R. Jensen, "Definable sets of minimal degree", *Mathematical Logic and Foundations of Set Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1970, 122–128.

[12] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, "Неуниформизуемые множества второго проективного уровня со счетными сечениями в виде классов Витали", *Изв. РАН. Сер. матем.* (в печати).

[13] V. Kanovei, V. Lyubetsky, "Counterexamples to countable-section $\Pi^1_2$ uniformization and $\Pi^1_3$ separation", *Ann. Pure Appl. Logic*, **167**:3 (2016), 262–283.

[14] M. Golshani, V. Kanovei, V. Lyubetsky, "A Groszek–Laver pair of undistinguishable $E_0$ classes", *MLQ Math. Log. Q.*, **63**:1-2 (2017), 19–31.

[15] В. Г. Кановей, "Проективная иерархия Лузина: современное состояние теории", *Справочная книга по математической логике*. Ч. II. *Теория множеств*, Наука, М., 1982, 273–364.

[16] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, "Эффективная минимальная кодировка несчетных множеств", *Сиб. матем. журн.*, **52**:5 (2011), 1074–1086.

[17] J. Bagaria, V. Kanovei, "On coding uncountable sets by reals", *MLQ Math. Log. Q.*, **56**:4 (2010), 409–424.

**В. Г. Кановей**
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва;
Российский университет транспорта (МИИТ),
г. Москва
*E-mail*: kanovei@iitp.ru

Поступило
16.06.2015
Исправленный вариант
14.04.2017

**В. А. Любецкий**
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва
*E-mail*: lyubetsk@iitp.ru