Математические заметки

Том 105 выпуск 5 май 2019

УДК 510.225+510.223

Определимые элементы определимых борелевских множеств

В. Г. Кановей, В. А. Любецкий

Доказано, что в генерических расширениях по Саксу, Коэну, Соловею любое ординально определимое борелевское множество вещественных чисел обязательно содержит ординально определимый элемент. Ранее результат был известен только для счетных множеств.

Библиография: 19 названий.

Ключевые слова: определимые элементы, борелевские множества, форсинг Коэна, форсинг Соловея.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12001

1. Введение. К проблеме выбора определимого элемента. Вопрос определимости математических объектов оказался в центре внимания дискуссий по основаниям математики в связи с аксиомой выбора Цермело и ее роли в построении полного упорядочения континуума и в других подобных рассуждениях. Так, в статье [1], излагающей дискуссию между Адамаром, Борелем, Бэром и Лебегом по вопросам оснований математики, подчеркнуто, что чистое доказательство существования элемента в данном множестве, и прямое определение (эффективное построение) такого элемента – это разные математические результаты, из которых второй не следует из первого. В частности, Лебег в своей части [1] указал на трудности в вопросе эффективного выбора, т.е. выбора определимого элемента в определимом же множестве[1].

В ходе последовавшего развития теории множеств, в особенности *дескриптивной* теории множеств, было установлено (П. С. Новиков и Лузин [2]), что эффективный выбор возможен для множеств вещественной прямой второго проективного класса. Точнее, в современной терминологии, каждое непустое $\varSigma^1_2$-множество вещественной прямой $\mathbb{R}$ содержит точку класса $\varDelta^1_2$, следовательно, эффективно определимую. (Теорема 2.6 и следствие 2.7 ниже.)

Для более высоких уровней проективной иерархии[2], т.е. начиная с $\varPi^1_2$, никаких подобных теорем доказать нельзя. Точнее говоря, имеются только гипотезы, верные в одних предположениях, совместимых с аксиомами **ZFC**, но неверные в других предположениях, также совместимых с аксиомами **ZFC**.

Работа выполнена при финансовой поддержке фондов РФФИ 17-01-00705 (В. Г. Кановей) и РНФ 18-29-13037 (В. А. Любецкий).

[1] Ainsi je vois déjà une difficulté dans ceci “dans un M' déterminé je puis choisir un m' déterminé”, в оригинале [1]. Thus I already see a difficulty with the assertion that “in a determinate M' I can choose a determinate m'”, в английском переводе статьи [1] в книге [3], Appendix 1.

[2] О классах $\varSigma^1_n$, $\varPi^1_n$, $\varDelta^1_n$ эффективной проективной иерархии см. [4; гл. 6] или [5; гл. 1].

Замечание 1.1. Под *вещественными числами* (reals) в современных работах по теории множеств понимаются как элементы собственно вещественной прямой, так и точки бэровского пространства ω^ω или канторова дисконтинуума $2^\omega \subseteq \omega^\omega$. В этом смысле следует понимать и $\mathbb{R}$ в этом разделе. Точное понимание зависит от контекста, но все сказанное здесь в равной степени относится к 2^ω, ω^ω, или собственно вещественной прямой, в силу наличия определимых взаимно однозначных соответствий между всеми тремя областями.

Так, с одной стороны, аксиома конструктивности $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ Гёделя, совместимая с **ZFC**, влечет существование полного упорядочения $\leqslant_{\mathbf{L}}$ всей вещественной прямой $\mathbb{R}$ по типу ω_1, являющегося Δ^1_2-отношением, чтó позволяет выбирать в любом множестве $X \subseteq \mathbb{R}$ просто $\leqslant_{\mathbf{L}}$-наименьший элемент. Аккуратная оценка определимости показывает, что, в предположении $\mathbf{V} = \mathbf{L}$, если $n \geqslant 3$, то каждое Σ^1_n-множество $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}$ содержит Δ^1_n-точку $x \in X$.

С другой стороны, известны модели теории множеств **ZFC**, в которых существуют непустые Π^1_2-множества $X \subseteq \mathbb{R}$, не содержащие ни одной точки класса Δ^1_n для какого-либо n, и вообще ни одной ординально-определимой точки[3], так что эффективный выбор точки из такого множества X невозможен не только в контексте проективной иерархии, но и вообще в самом широком смысле. В *модели Соловея* [6] и ряде других моделей, таким множеством является Π^1_2-множество $\omega^\omega \setminus \mathbf{L}$ всех неконструктивных точек, которое заведомо несчетно. Эта категория моделей характеризуется тем, что для их построения используются достаточно *однородные* форсинги – т.е. такие, которые имеют достаточно богатые системы порядковых автоморфизмов.

В то же время, недавно авторами [7], [8] построены и модели, в которых имеются *счетные* Π^1_2-множества без определимых элементов – они как раз связаны с *неоднородными* форсингами, имеющими бедные системы порядковых автоморфизмов, к примеру, только рациональные сдвиги. Напротив, в некоторых моделях первой, форсинг-однородной категории, как удалось выяснить в [9], любое *счетное* **OD**-множество $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}$ имеет **OD** элементы. Следующая теорема распространяет последний результат со счетных на произвольные борелевские множества.

Теорема 1.2. *Пусть* $\mathbf{L}[a]$ *является одним из трех следующих генерических расширений конструктивного универсума множеств* $\mathbf{L}$:

(A) *расширение одной генерической по Коэну точкой* $a \in \mathbb{R}$;

(B) *расширение одной случайной по Соловею точкой* $a \in \mathbb{R}$;

(C) *расширение одной генерической по Саксу точкой* $a \in \mathbb{R}$.

Тогда в $\mathbf{L}[a]$ *истинно, что если* $\varnothing \neq X \subseteq \mathbb{R}$ *есть борелевское* **OD** *множество то* X *содержит* **OD** *элементы.*

Об этих генерических расширениях см., например, в статьях [10]–[12].

2. Выбор элемента в множествах классов Σ^1_1 и Σ^1_2. Для удобства читателя, мы предварим доказательство теоремы 1.2 кратким обзором результатов об эффективном выборе точек в множествах первых уровней проективной иерархии. В этом обзоре мы даем ссылки на авторитетную книгу Московакиса [13], а для русскоязычного читателя также на книги [4] и [14]. С доказательством теоремы 1.2 материал этого раздела не связан.

[3]Класс **OD** *ординально определимых множеств*, или просто **OD**-множеств, состоит из всех множеств, определимых теоретико-множественными формулами, которые могут включать ординалы в роли параметров. Классы Σ^1_n, Π^1_n, Δ^1_n являются, разумеется, подмножествами в **OD**.

Говоря о Σ^1_1-множествах общего вида, следующие два результата показывают, что выбор Δ^1_1-точки, вообще говоря, невозможен даже в Π^0_1-множествах, но всегда можно выбрать точку, лишь немного более сложную чем Δ^1_1. Заметим, что для классификации точек $x \in \omega^\omega$ односторонние классы Σ^1_n, Π^1_n сводятся к Δ^1_1 благодаря эквивалентности

$$x(k) = n \iff \forall\, n' \neq n \quad (x(k) \neq n').$$

Теорема 2.1 (теорема Клини о базисе, [13; 4E.8], [14; 7.11]). *Существует такое Σ^1_1 множество натуральных чисел $U \subseteq \omega$, что каждое Σ^1_1-множество $\varnothing \neq X \subseteq \omega^\omega$ содержит точку, рекурсивную относительно U.*

Примеры 2.2 (Клини, см. [13; 4D.14] или [4; 9.2.4]). Ко-счетное множество X всех точек $x \in \omega^\omega$, не принадлежащих Δ^1_1, имеет класс Σ^1_1 и очевидно не содержит ни одной Δ^1_1-точки. Рассмотрим любое Π^0_1-множество $P \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$, проектирующееся в X, т.е.

$$x \in X \iff \exists\, y\, P(x, y).$$

Тогда множество P также не содержит ни одной Δ^1_1-точки $\langle x, y\rangle$. Следовательно, существует и Π^0_1-множество $Q \subseteq \omega^\omega$, которое не содержит ни одной Δ^1_1-точки – именно, Q есть образ P при любом рекурсивном гомеоморфизме $\omega^\omega \times \omega^\omega$ на ω^ω.

Примеры 2.3. Пример Σ^1_1-множества $X \subseteq \omega^\omega$ из 2.2, не содержащего ни одной Δ^1_1-точки, можно усилить требованием *компактности*. Для этого рассмотрим пару непересекающихся и Δ^1_1-неотделимых Π^1_1-множеств $U, V \subseteq \omega$ (см. [13; 4B.12] или [4; 8.1.3]) и соответствующее непустое компактное Σ^1_1-множество

$$X = \{x \in 2^\omega : \forall\, n \in U\, (x(n) = 0) \wedge \forall\, n \in V\, (x(n) = 1)\}.$$

Множество X не содержит ни одной Δ^1_1-точки $x_0 \in X$, ибо имея такую точку, мы отделили бы U от V Δ^1_1-множеством $S = \{n : x_0(n) = 0\}$.

Теорема 2.4 ([13; 4F.11 и 4F.15], [4; 10.6.4]). *Если Δ^1_1-множество $\varnothing \neq X \subseteq \omega^\omega$ хотя бы σ-компактно, то оно содержит Δ^1_1-точку $x \in X$.*

Более простое доказательство для компактного случая состоит в том, что сначала для данного компактного Δ^1_1-множества $X \subseteq \omega^\omega$ подбирается Δ^1_1-дерево $T \subseteq \omega^{<\omega}$, определяющее X в том смысле, что

$$X = [T] = \{x \in \omega^\omega : \forall\, m\, (x \restriction m \in T)\},$$

а затем, используя лемму Кёнига (T имеет конечные ветвления), доказывается, что лексикографически самая левая точка $x_{\text{лев}} \in X$ имеет класс Δ^1_1.

Теорема 2.4 верна для счетных множеств X ибо они σ-компактны, но в этом случае согласно следующей теореме результат распространяется и на Σ^1_1-множества, чего нет для σ-компактных и даже компактных Σ^1_1-множеств согласно примеру 2.3.

Теорема 2.5 ([13; 4F.5], [4; 10.4.1]). *Если Σ^1_1-множество $X \subseteq \omega^\omega$ не более чем счетно, то оно состоит только из Δ^1_1-точек.*

Подобные теоремы известны также для больших (в смысле меры или категории) Δ^1_1-множеств, но о них мы здесь не будем говорить, ограничившись ссылкой на книгу Московакиса [13; 4F.19 и далее] и нашу книгу [4; разделы 11.4 и 11.5].

Теорема 2.5 доказывается при помощи *топологии Ганди–Харрингтона*, базой которой служат непустые Σ^1_1-множества. Эта топология вообще широко применяется в доказательстве дихотомических теорем, см., к примеру, [15].

Для множеств более сложных, чем Σ^1_1, имеется следующий фундаментальный результат, известный как теорема Новикова–Кондо–Аддисона. Она установлена Кондо [16] для проективного класса $\mathbf{\Pi}^1_1$ на основе метода П. С. Новикова, опубликованного в [2], а результат для эффективного класса Π^1_1 выделен Аддисоном [17].

Теорема 2.6 ([13; 4E.4], [4; 8.4.1]). *Каждое $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $P \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$ может быть униформизовано множеством класса $\mathbf{\Pi}^1_1$. Каждое Π^1_1-множество $P \subseteq \omega^\omega \times \omega^\omega$ может быть униформизовано множеством класса Π^1_1.*

Следствие 2.7. *Каждое Π^1_1-множество $\varnothing \neq X \subseteq \omega^\omega$ содержит Π^1_1-синглет $\{x\} \subseteq X$; тогда $x \in \Delta^1_2$. Каждое Σ^1_2-множество $\varnothing \neq X \subseteq \omega^\omega$ содержит Δ^1_2-точку $x \in X$.*

3. Борелевские коды. В теореме 1.2 мы ссылаемся на стандартную кодировку борелевских множеств, как в [18] или [4; раздел 9.5], согласно которой *множество борелевских кодов* $\mathbf{BK}$ содержит все пары $c = \langle T_c, f_c\rangle$, где $T_c \subseteq \omega^{<\omega}$ – непустое фундированное дерево, $f_c\colon \omega^{<\omega} \to \omega^{<\omega}$ – произвольная функция, а $\omega^{<\omega}$ – множество всех *кортежей* (конечных последовательностей) натуральных чисел, содержащее и *пустую последовательность* Λ.

Если $c \in \mathbf{BK}$, то каждому кортежу $s \in T_c$ сопоставляется борелевское множество $\mathbf{B}_c(s) \subseteq \omega^\omega$, так что если $s \in \max T_c$ (т.е. s – концевая вершина), то

$$\mathbf{B}_c(s) = [F(s)] = \{x \in \omega^\omega : f_c(s) \subset x\},$$

а если $s \notin \max T_c$, то

$$\mathbf{B}_c(s) = \omega^\omega \setminus \bigcup_{s^\frown k \in T_c} \mathbf{B}_c(s^\frown k).$$

Наконец, полагаем $\mathbf{B}_c = \mathbf{B}_c(\Lambda)$ – борелевское множество в ω^ω с кодом $c \in \mathbf{BK}$. Для каждого ординала $\xi < \omega_1$ через $\mathbf{BK}_\xi$ обозначается множество всех таких кодов $c \in \mathbf{BK}$, что T_c есть дерево высоты ξ.

Основные свойства этой кодировки состоят в следующем:

(1) множество кодов $\mathbf{BK}$ является Π^1_1-множеством в польском пространстве $\mathbb{B} = \mathscr{P}(\omega^{<\omega}) \times (\omega^{<\omega})^{(\omega^{<\omega})}$, а каждое $\mathbf{BK}_\xi$ – борелевское множество в $\mathbb{B}$;

(2) если $c \in \mathbf{BK}_\xi$, то множество $\mathbf{B}_c \subseteq \omega^\omega$ является борелевским множеством класса $\mathbf{\Pi}^0_\xi$;

(3) обратно, если $X \subseteq \omega^\omega$ – множество класса $\mathbf{\Pi}^0_\xi$, то найдется такой код $c \in \mathbf{BK}_\xi$, что $X = \mathbf{B}_c$;

(4) следующие множества в польском пространстве $\mathbb{B} \times \omega^\omega$ принадлежат Π^1_1:

$$W = \{\langle c, x\rangle : c \in \mathbf{BK} \wedge x \in \mathbf{B}_c\} \qquad \text{и} \qquad W' = \{\langle c, x\rangle : c \in \mathbf{BK} \wedge x \in \omega^\omega \setminus \mathbf{B}_c\}.$$

См. об этом например в [19; раздел 5.7] или [5; 2.9].

Эта кодировка естественным образом распространяется и на борелевские множества пространства $\omega^\omega \times \omega^\omega$. Именно, прежде всего, если $x \in 2^{<\omega}$, то пусть

$$F(x) = \langle y, z\rangle,$$

где $y(n) = x(2n)$ и $z(n) = x(2n+1)$ для всех n, так что F – гомеоморфизм пространства ω^ω на $\omega^\omega \times \omega^\omega$. Теперь мы положим $\mathbf{B}_c^{(2)} = \{F(x) : x \in \mathbf{B}_c\}$; это борелевское множество в $\omega^\omega \times \omega^\omega$ с кодом $c \in \mathbf{BK}$.

Кодировка также распространяется и на борелевские функции. Положим $\mathbf{BF} = \mathbf{BK}^{\omega\times\omega}$, и если $c \in \mathbf{BF}$ (т.е. c – функция из $\omega^2 = \omega \times \omega$ в $\mathbf{BK}$), то функция $\boldsymbol{\vartheta}_c\colon \omega^\omega \to \omega^\omega$ определяется условием: $\boldsymbol{\vartheta}_c(x)(n) = k$, если либо $k = 0$ и $x \notin \bigcup_{\ell\geqslant 1} \mathbf{B}_{c(n,\ell)}$, либо $k \geqslant 1$ и $x \in \mathbf{B}_{c(n,k)} \setminus \bigcup_{1\leqslant \ell<k} \mathbf{B}_{c(n,\ell)}$. Утверждения, подобные (1)–(4), верны и для кодировки функций; так что

(5) $\mathbf{BF}$ есть Π^1_1-множество в польском пространстве $\mathbb{B}^{\omega\times\omega}$;

(6) следующие множества в пространстве $\mathbb{B}^{\omega\times\omega} \times \omega^\omega \times \omega^\omega$ принадлежат Π^1_1:

$$\Phi = \{\langle c, x, y\rangle : c \in \mathbf{BF} \wedge x, y \in \omega^\omega \wedge y = \boldsymbol{\vartheta}_c(x)\},$$
$$\Phi' = \{\langle c, x, y\rangle : c \in \mathbf{BF} \wedge x, y \in \omega^\omega \wedge y \neq \boldsymbol{\vartheta}_c(x)\}.$$

Чтобы допустить борелевские коды в качестве значений кодированных функций, мы зафиксируем рекурсивный гомеоморфизм $K\colon \omega^\omega \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{B}$, и если $c \in \mathbf{BF}$ и $x \in \omega^\omega$, то пусть $\boldsymbol{\kappa}_c(x) = K(\boldsymbol{\vartheta}_c(x))$, т.е. $\boldsymbol{\kappa}_c(x) \in \mathbb{B}$ (но не обязательно $\boldsymbol{\kappa}_c(x) \in \mathbf{BK}$!).

Замечание 3.1. Утверждение (4) можно понимать в том смысле, что соотношение $x \in \mathbf{B}_c$ выражается как Π^1_1-формулой $\langle c, x\rangle \in W$, так и Σ^1_1-формулой $\langle c, x\rangle \notin W'$ – при условии, что $c \in \mathbf{BK}$ (иначе формулы неэквивалентны). Более сложное соотношение $y \in \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)}$ можно выразить формулами

$$\psi(c, x, y) := \exists\, h(\langle c, x, h\rangle \notin \Phi' \wedge \langle K(h), y\rangle \notin W') \qquad (\text{тип } \Sigma^1_1);$$
$$\psi'(c, x, y) := \forall\, h(\langle c, x, h\rangle \notin \Phi' \Longrightarrow \langle K(h), y\rangle \in W) \qquad (\text{тип } \Pi^1_1);$$

так что мы имеем

$$y \in \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)} \quad\Longleftrightarrow\quad \psi(c, x, y) \quad\Longleftrightarrow\quad \psi'(c, x, y)$$

всякий раз, когда $c \in \mathbf{BF}$ и $\boldsymbol{\kappa}_c(x) \in \mathbf{BK}$.

4. Решение для расширения генерического по Коэну. Здесь мы доказываем теорему 1.2 в части (A), т.е. для коэновских расширений. Коэновский форсинг $\mathbf{Coh} = 2^{<\omega}$ состоит из всех диадических кортежей, т.е. конечных последовательностей чисел 0, 1. Если $s, t \in 2^{<\omega}$, то $s \subseteq t$ означает, что t продолжает кортеж s, а $s \subset t$ означает собственное продолжение. Если $t \in 2^{<\omega}$ и $i = 0, 1$, то $t^\frown i$ обозначает продолжение t членом i справа. Если $s \in 2^{<\omega}$, то $\operatorname{lh}(s)$ есть длина кортежа s.

Если $u \in \mathbf{Coh}$, то множество $I_u = \{a \in 2^\omega : u \subset a\}$, т.е. *канторов интервал* в 2^ω, открыто-замкнуто в канторовом пространстве 2^ω.

Теорема 4.1. *Если $a_0 \in 2^\omega$ – генерическая по Коэну точка над универсумом множеств $\mathbf{V}$, то в $\mathbf{V}[a_0]$ истинно, что если $\varnothing \neq X \subseteq 2^\omega$ есть борелевское множество, определимое теоретико-множественной формулой с параметрами из $\mathbf{V}$, то X имеет точку из $\mathbf{V}$.*

Замечание 4.2. Под универсумом множеств $\mathbf{V}$ в теореме может пониматься как фиксированная (например, счетная) транзитивная модель теории $\mathbf{ZFC}$, так и действительно теоретико-множественный универсум всех множеств. Во втором случае генерические расширения, как, например, $\mathbf{V}[a_0]$ в теореме, понимаются как булевозначные расширения универсума $\mathbf{V}$.

Из теоремы 4.1 немедленно следует теорема 1.2 в части (A): достаточно положить $\mathbf{V} = \mathbf{L}$ и воспользоваться тем, что всегда $\mathbf{L} \subseteq \mathbf{OD}$.

Доказательство (теорема 4.1). Найдется формула $\varphi(x)$ с множествами из исходного универсума $\mathbf{V}$ в роли параметров, и код $p \in \mathbf{BK} \cap \mathbf{V}[a_0]$, для которых $X = \mathbf{B}_p = \{x \in 2^\omega : \varphi(x)\}$ в $\mathbf{V}[a_0]$. Мы предполагаем противное: $X \cap \mathbf{V} = \varnothing$, т.е. множество X не содержит ни одной точки из исходного универсума $\mathbf{V}$.

Коэновские расширения удовлетворяют требованию *борелевского чтения имен*, согласно которому найдется код $c \in \mathbf{BF} \cap \mathbf{V}$, удовлетворяющий $p = \boldsymbol{\kappa}_c(a_0)$. (См., например, [11; теорема 2.4(iii)].) Таким образом, в расширении $\mathbf{V}[a_0]$ истинно, что борелевское множество $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a_0)}$ тождественно множеству $X = \{x \in 2^\omega : \varphi(x)\}$, где формула φ содержит параметры только из $\mathbf{V}$, и соответственно мы имеем

$$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a_0)} \cap \mathbf{V} = \varnothing.$$

Тогда найдется такое коэновское условие (т.е. кортеж) $u \in 2^{<\omega}$, $\mathbf{Coh}$-вынуждающее, над $\mathbf{V}$, что $\boldsymbol{\kappa}_c(\breve{\mathbf{a}}) \in \mathbf{BK}$, $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(\breve{\mathbf{a}})} = \{x : \varphi(x)\} \neq \varnothing$, и $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(\breve{\mathbf{a}})} \cap \mathbf{V} = \varnothing$. Здесь $\breve{\mathbf{a}}$ – имя для генерической по Коэну точки.

Лемма 4.3. *В универсуме* $\mathbf{V}$ *истинно, что* $Y = \{x \in I_u : \boldsymbol{\kappa}_c(x) \in \mathbf{BK}\}$ *является ко-тощим множеством в* I_u.

Доказательство. Множество Y принадлежит $\boldsymbol{\Pi}^1_1$ вместе с множеством $\mathbf{BK}$ поскольку является борелевским прообразом последнего посредством функции $\boldsymbol{\kappa}_c$. Значит, Y имеет свойство Бэра. Поэтому, если оно не ко-тощее в I_u, то имеется такой кортеж $v \in \mathbf{Coh}$, продолжающий u, что $Y \cap I_v$ – наоборот, тощее множество. Значит, оно накрывается тощим $\mathbf{F}_\sigma$-множеством $F \subseteq I_v$. Дополнительное же $\mathbf{G}_\delta$-множество $G = I_v \setminus F$ тогда ко-тощее в I_v, и мы имеем $\boldsymbol{\kappa}_c(x) \notin \mathbf{BK}$ для всех $x \in G$. Фиксируем какой-нибудь код $g \in \mathbf{BK} \cap \mathbf{V}$ для G, так что в $\mathbf{V}$ истинно $\forall x \in \mathbf{B}_g\ (\boldsymbol{\kappa}_c(x) \notin \mathbf{BK})$.

Но это предложение выражается Π^1_2-формулой, именно, формулой

$$\forall x \forall y(\langle g, x\rangle \in W \wedge \langle c, x, y\rangle \in \Phi \quad \Longrightarrow \quad K(y) \notin \mathbf{BK}),$$

где подформулы $\langle g, x\rangle \in W$ и $\langle c, x, y\rangle \in \Phi$ типа $\mathit{\Pi}^1_1$ выражают соответственно отношения $x \in \mathbf{B}_g$ и $y = \boldsymbol{\vartheta}_c(x)$ согласно утверждениям (4) и (6) из раздела 3. Таким образом, по теореме абсолютности Шенфилда указанное предложение истинно и в любом генерическом расширении вида $\mathbf{V}[a]$, где $a \in I_v$ – произвольная генерическая по Коэну точка над $\mathbf{V}$. Но как известно генерические по Коэну точки не принадлежат тощим борелевским множествам с кодами из исходной модели, см. например теорему 11.3.3 в [19] для идеала тощих множеств. Таким образом, $a \in \mathbf{B}_g$ в $\mathbf{V}[a]$, и, следовательно, $\boldsymbol{\kappa}_c(a) \notin \mathbf{BK}$. Мы имеем противоречие, поскольку $u \subseteq v \subset a$, а кортеж u вынуждает $\boldsymbol{\kappa}_c(\breve{\mathbf{a}}) \in \mathbf{BK}$.

Рассуждая в универсуме $\mathbf{V}$, мы заключаем, по лемме, что имеется такое ко-тощее $\mathbf{G}_\delta$-множество $D \subseteq I_u$, что $\boldsymbol{\kappa}_c(x) \in \mathbf{BK}$ для всех $x \in D$. Теперь рассмотрим борелевское множество $P = \{\langle x, y\rangle : x \in D \wedge y \in \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)}\}$ и отношение эквивалентности $x \mathsf{E} x'$, когда $x, x' \in D$ и $P_x = P_{x'}$, на множестве D. (Как обычно, мы определяем сечение $P_x = \{y : \langle x, y\rangle \in P\}$.)

Лемма 4.4. E *есть* $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-*отношение*.

Доказательство. Равенство $P_x = P_{x'}$ выражается Π^1_1-формулой

$$\forall\, y((\neg\psi'(c,x,y) \Longrightarrow \psi(c,x',y)) \wedge (\neg\psi'(c,x',y) \Longrightarrow \psi(c,x,y)))$$

(см. замечание 3.1) при условии, что $c \in \mathbf{BF}$ и точки $\boldsymbol{\kappa}_c(x)$, $\boldsymbol{\kappa}_c(x')$ принадлежат $\mathbf{BK}$, которое здесь выполнено при $x, x' \in D$.

Как $\mathbf{\Pi}^1_1$-подмножество произведения $I_u \times I_u$, E имеет свойство Бэра.

Случай 1: (в $\mathbf{V}$ истинно, что) все E-классы эквивалентности суть тощие множества на I_u. Тогда $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $H = \{\langle x, x'\rangle \in D : \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x')}\}$ тощее в $I_u \times I_u$ по теореме Улама–Куратовского, и H можно накрыть некоторым также тощим борелевским множеством $H' = \mathbf{B}^{(2)}_d$, $H \subseteq H' \subseteq I_u \times I_u$, с кодом d.

Теперь мы используем метод, введенный в [9]. Фиксируем, *продолжая рассуждать в* $\mathbf{V}$, счетную транзитивную модель $\mathfrak{M}$ достаточно большого фрагмента $\mathbf{ZFC}$, содержащую коды c, d и являющуюся элементарной подмоделью универсума относительно всех аналитических формул.

Лемма 4.5. *Существуют точки $a, b \in I_u$, генерические по Коэну над $\mathbf{V}$ и такие, что $\mathbf{V}[a] = \mathbf{V}[b]$, и в то же время пара $\langle a, b\rangle$ является генерической по Коэну над моделью $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Обозначим через $+_2$ операцию покомпонентного сложения по модулю 2 для бесконечных последовательностей. Выберем в универсуме $\mathbf{V}$ точку $z \in Z$, генерическую по Коэну над $\mathfrak{M}$ и удовлетворяющую $z(k) = 0$ для всех $k < m = \mathrm{lh}(u)$. Возьмем точку $a \in I_u$, генерическую над $\mathbf{V}$, а следовательно, и над $\mathfrak{M}[z]$. Пара $\langle a, z\rangle$ генерическая по Коэну над $\mathfrak{M}$. Значит, по теореме о произведении форсингов, точка z будет генерической над $\mathfrak{M}[a]$. Но тогда и точка $b = z +_2 a$ генерическая по Коэну над $\mathfrak{M}[a]$ по той же теореме, поскольку $a \in \mathfrak{M}[a]$. Отсюда, по той же причине, пара $\langle a, b\rangle$ генерическая над $\mathfrak{M}$. При этом $a, b \in I_u$ по построению. Однако точка $b = z +_2 a$ генерическая по Коэну и над $\mathbf{V}$ поскольку таковой является a и в то же время $z \in \mathbf{V}$, и при этом $\mathbf{V}[a] = \mathbf{V}[b]$.

Напомним, что генерические по Коэну точки, равно как и пары точек, не принадлежат тощим борелевским множествам с кодами в исходной модели по упоминавшейся теореме 11.3.3 в [19]. В частности, $\langle a, b\rangle \notin H'$, а тогда и $\notin H$, так что мы имеем $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)} \neq \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(b)}$.

Замечание 4.6. В этом рассуждении использована абсолютность формулы

$$\forall\,\langle x, x'\rangle(\langle x, x'\rangle \in \mathbf{B}^{(2)}_d \quad\Longrightarrow\quad \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)} \neq \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x')})$$

по Шенфилду, для вывода которой соотношение $\langle x, x'\rangle \in \mathbf{B}^{(2)}_d$ выражается через посредство множества W из (4) раздела 3, а соотношение $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)} \neq \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x')}$ выражается Σ^1_1-формулой, являющейся отрицанием той Π^1_1-формулы, которая использована выше в доказательстве леммы 4.4. Таким образом, получается Π^1_2-формула, к которой теорема Шенфилда применима.

В то же время по построению генерические точки a, b принадлежат множеству I_u. Отсюда по выбору u следует, что одно и то же множество $\{x : \varphi(x)\}$ тождественно, в расширении $\mathbf{V}[a] = \mathbf{V}[b]$, как множеству $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)}$ так и множеству $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(b)}$, так что

$\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(b)}$. Но мы видели, что $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)} \neq \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(b)}$. Противоречие показывает, что случай 1 невозможен.

Случай 2: (в $\mathbf{V}$ истинно, что) один из E-классов эквивалентности образует ко-тощее множество на некотором множестве вида I_v, где $v \in \mathbf{Coh}$, $u \subseteq v$. Тогда некоторое борелевское множество $U = \mathbf{B}_f \subseteq I_v \cap D$, $f \in \mathbf{BK}$, является ко-тощим внутри канторова интервала I_v, и все точки $x \in U$ попарно E-эквивалентны. Другими словами, найдется такое борелевское множество $B = \mathbf{B}_e \subseteq 2^\omega$, $e \in \mathbf{BK}$ в $\mathbf{V}$, что $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)} = B \ \forall\, x \in U = \mathbf{B}_f$.

Теперь рассмотрим произвольную точку $a \in I_v$, генерическую по Коэну над $\mathbf{V}$, и, *рассуждая в* $\mathbf{V}[a]$, воспользуемся тем, что генерическая по Коэну точка обязана принадлежать ко-тощему на соответствующем бэровском интервале I_v борелевскому множеству $U = \mathbf{B}_f$; см. доказательство леммы 4.3. Отсюда по теореме абсолютности Шенфилда, как и выше, мы выводим, что $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)} = B = \mathbf{B}_e$, где e – борелевский код в данном универсуме $\mathbf{V}$.

Однако по построению $a \in I_v \subseteq I_u$, откуда по выбору u в начале доказательства теоремы множество $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)} = \mathbf{B}_e$ непусто. Опять по теореме абсолютности, множество $\mathbf{B}_e$ непусто и в $\mathbf{V}$ (так как код e принадлежит $\mathbf{V}$), т.е. содержит некоторую точку $x \in \mathbf{V}$. Таким образом, $x \in \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)} \cap \mathbf{V}$ в $\mathbf{V}[a]$, что и дает заключительное противоречие с выбором u, поскольку $a \in I_u$.

5. Решение для расширения случайного по Соловею. Здесь мы доказываем теорему 1.2 в части (B), т.е. для расширений, случайных по Соловею. Доказательство во многом повторяет ход рассуждений в доказательстве теоремы 4.1 выше, поэтому мы опустим некоторые общие детали, например, связанные с абсолютностью, но подчеркнем некоторые различия.

Множество $T \subseteq 2^{<\omega}$ называется *деревом*, если для любых кортежей $s \subset t$ в $2^{<\omega}$ из $t \in T$ следует $s \in T$. Случайный по Соловею форсинг $\mathbf{Rand}$ состоит из всех всех таких деревьев $T \subseteq 2^{<\omega}$, без концевых вершин и изолированных ветвей, что множество

$$[T] = \{x \in 2^\omega : \forall\, n\, (x \restriction n \in T)\}$$

имеет положительную меру $\boldsymbol{\mu}([T]) > 0$, в смысле обычной вероятностной меры $\boldsymbol{\mu}$ на 2^ω. В отличие от коэнова форсинга $\mathbf{Coh}$, форсинг $\mathbf{Rand}$ зависит от выбора исходной модели, так что "точка случайная (по Соловею) над моделью $\mathfrak{M}$" означает "$(\mathbf{Rand} \cap \mathfrak{M})$-генерическая над $\mathfrak{M}$", и это равносильно тому, что точка не принадлежит ни одному борелевскому множеству $\mathbf{B}_c$ $\boldsymbol{\mu}$-меры 0 с кодом $c \in \mathbf{BK} \cap \mathfrak{M}$.

Другое отличие от коэнова форсинга состоит в том, что случайная пара точек **не** является $(\mathbf{Rand} \times \mathbf{Rand})$-генерической парой. Понятие случайной пары связано с форсингом замкнутыми множествами в $2^\omega \times 2^\omega$ (или порождающими их деревьями), которые имеют строго положительную меру в смысле произведения мер $\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\mu}$ на $2^\omega \times 2^\omega$. Для нас будет важна следующая известная (см., к примеру, [11]) характеризация случайных пар.

Предложение 5.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ – транзитивная модель достаточно большой подтеории в* $\mathbf{ZFC}$, *и пусть $a, b \in 2^\omega$. Тогда следующие четыре утверждения равносильны*:

(1) *пара $\langle a, b\rangle$ является случайной над $\mathfrak{M}$*;

(2) *$\langle a, b\rangle$ не принадлежит никакому борелевскому множеству $\mathbf{B}^{(2)}_c$ $(\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\mu})$-меры 0 с кодом $c \in \mathbf{BK} \cap \mathfrak{M}$*;

(3) *a случайна над $\mathfrak{M}$ и b случайна над $\mathfrak{M}[a]$;*
(4) *b случайна над $\mathfrak{M}$ и a случайна над $\mathfrak{M}[b]$.*

Теорема 5.2. *Пусть $a_0 \in 2^\omega$ – случайная по Соловею точка над универсумом множеств $\mathbf{V}$. Тогда в $\mathbf{V}[a_0]$ истинно, что если $\varnothing \neq X \subseteq 2^\omega$ есть борелевское множество, определимое теоретико-множественной формулой с параметрами из $\mathbf{V}$, то X имеет точку из $\mathbf{V}$.*

Как и выше, из этой теоремы немедленно следует теорема 1.2 в части (B).

Доказательство. Найдется формула $\varphi(x)$ с множествами из исходной модели $\mathbf{V}$ в роли параметров и код $p \in \mathbf{BK}\cap\mathbf{V}[a_0]$, для которых $X = \mathbf{B}_p = \{x \in 2^\omega : \varphi(x)\}$ в $\mathbf{V}[a_0]$. Предполагаем противное: $X \cap \mathbf{V} = \varnothing$.

Подобно коэновским, случайные по Соловею расширения удовлетворяют требованию *борелевского чтения имен*, так что найдется код $c \in \mathbf{BF} \cap \mathbf{V}$, для которого $p = \boldsymbol{\kappa}_c(a_0)$. Таким образом, в расширении $\mathbf{V}[a_0]$ борелевское множество $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a_0)}$ тождественно $\mathbf{OD}$-множеству $X = \{x \in 2^\omega : \varphi(x)\}$, и тогда $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a_0)} \cap \mathbf{V} = \varnothing$. Найдется дерево $T \in \mathbf{Rand} \cap \mathbf{V}$, $\mathbf{Rand}$-вынуждающее над $\mathbf{V}$, что

$$\boldsymbol{\kappa}_c(\breve{\mathbf{a}}) \in \mathbf{BK}, \qquad \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(\breve{\mathbf{a}})} = \{x : \varphi(x)\} \neq \varnothing, \qquad \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(\breve{\mathbf{a}})} \cap \mathbf{V} = \varnothing.$$

Множество $[T] = \{x \in 2^\omega : \forall\, m\, (x \restriction m \in T)\}$ замкнуто и $\boldsymbol{\mu}([T]) = M > 0$.

Лемма 5.3. *В универсуме $\mathbf{V}$ истинно, что $Y = \{x \in [T] : \boldsymbol{\kappa}_c(x) \in \mathbf{BK}\}$ удовлетворяет $\boldsymbol{\mu}(Y) = M$.*

Доказательство. Мы следуем доказательству леммы 4.3. Множество Y принадлежит $\mathbf{\Pi}^1_1$; следовательно, оно измеримо. Поэтому, если $\boldsymbol{\mu}(Y) < M$, имеется дерево $U \in \mathbf{Rand} \cap \mathbf{V}$, удовлетворяющее $U \subseteq T \setminus Y$ и $\boldsymbol{\mu}([U]) > 0$. Тогда в $\mathbf{V}$ истинно предложение $\forall\, x \in [U]\, (\boldsymbol{\kappa}_c(x) \notin \mathbf{BK})$. Но это предложение выражается Π^1_2-формулой, так что по теореме абсолютности Шенфилда оно истинно и в генерическом расширении вида $\mathbf{V}[a]$, где $a \in [U]$ – произвольная генерическая по Коэну точка над $\mathbf{V}$. Таким образом, $\boldsymbol{\kappa}_c(a) \notin \mathbf{BK}$. Мы имеем противоречие, поскольку $a \in [U] \subseteq [T]$, а T вынуждает $\boldsymbol{\kappa}_c(\breve{\mathbf{a}}) \in \mathbf{BK}$.

Рассуждая в универсуме $\mathbf{V}$, мы заключаем, по лемме, что имеется такое дерево $S \in \mathbf{Rand}$, что $[S] \subseteq Y$, так что $\boldsymbol{\kappa}_c(x) \in \mathbf{BK}$ для всех $x \in [S]$. Теперь рассмотрим борелевское множество

$$P = \{\langle x, y\rangle : x \in [S] \wedge y \in \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)}\}$$

и $\mathbf{\Pi}^1_1$-отношение эквивалентности $x \mathsf{E} x'$, когда $x, x' \in [S]$ и $P_x = P_{x'}$ на множестве $[S]$, где $P_x = \{y : \langle x, y\rangle \in P\}$. Как $\mathbf{\Pi}^1_1$-подмножество произведения $[S] \times [S]$, E $(\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{\mu})$-измеримо. Следовательно, либо все E-классы имеют $\boldsymbol{\mu}$-меру 0 на множестве $[S]$, либо же один из E-классов имеет ненулевую меру на $[S]$. Мы рассмотрим эти два случая по отдельности.

Случай 1: (в $\mathbf{V}$ истинно, что) все E-классы имеют $\boldsymbol{\mu}$-меру 0 на множестве $[S]$, а значит $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество

$$H = \{\langle x, x'\rangle \in [S] \times [S] : \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x')}\}$$

имеет $(\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{\mu})$-меру 0 по теореме Фубини, и H можно накрыть борелевским множеством $H'=\mathbf{B}^{(2)}_d$, $H\subseteq H'\subseteq I_v\times I_v$, с кодом d, также $(\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{\mu})$-меры 0.

Фиксируем, *продолжая рассуждать в* $\mathbf{V}$, счетную транзитивную модель $\mathfrak{M}$ достаточно большого фрагмента **ZFC**, содержащую коды c, d и деревья T, S, и являющуюся элементарной подмоделью универсума относительно всех аналитических формул (чтобы не заботиться специально об абсолютности).

Лемма 5.4 (лемма 3.3 в [9]). *Существуют точки $a,b\in[S]$, случайные по Соловею над $\mathbf{V}$ и такие, что $\mathbf{V}[a]=\mathbf{V}[b]$, и в то же время пара $\langle a,b\rangle$ является случайной над моделью $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Здесь более сложное рассуждение, чем в доказательстве леммы 4.5. Рассмотрим множество

$$P=\{\langle x,x+_2 y\rangle : x,y\in[S]\}.$$

Если $x\in[S]$, то сечение $P_x=\{z:\langle x,z\rangle\in P\}$ имеет ту же меру, что и множество $[S]$, поскольку $P_x=\{x+_2 y : y\in[S]\}$. Поэтому по теореме Фубини, P имеет ту же $(\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{\mu})$-меру, что и множество $[S]\times[S]$, т.е. ненулевую, откуда опять по теореме Фубини проекция $Z=\{z\in 2^\omega : \boldsymbol{\mu}(P^z)>0\}$ также удовлетворяет $\boldsymbol{\mu}(Z)>0$.

Возьмем, в универсуме $\mathbf{V}$, любую точку $z\in Z$, случайную над $\mathfrak{M}$. В этом случае $\boldsymbol{\mu}(P^z)>0$; значит, существует точка $a\in P^z$, случайная над $\mathbf{V}$, а тогда и над $\mathfrak{M}[z]$. Пара же точек $\langle a,z\rangle$ является случайной над $\mathfrak{M}$ и принадлежит множеству P. Значит, по предположению 5.1, точка z будет случайной над $\mathfrak{M}[a]$. Но тогда и точка $b=z+_2 a$ будет очевидно случайной над $\mathfrak{M}[a]$, поскольку $a\in\mathfrak{M}[a]$. Отсюда, по предположению 5.1, пара $\langle a,b\rangle$ случайная над $\mathfrak{M}$. При этом $a,b\in[S]$ по построению. Наконец, точка $b=z+_2 a$ является случайной над $\mathbf{V}$ поскольку таковой является a, и в то же время $z\in\mathbf{V}$, и при этом очевидно $\mathbf{V}[a]=\mathbf{V}[b]$.

Следуя доказательству леммы 4.4, мы заключаем, что $\langle a,b\rangle\notin H'$ вследствие случайности этой пары над $\mathfrak{M}$, а тогда и $\notin H$, так что $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)}\neq\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(b)}$.

В то же время по построению генерические точки a, b принадлежат множеству $[S]\subseteq[T]$. Отсюда по выбору T следует, что одно и то же множество $\{x:\varphi(x)\}$ тождественно, в расширении $\mathbf{V}[a]=\mathbf{V}[b]$, как множеству $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)}$, так и множеству $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(b)}$, так что $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)}=\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(b)}$. Но мы видели, что $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)}\neq\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(b)}$. Противоречие показывает, что случай 1 невозможен.

Случай 2: (в $\mathbf{V}$ истинно, что) один из E-классов имеет положительную $\boldsymbol{\mu}$-меру на $[S]$. Тогда имеется такое дерево $Q\in\mathbf{Rand}$, что $Q\subseteq S$ и все точки $x\in[Q]$ попарно E-эквивалентны. Другими словами, найдется такое борелевское множество $B=\mathbf{B}_e\subseteq 2^\omega$, $e\in\mathbf{BK}$ в $\mathbf{V}$, что $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)}=B$ для всех $x\in[Q]$.

Теперь берем любую точку $a\in[Q]$, случайную по Соловею над $\mathbf{V}$. По теореме абсолютности Шенфилда мы выводим, что $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)}=B=\mathbf{B}_e$. Окончание доказательства такое же, как и окончание доказательства теоремы 4.1.

6. Решение для саксовского расширения. Здесь доказывается теорема 1.2 в части (C), т.е. для саксовских расширений. Напомним, что форсинг Сакса есть множество **PT** всех вообще совершенных деревьев $\varnothing\neq T\subseteq 2^{<\omega}$. Другими словами, дерево $T\subseteq 2^{<\omega}$ принадлежит **PT**, когда оно не имеет концевых вершин и изолированных ветвей. Например, полное дерево $2^{<\omega}$ принадлежит **PT** и $[2^{<\omega}]=2^\omega$.

Теорема 6.1. *Пусть $a_0 \in 2^\omega$ является саксовской, т.е.* $\mathbf{PT}$*-генерический точкой над универсумом множеств* $\mathbf{V}$. *В модели* $\mathbf{V}[a_0]$ *истинно, что если* $\varnothing \neq X \subseteq 2^\omega$ *есть борелевское* $\mathbf{OD}$ *множество, то* X *имеет точку из* $\mathbf{V}$.

Эта теорема влечет теорему 1.2 в части (С).

Доказательство. Как и в начале доказательств теорем 4.1 и 5.2, предположение противного приводит нас к формуле $\varphi(x)$ с ординалами в роли параметров, коду $c \in \mathbf{BF} \cap \mathbf{V}$, и дереву $T \in \mathbf{PT} \cap \mathbf{V}$, которое $\mathbf{PT}$-вынуждает над $\mathbf{V}$, что

$$\boldsymbol{\kappa}_c(\breve{\mathbf{a}}) \in \mathbf{BK}, \qquad \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(\breve{\mathbf{a}})} = \{x : \varphi(x)\} \neq \varnothing, \qquad \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(\breve{\mathbf{a}})} \cap \mathbf{V} = \varnothing.$$

Рассуждаем в универсуме $\mathbf{V}$. Рассмотрим борелевское множество

$$P = \{\langle x, y\rangle : x \in [T] \wedge y \in \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)}\}$$

и отношение эквивалентности $x \mathsf{E} x'$, когда $x, x' \in [T]$ и $P_x = P_{x'}$, $P_x = \{y : \langle x, y\rangle \in P\}$. Понятно, что E есть $\mathbf{\Pi}^1_1$-отношение. Следовательно, по теореме Сильвера (см. [5; 10.1.1] или [4; 12.1.1]), найдется такое дерево $U \in \mathbf{PT}$, что $U \subseteq T$ и либо $[U]$ состоит из попарно E-эквивалентных точек либо $[U]$ состоит из попарно E-неэквивалентных точек. Соответственно, мы имеем два случая.

Случай 1: (в $\mathbf{V}$ истинно, что) $[U]$ состоит из попарно E-неэквивалентных точек, т.е. $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)} \neq \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x')}$ для всех пар точек $x \neq x'$ из $[U]$. Фиксируем, рассуждая в $\mathbf{V}$, любой гомеоморфизм $h\colon [U] \xrightarrow{\text{на}} [U]$, удовлетворяющий $h(x) \neq x$ для всех $x \in [U]$, и пусть $d \in \mathbf{BF} \cap \mathbf{V}$ и $h = \boldsymbol{\vartheta}_d \restriction [U]$. Тогда в $\mathbf{V}$ истинно:

$$\forall\, x \in [U]\, (\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)} \neq \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(\boldsymbol{\vartheta}_d(x))}).$$

Теперь берем любую точку $a \in 2^\omega$, генерическую по Саксу над универсумом множеств $\mathbf{V}$. *Рассуждаем в генерическом расширении* $\mathbf{V}[a]$. Формула, говорящая, что отображение $\boldsymbol{\vartheta}_d \restriction [U]$ является гомеоморфизмом множества $[U]$ на себя, причем $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)} \neq \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(\boldsymbol{\vartheta}_d(x))}$ для всех $x \in [U]$, истинна в $\mathbf{V}$, и в то же время абсолютна по теореме Шенфилда. Следовательно, она истинна и в $\mathbf{V}[G]$, так что мы имеем $b = \boldsymbol{\vartheta}_d(a) \in [U]$ и $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)} \neq \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(b)}$.

Однако точка $b = \boldsymbol{\vartheta}_d(a)$ является $\mathbf{PT}$-генерической над $\mathbf{V}$ вместе с a, поскольку $\boldsymbol{\vartheta}_d \restriction [U]$ – гомеоморфизм множества $[U]$ с “кодом” $d \in \mathbf{V}$, а форсинг Сакса $\mathbf{PT}$ инвариантен относительно таких гомеоморфизмов. При этом $b \in \mathbf{V}[a]$ и $a = \boldsymbol{\vartheta}_d^{-1}(b) \in \mathbf{V}[b]$, так что $\mathbf{V}[a] = \mathbf{V}[a']$ – одна и та же модель. Отсюда по выбору $[T]$ и вследствие $U \subseteq T$ следует, что в $\mathbf{V}[a] = \mathbf{V}[b]$ истинно:

$$\forall\, x \in 2^\omega (\varphi(x) \Longleftrightarrow x \in \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)} \Longleftrightarrow x \in \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(b)}).$$

Следовательно, $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(a)} = \mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(b)}$, что противоречит выведенному выше. Противоречие показывает, что на самом деле случай 1 невозможен.

Случай 2: (в $\mathbf{V}$ истинно, что) $[U]$ состоит из попарно E-эквивалентных точек. Тогда существует такой код $e \in \mathbf{BK} \cap \mathbf{V}$, что $\mathbf{B}_{\boldsymbol{\kappa}_c(x)} = \mathbf{B}_e$ для всех $x \in [U]$. Берем любую точку $a \in [Q]$, случайную по Саксу над $\mathbf{V}$, и завершаем доказательство тем же противоречием, как и в конце доказательства теоремы 4.1.

Авторы признательны анонимному рецензенту за ценные замечания, позволившие дополнить и улучшить изложение.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] J. Hadamard, "Cinq lettres sur la théorie des ensembles", *Bull. Soc. Math. France*, **33** (1905), 261–273.

[2] N. Lusin, P. Novikoff, "Choix effectif d'un point dans un complémentaire analytique arbitraire, donné par un crible", *Fund. Math.*, **25** (1935), 559–560.

[3] G. H. Moore, *Zermelo's Axiom of Choice. Its Origins, Development and Influence.*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[4] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества*, МЦНМО, М., 2010.

[5] V. Kanovei, *Borel Equivalence Relations. Structure and Classification*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[6] R. M. Solovay, "A model of set-theory in which every set of reals is Lebesgue measurable", *Ann. of Math.* (2), **92** (1970), 1–56.

[7] V. Kanovei, V. Lyubetsky, "A definable E_0-class containing no definable elements", *Arch. Math. Logic*, **54**:5-6 (2015), 711–723.

[8] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, "Определимое счетное множество, не содержащее определимых элементов", *Матем. заметки*, **102**:3 (2017), 369–382.

[9] V. Kanovei, V. Lyubetsky, "Countable OD sets of reals belong to the ground model", *Arch. Math. Logic*, **57**:3-4 (2018), 285–298.

[10] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, "О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств", *УМН*, **58**:5 (353) (2003), 3–88.

[11] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, "О множестве конструктивных вещественных чисел", *Геометрическая топология и теория множеств*, Тр. МИАН, **247**, Наука, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2004, 95–128.

[12] V. Kanovei, "Non-Glimm-Effros equivalence relations at second projective level", *Fund. Math.*, **154**:1 (1997), 1–35.

[13] Y. N. Moschovakis, *Descriptive Set Theory*, North-Holland Publ., Amsterdam, 1980.

[14] Дж. Шенфилд, *Математическая логика*, Наука, М., 1975.

[15] V. Kanovei, "When a partial Borel order is linearizable", *Fund. Math.*, **155**:3 (1998), 301–309.

[16] M. Kondô, "L'uniformisation des complémentaires analytiques", *Proc. Imp. Acad.*, **13**:8 (1937), 287–291.

[17] J. W. Addison, "Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory", *Fund. Math.*, **46** (1959), 123–135.

[18] J. Stern, "On Lusin's restricted continuum problem", *Ann. of Math.* (2), **120**:1 (1984), 7–37.

[19] В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, *Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы*, МЦНМО, М., 2013.

В. Г. Кановей
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва
E-mail: kanovei@iitp.ru

Поступило
16.03.2018
После переработки
09.09.2018
Принято к публикации
12.09.2018

В. А. Любецкий
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича Российской академии наук,
г. Москва
E-mail: lyubetsk@iitp.ru