Об отношении равенства с точностью до счетного множества

В. Г. Кановей, В. А. Любецкий

Ключевые слова: равенство с точностью до счетного множества, эффективный выбор.

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm12753

Отношение эквивалентности $\mathsf{E}_{\aleph_0}$ (равенство с точностью до счетного множества) определяется как

$$X\mathsf{E}_{\aleph_0}Y, \qquad \text{когда симметрическая разность } X\Delta Y \text{ не более чем счетна.}$$

Здесь X, Y – множества в бэровском пространстве ω^ω, хотя все сказанное ниже сохраняет силу для вещественной прямой и вообще любого совершенного польского пространства. Аксиома выбора AC позволяет выбрать определенный элемент в каждом $\mathsf{E}_{\aleph_0}$-классе эквивалентности, т.е. существует функция $s\colon \mathscr{P}(\omega^\omega) \to \mathscr{P}(\omega^\omega)$, удовлетворяющая соотношениям $s(X)\mathsf{E}_{\aleph_0}X$ для всех $X \subseteq \omega^\omega$ и $s(Y) = s(X)$ для всех таких $X, Y \subseteq \omega^\omega$, что $X\mathsf{E}_{\aleph_0}Y$; такая функция называется *селектором* для отношения $\mathsf{E}_{\aleph_0}$, см. [1; раздел 12.D].

Однако применением аксиомы выбора не решается вопрос существования *эффективно определенного* селектора s, т.е. вопрос выбора конкретного, вполне определенного множества в каждом $\mathsf{E}_{\aleph_0}$-классе точечных множеств. Ответ на этот вопрос зависит от того, какие точечные множества мы рассматриваем. Например, в каждом классе $\mathsf{E}_{\aleph_0}$-эквивалентности *замкнутых* множеств $X \subseteq \omega^\omega$ существует единственное совершенное множество, которое и можно взять в качестве $s(X)$, получая эффективно определенный селектор. Следующая наша теорема распространяет этот результат на значительно более широкий класс $\mathbf{\Delta}^0_2$ тех множеств, которые являются одновремено $\mathbf{F}_\sigma$ и $\mathbf{G}_\delta$.

Теорема. *Существует эффективно определенный селектор для отношения* $\mathsf{E}_{\aleph_0}$ *на* $\mathbf{\Delta}^0_2$*-множествах бэровского пространства.*

Теорема дает наилучший возможный результат, поскольку уже для следующего по объему множеств борелевского класса $\mathbf{F}_\sigma$ эффективно определимых селекторов, вообще говоря, нет. Это вытекает из следующего результата, недавно полученного в [2; 5.5], состоящего в том, что средствами **ZFC** невозможно построить эффективно определенный селектор для отношения $\mathsf{E}_{\aleph_0}$ на более широком, чем $\mathbf{\Delta}^0_2$, классе $\mathbf{F}_\sigma$-множеств.[1]

Доказательство теоремы использует следующую лемму.

Как обычно, $\overline{X}$ обозначает топологическое замыкание множества X.

Лемма. *Если* X *– счетное* $\mathbf{G}_\delta$*-множество в польском пространстве, то замыкание* $\overline{X}$ *множества* X *счетно. Следовательно, если* $\mathbf{\Delta}^0_2$*-множества* X, Y *удовлетворяют* $X\mathsf{E}_{\aleph_0}Y$, *то выполнено и* $\overline{X}\mathsf{E}_{\aleph_0}\overline{Y}$.

Данная работа была проделана при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-29-13037).

[1] Более точно, результат [2; 5.5] состоит в том, что отношение $\mathsf{E}_{\aleph_0}$ на $\mathbf{F}_\sigma$-множествах не имеет селектора, измеримого по Бэру. Однако в известной модели Соловея [3] теории **ZFC** все **ROD** отображения измеримы по Бэру. Класс **ROD** (вещественно-ординально определимые множества, real-ordinal definable) состоит из всех множеств, определимых теоретико-множественными формулами с ординалами и точками ω^ω (т.е. вещественными числами, reals, в терминологии современной дескриптивной теории множеств) в роли параметров. Класс **ROD** с лихвой содержит все множества, которые можно считать эффективно определимыми в самом широком смысле, см. об этом в [4; § 7]. Поэтому в модели Соловея отношение $\mathsf{E}_{\aleph_0}$ на $\mathbf{F}_\sigma$-множествах не имеет **ROD** селектора, а значит, не имеет селектора, эффективно определимого в любом разумном смысле.

Доказательство. В противном случае X – счетное плотное $\mathbf{G}_\delta$-множество в несчетном польском пространстве $\overline{X}$, чего не может быть.

Мы также используем *разностную иерархию* $\boldsymbol{\Delta}^0_2$*-множеств*. Как известно (см. об этом в [1; 22.E] или [5; § 34.VI]), каждое $\boldsymbol{\Delta}^0_2$-множество A в польском пространстве $\mathbb{X}$ может быть представлено в виде

$$A = \bigcup_{\eta<\vartheta} (F_\eta \setminus H_\eta),$$

где $\vartheta < \omega_1$, а $F_0 \supseteq H_0 \supseteq F_1 \supseteq H_1 \supseteq \dots \supseteq F_\eta \supseteq H_\eta \supseteq \cdots$ – убывающая последовательность замкнутых множеств в $\mathbb{X}$, определенных трансфинитной индукцией, так что

$$F_0 = \mathbb{X}, \qquad H_\eta = \overline{F_\eta \setminus A}, \qquad F_{\eta+1} = H_\eta \cap \overline{F_\eta \cap A},$$

и берем пересечение на предельных шагах. Из-за сепарабельности имеем $F_\vartheta = \varnothing$ для некоторого ординала $\vartheta < \omega_1$, на котором построение заканчивается.

Доказательство теоремы. Достаточно проверить, что если $\boldsymbol{\Delta}^0_2$-множества $A, B \subseteq \omega^\omega$ удовлетворяют $A \mathsf{E}_{\aleph_0} B$, то соответствующие убывающие последовательности замкнутых множеств

$$\left.\begin{array}{l} F^A_0 \supseteq H^A_0 \supseteq F^A_1 \supseteq H^A_1 \supseteq \dots \supseteq F^A_\eta \supseteq H^A_\eta \supseteq \cdots \\ F^B_0 \supseteq H^B_0 \supseteq F^B_1 \supseteq H^B_1 \supseteq \dots \supseteq F^B_\eta \supseteq H^B_\eta \supseteq \cdots \end{array}\right\} \qquad (\eta < \vartheta = \vartheta^A = \vartheta^B),$$ [2]

которые удовлетворяют соотношениям $A = \bigcup_{\eta<\vartheta}(F^A_\eta \setminus H^A_\eta)$ и $B = \bigcup_{\eta<\vartheta}(F^B_\eta \setminus H^B_\eta)$, также удовлетворяют соотношению

$$F^A_\eta \mathsf{E}_{\aleph_0} F^B_\eta, \quad H^A_\eta \mathsf{E}_{\aleph_0} H^B_\eta \qquad \text{для всех} \quad \eta < \vartheta. \tag{1}$$

Если это доказано, то совершенные ядра[3] $\mathbf{PK}(F^A_\eta)$ и $\mathbf{PK}(F^B_\eta)$ множеств F^A_η и F^B_η тождественны: $\mathbf{PK}(F^A_\eta) = \mathbf{PK}(F^B_\eta)$, и аналогично выполнено $\mathbf{PK}(H^A_\eta) = \mathbf{PK}(H^B_\eta)$. Отсюда следует, что множества

$$s(A) = \bigcup_{\eta<\vartheta} (\mathbf{PK}(F^A_\eta) \setminus \mathbf{PK}(H^A_\eta)) \qquad \text{и} \qquad s(B) = \bigcup_{\eta<\vartheta} (\mathbf{PK}(F^B_\eta) \setminus \mathbf{PK}(H^B_\eta))$$

тождественны (в предположении, что A, B суть $\boldsymbol{\Delta}^0_2$-множества и $A \mathsf{E}_{\aleph_0} B$) и, кроме того, выполнено $A \mathsf{E}_{\aleph_0} s(A)$ для каждого $\boldsymbol{\Delta}^0_2$-множества A. Таким образом, s – требуемый селектор, что и заканчивает доказательство теоремы.

Само доказательство соотношения (1) выполняется по индукции.

Мы имеем $F^A_0 = F^B_0 = \omega^\omega$ – база индукции.

Допустим, что $F^A_\eta \mathsf{E}_{\aleph_0} F^B_\eta$. Тогда и

$$(F^A_\eta \setminus A) \mathsf{E}_{\aleph_0} (F^B_\eta \setminus B)$$

(поскольку предполагается, что $A \mathsf{E}_{\aleph_0} B$). Значит, $H^A_\eta \mathsf{E}_{\aleph_0} H^B_\eta$ по лемме. И далее, совершенно аналогично, $F^A_{\eta+1} \mathsf{E}_{\aleph_0} F^B_{\eta+1}$, что завершает шаг $\eta \to \eta+1$.

Предельный шаг в выводе соотношения (1) не вызывает вопросов.

---

[2]При необходимости более короткая из этих двух убывающих последовательностей продолжается здесь до длины более длинной последовательности пустыми множествами.

[3]Совершенное ядро $\mathbf{PK}(X)$ есть наибольшее совершенное подмножество замкнутого X.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] A. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer, New York, 1995. **[2]** S. Müller, P. Schlicht, D. Schrittesser, T. Weinert, *Lebesgue's Density Theorem and Definable Selectors for Ideals*, 2018, arXiv: 1811.06489. **[3]** R. M. Solovay, *Ann. of Math.* (2), **92** (1970), 1–56. **[4]** В. Г. Кановей, В. А. Любецкий, *УМН*, **58**:5 (353) (2003), 3–88. **[5]** К. Куратовский, *Топология*, Т. 1, Мир, М., 1966.

В. Г. Кановей
Институт проблем передачи
информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: kanovei@iitp.ru

Поступило
15.04.2020
Принято к публикации
14.05.2020

В. А. Любецкий
Институт проблем передачи
информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук, г. Москва
E-mail: lyubetsk@iitp.ru