

О конструктивных множествах в теории множеств Симпсона

В. Г. Кановой, В. А. Любецкий

Теория множеств Симпсона **SST** получается из **ZF** удалением аксиомы степени и схемы аксиом подстановки (схема выделения сохраняется), и добавлением аксиом: 1) транзитивного надмножества, 2) транзитивной свертки фундаментальных отношений, 3) счетности, и 4) декартова произведения. Метаматематически, **SST** есть теория стандартной теоретико-множественной надстройки над универсумом арифметики второго порядка \mathbf{Z}_2 (без аксиомы выбора). При этом **SST** равнонепротиворечива с \mathbf{Z}_2 и связана с \mathbf{Z}_2 взаимно обратными интерпретациями. Симпсон показал, что построение класса **L** всех конструктивных множеств по Гёделю осуществимо в этой теории, несмотря на отсутствие схемы аксиом подстановки, которая обычно используется для обоснования трансфинитной индукции в **ZF**. Исследуя класс **L** в теории Симпсона, мы доказываем, что класс **L** удовлетворяет самой **SST** без аксиомы счетности, в частности, удовлетворяет схеме аксиом выделения.

Библиография: 23 названия.

Ключевые слова: конструктивность; теория множеств Симпсона; арифметика второго порядка

1. Введение

Симпсон [17; гл. VII] провел тщательное исследование взаимосвязей между различными подтеориями арифметики второго порядка \mathbf{Z}_2 и теориями множеств без аксиомы степени но с аксиомой **Cntbl** о счетности каждого множества. Как своего рода ядро своих теоретико-множественных схем, Симпсон берет теорию $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}}$, полученную из теории Цермело **Z** удалением аксиомы степени и схемы выделения и добавлением 1) аксиомы существования транзитивных надмножеств, 2) аксиомы существования транзитивной модели для любого фундаментального бинарного отношения (свёртка Мостовского), 3) аксиомы **Cntbl** о счетности каждого множества, и 4) аксиомы универсальной определенности одного варианта гёделевых операций (куда входит, например, существование $\{u, v\}$ и $u \times v$ для любых множеств u и v). К этой базовой теории Симпсон добавляет схемы выделения для разных классов \in -формул, и, как законченный вариант, можно добавить полную схему выделения **Sep** (или Π_∞^{set} -comprehension, как в [17]). Так полученную теорию $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}} + \mathbf{Sep}$ мы

Работа выполнена в рамках государственного задания ИППИ РАН, утвержденного Минобрнауки России.

называем *теорией множеств Симпсона* и обозначаем через **SST**. См. ниже §§ 2,3 подробнее об аксиомах этой теории и некоторых их непосредственных следствиях.

С точки зрения оснований математики, теория **SST** важна тем, что она в точности является теорией стандартной интерпретации теории множеств в арифметике второго порядка \mathbf{Z}_2 при помощи фундированных деревьев, как показано в [17; § VII.3]. Об этом см. также в статьях [1, 15, 19, 20] и др., или ниже в § 4 этой статьи.

Симпсон установил в [17; § VII.4] что теория **SST** (и даже до какой-то степени $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}}$) достаточно сильна для выполнения многих типичных теоретико-множественных построений по трансфинитной индукции, включая адекватное построение класса $\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathbf{L}_\alpha$ конструктивных множеств с выводом ряда главных свойств иерархии множеств \mathbf{L}_α — несмотря на отсутствие схемы подстановки, которая обычно используется для этих целей в **ZF**. В этом направлении, Симпсон фактически получает — в иной терминологической системе — следующий результат в [17] (теорема VII.5.4 и утверждение об аксиоме выбора в ее доказательстве):

ТЕОРЕМА (SST). *Класс или множество $\mathbf{HCL} \subseteq \mathbf{L}$ всех множеств x , принадлежащих транзитивному и счетному в \mathbf{L} множеству $y \in \mathbf{L}$, удовлетворяет аксиомам \mathbf{ZFC}^- .* \square

Здесь \mathbf{ZFC}^- — это **ZFC** без аксиомы степени, см. § 2.

Фундаментальное следствие из этой теоремы состоит в *равнонепротиворечивости* теорий \mathbf{Z}^- , \mathbf{ZF}^- , \mathbf{ZFC}^- (без аксиомы степени), а также арифметики второго порядка \mathbf{Z}_2 . Этот результат о непротиворечивости известен по крайней мере с 1960х: он отмечен в [14], полное доказательство изложено, например, в [22]. См. также [6, 10, 11, 13, 23] о последних результатах о непротиворечивости в связи с \mathbf{Z}_2 . См. более подробно об этих результатах в нашей недавней статье [12].

Что касается самого класса \mathbf{L} в теории **SST**, то, в противоположность его подклассу **HCL**, он остался мало исследованным в монографии [17] в контексте аксиом теории множеств. Указано лишь, что \mathbf{L} не обязательно удовлетворяет аксиоме счетности (см. ниже пример 1). В положительном же направлении рассмотрен лишь частный случай **Sep** для отношений типа Σ_1 (упражнение VII.5.5 в [17]). Мы заполняем этот пробел следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 1 (SST). *Класс \mathbf{L} удовлетворяет аксиомам теории **SST**, за исключением, возможно, аксиомы счетности **Cntbl**, а также таким двум аксиомам:*

- (I) *каждое множество можно вполне упорядочить (ослабление **Cntbl**);*
- (II) *для каждого множества X найдется надмножество $Y \supseteq X$, содержащее все свои конечные подмножества.*

*В частности, \mathbf{L} удовлетворяет схеме выделения **Sep** для формул любого типа. Следовательно, класс (или множество) $\mathbf{L} \cap \mathcal{P}(\omega)$ удовлетворяет \mathbf{Z}_2 .*

Теорема 1 — главный результат этой статьи. Она доказана в § 7 ниже на основе изложенных в §§ 5, 6 результатов о конструктивности в контексте **SST**.

2. Теория множеств Симпсона

Теория \mathbf{ZFC}^- получается из теории множеств Цермело – Френкеля **ZFC** так:

- (I) аксиома степени **PS** удаляется — это удаление и символизирует минус в аббревиатуре;
- (II) обычная аксиома выбора **AC** по Цермело как в **ZFC** удаляется (ибо без **PS** она неэффективна), а вместо нее вводится *аксиома полного упорядочивания* **WOA**, постулирующая возможность вполне упорядочить любое множество;
- (III) схема выделения **Sep** сохраняется, но схема подстановки **Repl** (слишком слабая в отсутствие **PS**) замещается схемой *собиранья*:

$$\mathbf{Coll} : \forall X (\forall x \in X \exists y \Phi(x, y) \implies \exists Y \forall x \in X \exists y \in Y \Phi(x, y)).$$

Известно, что $\mathbf{Coll} + \mathbf{Sep} \implies \mathbf{Repl}$.

См. работы [7, 8] за подробностями о теории \mathbf{ZFC}^- . Также см. [9], [18], [5; разд. 2] и др. о различных но эквивалентных формулировках схемы собиранья.

- \mathbf{ZF}^- есть \mathbf{ZFC}^- без аксиомы полного упорядочивания **WOA**;
- \mathbf{Z}^- есть \mathbf{ZF}^- без схемы собиранья **Coll**. Другими словами, \mathbf{Z}^- содержит аксиомы экстенциональности, пары $\{x, y\}$, суммы или объединения $\bigcup X$, бесконечности, регулярности, и схему **Sep**. См., например, [21] об этих аксиомах.

Наконец, определим *теорию множеств Симпсона* **SST** как \mathbf{Z}^- с добавленными следующими четырьмя аксиомами **Prod**, **TrCov**, **Beta**, **Cntbl**:

Декартово произведение, Prod: $\forall X, Y$, существует множество $X \times Y$.

Транзитивное накрытие, TrCov: $\forall X$, существует транзитивное множество $Y \supseteq X$.

Аксиома Beta, или **свёртка Мостовского**: любое фундированное отношение A на множестве $D = \mathbf{fld} A := \mathbf{dom} A \cup \mathbf{ran} A$ допускает транзитивное множество X и функцию $\mu : D$ на X , удовлетворяющую

$$(*) \mu(d) = \{\mu(j) : j A d\}, \text{ для всех } d \in D.$$

Функция μ и множество X определены этим условием однозначно. Функция $\mu = \mu_A$ называется *функцией свёртки* для A .

Напомним, что бинарное отношение A на множестве $D = \mathbf{fld} A$ *фундировано*, если любое непустое $Y \subseteq D$ содержит элемент $y \in Y$, для которого $\forall x \in Y \neg(x A y)$.

Счетность Cntbl: $\forall x \exists f (f : x \rightarrow \omega \text{ 1-1 функция})$, т. е. все множества счетны.

Понятно, что $\mathbf{SST} \subseteq \mathbf{ZF}^- + \mathbf{Cntbl}$.

Об аксиоме **Beta** см. книгу [17], определение VII.3.8 и замечания в конце § VII.3 о её истории. Вывод **Beta** из **Repl** см. например в [9; теорема 6.15].

В данной формулировке, теория **SST** была рассмотрена в заметке [22], под другим названием и с некоторыми незначительными различиями в аксиомах.

Сам Симпсон подошел к аксиоматике, равносильной нашей **SST**, в [17; VII.3.3 и VII.3.8] и ранее в [16], с позиций, связанных с формальными системами в языке арифметики второго порядка и их отражением в теории множеств. Именно, он ввел теорию $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}}$ в \in -языке, содержащую такие аксиомы:

- (a) аксиомы равенства: $=$ есть отношение эквивалентности, а отношение \in является $=$ -инвариантным;
- (b) экстенциональность, бесконечность, регулярность в их обычных **ZF**-формах;
- (c) аксиома рудиментарной замкнутости, которая утверждает, для всех множеств u, v , существование множеств $\mathcal{F}_1(u, v) = \{u, v\}$, $\mathcal{F}_2(u, v) = u \setminus v$, $\mathcal{F}_3(u, v) =$

$u \times v$, $\mathcal{F}_4(u, v) = \bigcup u$, а также множеств:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_5(u, v) &= \in \upharpoonright u = \{\langle x, y \rangle : x, y \in u \wedge x \in y\}, \\ \mathcal{F}_6(u, v) &= u^{-1} = \{\langle x, y \rangle : \langle y, x \rangle \in u\}, \\ \mathcal{F}_7(u, v) &= \{\langle y, \langle x, z \rangle \rangle : \langle y, x \rangle \in v \wedge z \in u\}, \\ \mathcal{F}_8(u, v) &= \{\langle y, \langle z, x \rangle \rangle : \langle y, x \rangle \in v \wedge z \in u\}, \\ \mathcal{F}_9(u, v) &= \{z : \exists x (x \in u \wedge z = v''\{x\})\},\end{aligned}$$

где $v''\{x\} = \text{ran}(v \upharpoonright \{x\})$ — этот список гёделевых операций несколько отличается от принятого, например, в книге [9], см. § 6 ниже;

(d) наконец, аксиомы **TrCov**, **Beta**, **Cntbl** как выше; аксиома **Prod** не нужна ибо замещается операцией \mathcal{F}_3 .

ЛЕММА 1. $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}} \subseteq \mathbf{SST}$, а потому теория **SST** тождественна $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}} + \mathbf{Sep}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множества u, v произвольны. Согласно лемме 5 ниже, имеется множество Y , содержащее u, v и все их элементы, и замкнутое относительно конечных подмножеств — а тогда и относительно упорядоченных пар, троек и т. п. Тогда каждая из операций $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_8$ из (c), примененная к u, v , даёт результат, являющийся частью Y , т. е. множеством согласно **Sep**. Что касается \mathcal{F}_9 , то в наших условиях выполнено $\mathcal{F}_9(u, v) \subseteq \mathcal{P}(Y)$, так что лемма 4(ii) ниже даёт нужный результат при $D = u$ и $F(x) = v''\{x\}$. \square

3. Развитие теории Симпсона

Здесь собрано несколько достаточно простых результатов в теории **SST**. В частности, аксиома **TrCov** и схема **Sep** приносят такой результат:

ЛЕММА 2 (**SST**). Для любого множества X существует его транзитивное замыкание $\text{TC}(X) = \bigcap \{Y \supseteq X : Y \text{ транзитивно}\}$. \square

ЛЕММА 3 (**SST**, ТРАНЗИТИВНАЯ СВЁРТКА). Для любого множества D существуют единственные транзитивное множество X и функция свёртки $\tau : D$ на X , удовлетворяющие $\tau(x) = \{\tau(y) : y \in x \cap D\}$ для всех $x \in D$. \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применим аксиому **Beta** к отношению $A = \in \upharpoonright D$, которое фундировано по аксиоме регулярности. \square

Для краткости, *класс-функцией* назовем любой (определимый) класс, удовлетворяющий обычному определению функции (состоит из упорядоченных пар, и т. д.). В этой терминологии, схема подстановки **Repl** постулирует в **ZF**, что любая класс-функция, область определения которой — множество, сама является множеством (множеством пар). Этой схемы нет в **SST**, но доказывается её важный частный случай: подстановка с транзитивной областью значений.

ЛЕММА 4 (**SST**). Пусть F — класс-функция, определенная на множестве D . Тогда F и образ $R = F''D = \{F(x) : x \in D\}$ — множества в таких двух случаях:

- (i) R — транзитивный класс,
- (ii) существует множество Y , для которого $R \subseteq \mathcal{P}(Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Отношение $A = \{\langle j, d \rangle : j, d \in D \wedge F(j) \in F(d)\}$ является легитимным множеством по аксиомам **Prod** и **Sep**. Далее, A фундировано, как образ класс-отношения $\in \upharpoonright R$, чья фундированность легко следует из аксиомы регулярности. Значит, существуют транзитивное множество X и функция $\mu : D$ на X , удовлетворяющие равенству (*) из определения аксиомы **Beta**. Однако F удовлетворяет тому же равенству по определению отношения A . Отсюда $F = \mu$ и $R = X$ – множества.

(ii) Аксиома **TrCov** позволяет предположить транзитивность множества Y . Также можно предполагать, что $D \cap Y = \emptyset$; иначе положим $D' = D \times \{Y\}$ и соответственно изменим F . В этих предположениях, берем $D_1 = D \cup Y$ и продолжаем F до F_1 идентичным отображением на Y . Тогда образ $F_1 \upharpoonright D_1 = R \cup Y$ – транзитивное множество согласно (i). Наконец, $R \subseteq F_1 \upharpoonright D_1$ – множество по **Sep**. \square

Скажем, что множество S замкнуто относительно конечных подмножеств, если $\forall z \subseteq Y (z \text{ конечно} \implies z \in Y)$, или, короче, $\mathcal{P}_{\text{fin}}(Y) \subseteq Y$. Для любого X , вводится соответствующее замыкание $\text{FSC}(X)$ как наименьшее надмножество $Y \supseteq X$, замкнутое относительно конечных подмножеств (если оно существует).

ЛЕММА 5 (**SST**). Для любого множества X имеется множество $\text{FSC}(X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для случая $X = \omega$, через p_k обозначим k -е простое число, так что $p_1 = 2, p_2 = 3$, и т. д. Согласно **Prod** и **Sep**, $A = \{\langle k, n \rangle : k \geq 1 \wedge p_k \text{ делит } n\}$ – множество. Далее, $\text{fld } A = \omega \setminus \{0\}$, A фундировано (так как $k A n \implies k < n$), и

(†) если $u \subseteq \text{fld } A$ конечно, то имеется $n \in \text{fld } A$, для которого $u = \{k : k A n\}$.

По аксиоме **Beta** существует отображение $\mu : \text{fld } A$ на транзитивное множество R , удовлетворяющее $\mu(n) = \{\mu(k) : k A n\}$, для всех $n \in \text{fld } A$. Понятно, что $R = \text{FSC}(\omega)$ согласно (†).

Теперь общий случай. Предполагаем, по **TrCov**, что X транзитивно. По **Cntbl**, имеется функция $h : \omega$ на X . Она продолжается до класс-функции H , определенной на большем множестве $R = \text{FSC}(\omega)$ через $H \upharpoonright \omega = h$, а если $u \in R \setminus \omega$ то $H(u) = \{H(v) : v \in u\}$. Тогда $\text{ran } H = \text{FSC}(X)$ (класс), и поэтому $\text{ran } H$ транзитивно вместе с X . Однако по лемме 4(i), как H так и $\text{ran } H = \text{FSC}(X)$ – множества. \square

ЛЕММА 6 (**SST**). Для любых множеств U и V , существуют (как множества) $\mathcal{P}_{\text{fin}}(U)$ и $U^{<\omega}$, а также и $U \times V$ прямо по аксиоме **Prod**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $X = U \cup V = \bigcup \{U, V\}$ – множество даже в \mathbf{Z}^- , так что и $\text{FSC}(X)$ – множество по лемме 5. Далее, понятно, что $\mathcal{P}_{\text{fin}}(U), U^{<\omega} \subseteq \text{FSC}(U)$. Теперь результат следует из **Sep**. \square

Таким образом, **SST** доказывает существование указанных множеств. Заметим, что \mathbf{Z}^- недостаточно сильна даже для вывода существования $\omega \times \omega$!

ЛЕММА 7 (**SST**). Пусть E – строгое полное упорядочение множества U . Найдется ординал λ и порядковый изоморфизм $\langle U; E \rangle$ на $\langle \lambda; \in \rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В частности, E – фундированное отношение на U . Аксиома **Beta** дает транзитивное множество $\lambda = X$, вполне упорядоченное отношением \in , т. е. ординал – и порядково изоморфное данному $\langle U; E \rangle$. \square

СЛЕДСТВИЕ 1 (**SST**). Если α, β – ординалы, то существуют (как множества) ординалы $\alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha^\beta$. (В смысле стандартной арифметики ординалов.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно определить вполне упорядоченные множества, представляющие указанные порядковые числа. Декартово произведение $\alpha \times \beta$ (множество по лемме 6), упорядоченное лексикографически, представляет $\alpha \cdot \beta$. Экспонента же α^β представлена множеством

$$W = \{f : D \rightarrow \alpha \setminus \{0\} : D \subseteq \beta \text{ конечно}\}$$

с лексикографическим порядком, понимаемым в том смысле, что каждая $f \in D$ продолжена через $f(\xi) = 0$ для всех $\xi \in \beta \setminus D$. Заметим, что $W \subseteq \text{FSC}(\beta \times \alpha)$ – множество согласно лемме 5. \square

4. Метаматематика теории множеств Симпсона

Выбор аксиом **SST** выглядит достаточно случайным и мало обоснованным сверх чисто технической необходимости в тех или иных доказательствах. Целью этого раздела будет обосновать, что это не совсем так, и что на самом деле **SST** можно считать своего рода теоретико-множественным «когнатом» арифметики второго порядка \mathbf{Z}_2 (напомним: без аксиомы выбора). Главные результаты здесь таковы.

- 1°. Теория **SST** есть консервативное расширение \mathbf{Z}_2 в том смысле, что предложение P языка \mathbf{Z}_2 является теоремой \mathbf{Z}_2 в том и только в том случае, когда релятивизация $(P)^{\mathcal{P}(\omega)}$ является теоремой **SST**.
- 2°. Существует каноническая интерпретация \mathbb{V} теории **SST** в \mathbf{Z}_2 (определение 3), такая, что структура $(\langle \omega; \mathcal{P}(\omega) \rangle)^{\mathbb{V}}$ интерпретации изоморфна данному универсуму теории \mathbf{Z}_2 .
- 3°. И обратно, в универсуме **SST**, интерпретация $(\mathbb{V})^{\langle \omega; \mathcal{P}(\omega) \rangle}$, определенная в структуре $\langle \omega; \mathcal{P}(\omega) \rangle$, изоморфна данному универсуму теории **SST**.
- 4°. Результаты 2° и 3° суммируются так: интерпретация \mathbb{V} теории **SST** в \mathbf{Z}_2 и тривиальная интерпретация $\langle \omega; \mathcal{P}(\omega) \rangle$ теории \mathbf{Z}_2 в **SST** взаимно обратны.

Эти результаты можно извлечь из выкладок в [17; VII.3], но они известны фактически с 1960х годов. Для их вывода, рассматривается совокупность WFT всех непустых фундированных деревьев $T \subseteq \text{SEQ} = \omega^{<\omega}$. Напомним, что

- $\text{SEQ} = \omega^{<\omega}$ = все кортежи натуральных чисел;
- $\langle \rangle \in \text{SEQ}$ – пустой кортеж, $\langle k \rangle$ кортеж с k как единственным членом;
- $s \hat{\ } j$ получается присоединением члена $j \in \omega$ к кортежу $s \in \text{SEQ}$ справа, а если $s, t \in \text{SEQ}$, то $s \hat{\ } t \in \text{SEQ}$ обозначает *конкатенацию*;
- $T \subseteq \text{SEQ}$ – *дерево*, если $s \hat{\ } j \in T \implies s \in T$;
- $\text{Max}(T) = \{s \in T : \neg \exists j < \omega (s \hat{\ } j \in T)\}$ – *концевые вершины* дерева T ;
- дерево $T \subseteq \text{SEQ}$ *фундировано*, $T \in \text{WFT}$, если $\neg \exists g : \omega \rightarrow \omega \forall m (g \upharpoonright m \in T)$;
- если T – дерево и $s \in T$ то $T^s = \{t \in \text{SEQ} : s \hat{\ } t \in T\}$ – также дерево, и если T фундировано то и T^s фундировано.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 (**SST**). Пусть $T \in \text{WFT}$. Существует единственная функция set_T , определенная на T и удовлетворяющая $\text{set}_T(u) = \{\text{set}_T(u \hat{\ } j) : u \hat{\ } j \in T\}$ для всех $u \in T$, в частности, $\text{set}_T(u) = \emptyset$ для $u \in \text{Max}(T)$. Положим $\text{Set}_T = \text{set}_T(\langle \rangle)$. \square

Определенным недостатком арифметики второго порядка \mathbf{Z}_2 и ее вариантов является то, что кортежи натуральных чисел, деревья, функции $\text{SEQ} \rightarrow \text{SEQ}$ и т. п.

объекты формально не входят в область изучения. Это можно поправить подходящей кодировкой. См. об этом в книге [17], гл. I, и особенно § II.2 с рядом примеров.

В частности, для кодировки кортежей, положим $s_0 = \langle \rangle$ (пустой кортеж), и если $n = 2^m(2j + 1) - 1 \geq 1$ то $s_n = s_m \hat{\ } j$. Тогда $\text{SEQ} = \{s_n : n < \omega\}$, и $n \mapsto s_n$ является биекцией. Соответственно, число $n = n(s)$ служит кодом кортежа $s = s_n \in \text{SEQ}$, а каждое множество $x \subseteq \omega$ служит кодом множества кортежей $\{s_n : n \in x\} \subseteq \text{SEQ}$. Следуя Симпсону [17; § II.2], это позволяет нам свободно рассматривать кортежи и их множества, оставаясь в рамках теории \mathbf{Z}_2 . Это относится и к множествам $X \subseteq \omega \times \omega$, $H \subseteq \text{SEQ} \times \text{SEQ}$, и им подобным.

С этой оговоркой, мы можем рассматривать в \mathbf{Z}_2 кортежи и деревья, дать адекватное \mathbf{Z}_2 -определение фундированности, и даже определить, для данных $S, T \in \text{WFT}$, верны ли соотношения $\mathbf{Set}_S = \mathbf{Set}_T$ и $\mathbf{Set}_S \in \mathbf{Set}_T$, не определяя самих множеств $\mathbf{Set}_S, \mathbf{Set}_T$. Дается следующее определение в \mathbf{Z}_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 ([4; 7.8] или [17; VII.3.13]). Пусть $S, T \in \text{WFT}$. Множество $H \subseteq S \times T$ называется S, T -бисимуляцией, когда, для всех $s \in S$ и $t \in T$, выполнено:

$$s H t \iff \begin{cases} \forall s' = s \hat{\ } j \in S \exists t' = t \hat{\ } k \in T (s' H t') \wedge \\ \wedge \forall t' = t \hat{\ } k \in T \exists s' = s \hat{\ } j \in S (s' H t'). \end{cases}$$

Положим $S =^* T$, если существует S, T -бисимуляция H , для которой $\langle \rangle H \langle \rangle$.

Положим $S \in^* T$, когда $S =^* T^{(k)}$ для какого-то $k \in \omega$. \square

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Структура $\mathbb{V} = \langle \text{WFT}; =^*, \in^* \rangle$ рассматривается в \mathbf{Z}_2 .

\mathbb{V} -интерпретация $[\Phi]^\mathbb{V}$ любой \in -формулы Φ (с параметрами из WFT) естественно понимается через интерпретацию $=, \in$ как $=^*, \in^*$, и релятивизацию всех кванторов к WFT . Так например $[x = y]^\mathbb{V}$ есть $x =^* y$. \square

УПРАЖНЕНИЕ 1 (SST). Пусть $S, T \in \text{WFT}$. Докажите, что $\mathbf{Set}_S = \mathbf{Set}_T$, если и только если $S =^* T$ истинно в \mathbf{Z}_2 -структуре $\langle \omega; \mathcal{P}(\omega) \rangle$. То же для \in и \in^* . \square

Отношение бисимуляции $=^*$ между деревьями из WFT , и соответственно производное отношение \in^* , естественно формализуются в \mathbf{Z}_2 при помощи изложенной выше кодировки. Отсюда следует, что \mathbb{V} -интерпретация $[\Phi]^\mathbb{V}$ любой \in -формулы Φ с параметрами из WFT является формулой языка \mathbf{Z}_2 .

ТЕОРЕМА 2 (\mathbf{Z}_2).

- (i) \mathbb{V} – правильно определенная структура, т. е. $=^*$ – отношение эквивалентности на WFT , а бинарное отношение \in^* на WFT $=^*$ -инвариантно.
- (ii) \mathbb{V} удовлетворяет **SST**: если Φ – аксиома **SST**, то $[\Phi]^\mathbb{V}$ – теорема \mathbf{Z}_2 .
- (iii) Имеется канонический изоморфизм между подструктурой $\langle \omega; \mathcal{P}(\omega) \rangle^\mathbb{V}$ интерпретации и собственной структурой $\langle \omega; \mathcal{P}(\omega) \rangle$ универсума \mathbf{Z}_2 .

Результаты, близкие к разным частям этой теоремы, были известны уже Крайзелю [14], а также из статей [1], [19], [15; теорема 1.1 и следствие 1.1], и др.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (НАБРОСОК). Помимо источников выше, теорема фактически доказана в [17; § VII.3]. Именно, используя лишь подтеорию $\mathbf{ATR}_0 \subseteq \mathbf{Z}_2$ в роли базовой теории арифметики второго порядка, вместо самой \mathbf{Z}_2 , лемма VII.3.20 в [17] доказывает, что если Φ – аксиома $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}}$, то $[\Phi]^\mathbb{V}$ – теорема \mathbf{ATR}_0 (и тогда также теорема \mathbf{Z}_2). Таким образом, для вывода (ii) достаточно проверить **Sep** в \mathbb{V} .

Рассуждая в \mathbf{Z}_2 , пусть $S \in \text{WFT}$, $X = \{k : \langle k \rangle \in S\}$, а $\Phi(x)$ является \in -формулой с параметрами из WFT и с x как единственной свободной переменной. По определению, деревья вида $S^k = \{t \in \text{SEQ} : k \hat{\wedge} t \in S\}$, $k \in X$, принадлежат \mathbb{V} и исчерпывают (с точностью до $=^*$) все \in^* -элементы S в \mathbb{V} . Используя схему свёртки из \mathbf{Z}_2 , положим $Y = \{k \in X : [\Phi(S^{\langle k \rangle})]^\vee\}$. Множество $T = \{\langle \rangle\} \cup \{t \in S : t(0) \in X\}$ – дерево из WFT . Остается проверить $[T = \{x \in S : \Phi(x)\}]^\vee$.

Допустим, что $C \in \text{WFT}$, $C \in^* S$, и выполнено $[\Phi(C)]^\vee$. Тогда $C =^* S^{\langle k \rangle}$ для какого-то $k \in X$, так что выполнено $[\Phi(S^{\langle k \rangle})]^\vee$, и тогда $k \in Y$. Отсюда имеем $C =^* T^{\langle k \rangle} = S^{\langle k \rangle} \in^* T$. Доказательство обратной импликации аналогично. \square

СЛЕДСТВИЕ 2 (из **ТЕОРЕМЫ 2**). *Утверждения 1^o, 2^o, 3^o выше справедливы. Значит, теории \mathbf{Z}_2 , \mathbf{Z}^- , **SST** взаимно интерпретируемы и, следовательно, равнонепротиворечивы.* \square

УПРАЖНЕНИЕ 2. Мы опустили ряд деталей доказательства теоремы 2 и следствия 2, поскольку эти результаты не связаны с доказательством главной теоремы 1 настоящей статьи. Однако хорошим упражнением для читателя будет восстановить полное доказательство, следуя выкладкам в цитированных публикациях [1, 14, 15, 17, 19], а также провести вывод 1^o, 2^o, 3^o из теоремы. \square

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Пусть \mathbf{AC}_ω – счетная аксиома выбора в \mathbf{Z}_2 , и $\mathbf{Z}_2^+ := \mathbf{Z}_2 + \mathbf{AC}_\omega$. Заменив \mathbf{Z}_2 на \mathbf{Z}_2^+ в теореме, пункт (ii) примет вид:

если Φ – аксиома \mathbf{ZFC}^- , то $[\Phi]^\vee$ – теорема \mathbf{Z}_2^+ .

Этот вариант даже более известен и лучше отражен в литературе, см. [15]. \square

5. Конструктивные множества в теории Симпсона

Здесь приведены ключевые определения и некоторые важные результаты из теории конструктивности в изложении [17; § VII.4]. Симпсон получает эти результаты в теории $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}}$ и в некоторых ее расширениях внутри **SST** полученных добавлением определенных подсхем схемы **Sep**. Тем более эти результаты верны в самой нашей базовой теории множеств **SST**.

Также отметим, что в настоящей работе рассматривается только частный случай $\mathbf{L} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathbf{L}_\alpha$ более общего определения *относительной* конструктивности $\mathbf{L}[u] = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathbf{L}_\alpha[u]$ в [17] – для значения $u = \emptyset$. Поэтому все данные ниже формулировки определений и результатов из [17; гл. VII] сведены именно к этому случаю.

ЛЕММА 8 (**SST**, [17], **ЛЕММА VII.4.1**). *Пусть X – транзитивное множество. Существует (единственное) множество $\mathbf{Def} X$, состоящее из всех множеств $Y \subseteq X$, определенных над $X \in$ -формулой с параметрами из X .*

Это множество $\mathbf{Def} X$ транзитивно и удовлетворяет $X \cup \{X\} \subseteq \mathbf{Def} X$. \square

Доказательство леммы 8 в [17] состоит в выводе существования функции оценки для всех \in -формул с параметрами из данного транзитивного множества X . Другой подход к определению $\mathbf{Def} X$ (он, как и первый, принадлежит Гёделю) связан с тем, что \in -определимость элиминируется через гёделевы операции, см. лемма 11 ниже.

Далее, лемма 8 даёт следующий результат:

ЛЕММА 9 (**SST**, [17], VII.4.2). Пусть $\beta \in \text{Ord}$. Имеется единственная функция $f = \mathbb{f}_\beta$, для которой $\text{dom } f = \beta$, $f(0) = \emptyset$, $f(\alpha + 1) = \mathbf{Def } f(\alpha)$ при $\alpha + 1 < \beta$, и $f(\lambda) = \bigcup_{\alpha < \lambda} f(\alpha)$ для предельных $\lambda < \beta$. \square

Функция \mathbb{f}_β называется *конструирующей функцией высоты* β .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4 (**SST**). Положим $\mathbf{L}_\alpha = \mathbb{f}_{\alpha+1}(\alpha)$ для всех $\alpha \in \text{Ord}$. \square

Таким образом, теория **SST** (фактически, даже $\mathbf{ATR}_0^{\text{set}}$) достаточно сильна для построения стандартной конструктивной иерархии:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_0 &= \emptyset, \\ \mathbf{L}_{\alpha+1} &= \mathbf{Def } \mathbf{L}_\alpha \text{ для всех } \alpha, \\ \mathbf{L}_\lambda &= \bigcup_{\alpha < \lambda} \mathbf{L}_\alpha \text{ для всех предельных } \lambda, \\ \mathbf{L} &= \bigcup_{\alpha \in \text{Ord}} \mathbf{L}_\alpha = \text{все конструктивные множества.} \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3 (**SST**). Выполнено следующее:

- (i) каждое \mathbf{L}_α – транзитивное множество, и $\alpha \subseteq \mathbf{L}_\alpha$;
- (ii) если $\alpha < \beta$ то $\mathbf{L}_\alpha \in \mathbf{L}_\beta$ и $\mathbf{L}_\alpha \subseteq \mathbf{L}_\beta$;
- (iii) если λ предельно то \mathbf{L}_λ замкнуто относительно операций (c) в разделе 2;
- (iv) если $\beta \in \text{Ord}$ то $\mathbb{f}_\beta \in \mathbf{L}_{\alpha+3}$;
- (v) класс-функция $\alpha \mapsto \mathbf{L}_\alpha$ ($\alpha \in \text{Ord}$) определима над \mathbf{L} без параметров;
- (vi) существует полное упорядочение $<_{\mathbf{L}}$ класса \mathbf{L} , определяемое над \mathbf{L} без параметров;
- (vii) в классе \mathbf{L} верны все аксиомы **SST** кроме, возможно, **Sep** и **Cntbl**.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. [17], теорема VII.4.3, об (i), (ii), (iii). Относительно (iv) и (v), см. теорему VII.4.8 и её доказательство в [17], или к примеру лемму 4.1 в [2; §B.5] или доказательство леммы 2.6(ii) в [5]. Относительно (vi) см. лемму VII.4.21 в [17]. Результат (vii) см. [17; следствие VII.4.15]. Наиболее сложная здесь проверка аксиомы **Beta** в \mathbf{L} (теорема VII.4.12 там же) основана на лемме VII.4.10, согласно которой если $A \in \mathbf{L}$ – фундированное отношение, то его функция свёртки μ_A (см. определение аксиомы **Beta** в §2 выше) также принадлежит \mathbf{L} . \square

Схема **Sep** в \mathbf{L} будет доказана ниже в §7. С другой стороны, для схем **Repl/Coll** и аксиомы **Cntbl** имеется такой контрпример.

ПРИМЕР 1 (VII.4.17 в [17]). Рассуждая в **ZF**, положим $\mathfrak{M} = \mathbf{L}_\vartheta$, где $\vartheta = (\aleph_\omega)^{\mathbf{L}}$. Рассмотрим генерическое расширение \mathfrak{N} модели \mathfrak{M} генерической последовательностью функций $f_n : \omega \text{ onto } (\aleph_n)^{\mathbf{L}}$. Тогда \mathfrak{N} – модель **SST**, и в то же время $(\mathbf{L})^{\mathfrak{N}} = \mathfrak{M}$, но схемы **Repl/Coll** и аксиома **Cntbl** определённо нарушены в $\mathfrak{M} = \mathbf{L}_\vartheta$. \square

6. Конструктивность и гёделевы операции

В этом разделе мы доказываем следующую теорему, ключевой результат к доказательству теоремы 1 ниже в §7.

ТЕОРЕМА 4. Существует замкнутая беспараметрическая \in -формула σ такая, что **SST** доказывает следующее:

- (i) в \mathbf{L} истинна σ ;
(ii) если \mathbf{K} транзитивно и $\mathbf{K} \models \sigma$, то $\mathbf{K} = \mathbf{L}_\lambda$, где $\lambda = \mathbf{K} \cap \text{Ord}$.

Похожий результат впервые получен, вероятно, в [3]. Также похожий результат отмечен в книге [9], (13.13) перед леммой 13.17 в главе 13.

Мы начинаем доказательство теоремы со списка гёделевых операций по [9; гл. 13].

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_1(u, v) &= \{u, v\}, \\
\mathcal{G}_2(u, v) &= u \times v, \\
\mathcal{G}_3(u, v) &= \in \upharpoonright u = \{\langle x, y \rangle : x, y \in u \wedge x \in y\}, \\
\mathcal{G}_4(u, v) &= u \setminus v, \\
\mathcal{G}_5(u, v) &= u \cap v \quad - \text{ сводится к } \mathcal{G}_4, \text{ так как } u \cap v = u \setminus (u \setminus v), \\
\mathcal{G}_6(u, v) &= \bigcup u, \\
\mathcal{G}_7(u, v) &= \text{dom } u = \{x : \exists y (\langle x, y \rangle \in u)\}, \\
\mathcal{G}_8(u, v) &= u^{-1} = \{\langle x, y \rangle : \langle y, x \rangle \in u\}, \\
\mathcal{G}_9(u, v) &= \{\langle x, y, z \rangle : \langle x, z, y \rangle \in u\}, \\
\mathcal{G}_{10}(u, v) &= \{\langle x, y, z \rangle : \langle y, z, x \rangle \in u\}.
\end{aligned}$$

Их можно сравнить с рудиментарными операциями Симпсона $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_9$ в §2. В частности операции $\mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_6$ тождественны соответственно операциям $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_4, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_6, \mathcal{G}_3, \mathcal{G}_8$. Имеются определенные соответствия и среди остальных операций.

ЛЕММА 10 (SST). *Если u, v – множества, и $i = 1, 2, \dots, 10$, то $\mathcal{G}_i(u, v)$ – также множество.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для \mathcal{G}_1 – аксиома пары, для \mathcal{G}_2 – лемма 6, для \mathcal{G}_3 – та же лемма (для $u \times u$) и схема выделения, для $\mathcal{G}_{4,5}$ – опять схема выделения, для \mathcal{G}_6 – лемма 2 и схема выделения (поскольку $\bigcup u \subseteq \text{TC}(u)$). Для операций $\mathcal{F}_7 - \mathcal{F}_{10}$, имеем $\mathcal{G}_i(u, v) \subseteq \text{FSC}(\text{TC}(u))$, и результат дается леммами 2, 5 и схемой **Sep**. \square

Важное приложение гёделевых операций к теории конструктивности состоит в возможности элиминировать определение **Def** посредством следующей леммы, доказательство которой (исходно – в **ZF**) легко формализуется в **SST**.

ЛЕММА 11 (СЛЕДСТВИЕ 13.8 в [9]). *Если множество X транзитивно, то $\text{Def } X = \text{Def}^* X$, где $\text{Def}^* X = \text{cl}(X \cup \{X\}) \cap \mathcal{P}(X)$, а через $\text{cl}(Y)$ обозначено замыкание множества Y относительно операций $\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_{10}$.* \square

Также существенную роль играют вопросы абсолютности в связи с гёделевыми операциями, которые мы изложим по книге [21; §11]. Пусть \mathbf{K} – транзитивное множество или класс. Рассматриваются такие требования (A)–(G) к \mathbf{K} , из которых выводятся полезные свойства абсолютности (лемма 12 ниже).

- (A) Класс \mathbf{K} замкнут относительно операций \mathcal{G}_i , $i = 1, \dots, 10$.
(B) Класс \mathbf{K} замкнут относительно операций $\mathcal{G}_i''(X) := \{\mathcal{G}_i(u, v) : u, v \in X\}$, $i = 1, \dots, 10$, и операции $\mathcal{G}^*(X) = \bigcup_{1 \leq i \leq 10} \mathcal{G}_i'' X$.
(C) $\omega \in \mathbf{K}$.

Для дальнейшего напомним, что функция гёделева замыкания gcl_X множества X вводится так: $\text{dom}(\text{gcl}_X) = \omega$, $\text{gcl}_X(0) = X$, и

$$\mathbf{gcl}_X(n+1) = \mathcal{G}^*(\mathbf{gcl}_X(n)) = \bigcup_{1 \leq i \leq 10} \{\mathcal{G}_i(u, v) : u, v \in \mathbf{gcl}_X(n)\}.$$

Понятно, что $\mathbf{Def}^* X = \bigcup_n \mathbf{gcl}_X(n)$.

(D) Если $X \in \mathbf{K}$, то функция замыкания \mathbf{gcl}_X принадлежит \mathbf{K} .

(E) Если $X \in \mathbf{K}$, то $\mathbf{Def}^* X \in \mathbf{K}$.

В дополнение к понятию конструирующей последовательности \mathbb{f}_β длины β (см. лемму 9), назовем *модифицированной конструирующей последовательностью* (сокращенно МКП) длины $\beta \in \text{Ord}$ функцию \mathbb{f}_β^* , для которой $\text{dom}(\mathbb{f}_\beta^*) = \beta$, $\mathbb{f}_\beta^*(0) = \emptyset$, $\mathbb{f}_\beta^*(\lambda) = \bigcap_{\alpha < \lambda} \mathbb{f}_\beta^*(\alpha)$ для предельных $\lambda < \beta$, и если $\alpha + 1 < \beta$ то

$$\mathbb{f}_\beta^*(\alpha + 1) = \mathbf{Def}^*(\mathbb{f}_\beta^*(\alpha)).$$

Соответственно, положим $\mathbf{L}_\alpha^* = \mathbb{f}_{\alpha+1}^*(\alpha)$. Тогда $\mathbb{f}_\beta^* = \mathbb{f}_\beta$ и $\mathbf{L}_\alpha^* = \mathbf{L}_\alpha$ в \mathbf{SST} по лемме 11, но мы не утверждаем, что эти равенства сохраняются при релятивизации к произвольному транзитивному множеству. И последние два свойства:

(F) Если $\alpha \in \text{Ord} \cap \mathbf{K}$, то $\mathbb{f}_{\alpha+1}^* \in \mathbf{K}$.

(G) Если $x \in \mathbf{K}$ то $\exists \alpha \in \text{Ord} \cap \mathbf{K} (x \in \mathbf{L}_\alpha^*)$.

ЛЕММА 12 ([21], § 11). Пусть \mathbf{K} – транзитивное множество или класс;

- (1) формулы $x = \mathcal{G}_i(u, v)$, $1 \leq i \leq 10$, абсолютны для \mathbf{K} ;
- (2) если выполнено (A), то формулы $Y = \mathcal{G}_i''(X)$, $1 \leq i \leq 10$, и $Y = \mathcal{G}^*(X)$ абсолютны для \mathbf{K} ;
- (3) если выполнены (A), (B), (C), то формула $C = \mathbf{gcl}_X$ абсолютна для \mathbf{K} ;
- (4) если выполнены (A), (B), (C), (D), то формула $Y = \mathbf{Def}^* X$ абсолютна для \mathbf{K} ;
- (5) если выполнены (A)–(E), то формула $f = \mathbb{f}_{\alpha+1}^*$ абсолютна для \mathbf{K} ,
- (6) если выполнены (A)–(F), то формулы $X = \mathbf{L}_\alpha^*$, $x \in \mathbf{L}_\alpha^*$ абсолютны для \mathbf{K} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. См. элементарные выкладки в [21; § 11]. В частности, (1) следует из того, что указанные равенства выражаются ограниченными \in -формулами, а потому абсолютны для любых транзитивных областей (множеств или классов). Для доказательства (2) заметим, что равенство $Y = \mathcal{G}_i''(X)$ выражается формулой

$$\forall y \in Y \exists u, v \in X (y = \mathcal{G}_i(u, v)) \wedge \forall u, v \in X \exists y \in Y (y = \mathcal{G}_i(u, v)),$$

так что абсолютность следует из предположения (A) и уже доказанного (1).

И так далее. □

ЛЕММА 13 (\mathbf{SST}). Класс \mathbf{L} удовлетворяет требованиям (A)–(G). Другими словами, $\omega \in \mathbf{L}$, и все соответствующие функции, т. е.

$$\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_i'', \mathcal{G}^*, X \mapsto \mathbf{gcl}_X, X \mapsto \mathbf{Def}^* X, \beta \mapsto \mathbb{f}_\beta^*, \alpha \mapsto \mathbf{L}_\alpha^*,$$

а также $x \mapsto \alpha_x :=$ наименьший ординал α , для которого $x \in \mathbf{L}_\alpha^*$,

принимают значения в \mathbf{L} на аргументах из \mathbf{L} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Это также известный результат из основ теории конструктивности. Мы поэтому дадим лишь наброски доказательств.

Для (A) действует непосредственная проверка. Например, для \mathcal{G}_6 , пусть $u, v \in \mathbf{L}_\alpha$. Тогда $\mathcal{G}_6(u, v) = \bigcup u \subseteq \mathbf{L}_\alpha$ по транзитивности \mathbf{L}_α , откуда

$$\bigcup u = \{z \in \mathbf{L}_\alpha : \mathbf{L}_\alpha \models \exists y \in u (z \in y)\} \in \mathbf{DefL}_\alpha = \mathbf{L}_{\alpha+1} \subseteq \mathbf{L}.$$

Для $\mathcal{G}_8(u, v) = u^{-1}$, если $\langle x, y \rangle \in u \in \mathbf{L}_\alpha$, то $x, y \in \mathbf{L}_\alpha$ по транзитивности, и тогда множества $\{y\}$ и $\{y, x\}$ принадлежат $\mathbf{L}_{\alpha+1}$, $\langle y, x \rangle = \{\{y\}, \{y, x\}\} \in \mathbf{L}_{\alpha+2}$, и наконец $u^{-1} \in \mathbf{L}_{\alpha+3}$. Остальные операции \mathcal{G}_i рассматриваются аналогично этим двум.

В сущности, если $u, v \in X \in \mathbf{L}_\alpha$ и $i \leq 10$, то заведомо $\mathcal{G}_i(u, v) \in \mathbf{L}_{\alpha+5}$, и тогда $\mathcal{G}_i''(X)$ и $\mathcal{G}^*(X)$ принадлежат $\mathbf{L}_{\alpha+6}$, откуда следует (B).

Далее, $\omega = \{k \in \mathbf{L}_\omega : k \text{ — ординал}\} \in \mathbf{L}_{\omega+1}$, откуда имеем (C).

Для доказательства (D), т. е. $\mathbf{gcl}_X \in \mathbf{L}$ при $X \in \mathbf{L}$, пусть $X \in \mathbf{L}_\alpha$; тогда и $X \subseteq \mathbf{L}_\alpha$ по транзитивности \mathbf{L}_α . Тогда $\mathbf{gcl}_X(1) = \mathcal{G}^*(X) \in \mathbf{L}_{\alpha+6}$, см. выше. Отсюда по индукции $\mathbf{gcl}_X(n) \in \mathbf{L}_{\alpha+6n}$ для всех n , в частности, $\mathbf{gcl}_X(n) \in \mathbf{L}_{\alpha+\omega}$, $\forall n$. При этом равенство $Y = \mathcal{G}^*(X)$ абсолютно для $\mathbf{L}_{\alpha+\omega}$ по лемме 12. Отсюда следует, что функция \mathbf{gcl}_X как множество пар включена в $\mathbf{L}_{\alpha+\omega}$ и \in -определима в $\mathbf{L}_{\alpha+\omega}$. Следовательно, $\mathbf{gcl}_X \in \mathbf{L}_{\alpha+\omega+1}$, что и требовалось.

И так далее, следуя практике работы с конструктивной иерархией в **ZF**. \square

СЛЕДСТВИЕ 3 (SST). $\forall \exists$ -замыкания формул леммы 12, т. е. предложения

$$\begin{aligned} \forall u, v \exists x (x = \mathcal{G}_i(u, v)), & \quad \forall X \exists Y (Y = \mathcal{G}_i''(X)), & \quad \forall X \exists Y (Y = \mathcal{G}^*(X)), \\ \forall X \exists C (C = \mathbf{gcl}_X), & \quad \forall X \exists Y (Y = \mathbf{Def}^* X), & \quad \forall \alpha \in \text{Ord} \exists f (f = \mathbb{f}_{\alpha+1}^*), \\ \forall \alpha \in \text{Ord} \exists X (X = \mathbf{L}_\alpha^*), & \quad \forall x \exists \alpha \in \text{Ord} (x \in \mathbf{L}_\alpha^*) \end{aligned}$$

все истинны в \mathbf{L} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Например, для первой формулы, пусть $u, v \in \mathbf{L}$. Тогда $x = \mathcal{G}_i(u, v) \in \mathbf{L}$ по лемме 13. Но формула $x = \mathcal{G}_i(u, v)$ абсолютна для \mathbf{L} по лемме 12. Следовательно, предложение $x = \mathcal{G}_i(u, v)$ истинно в \mathbf{L} .

Рассмотрим вторую формулу. Пусть $X \in \mathbf{L}$. Тогда $Y = \mathcal{G}_i''(X) \in \mathbf{L}$ по лемме 13. Но формула $Y = \mathcal{G}_i''(X)$ абсолютна для \mathbf{L} по лемме 12. Следовательно, предложение $Y = \mathcal{G}_i''(X)$ истинно в \mathbf{L} .

И так далее, для всех формул из списка. \square

ЛЕММА 14 (SST). Пусть \mathbf{K} — транзитивное множество, в котором истинны все 8 формул следствия 3, и $\omega \in \mathbf{K}$. Тогда $\mathbf{K} = \mathbf{L}_\lambda$, где $\lambda = \text{Ord} \cap \mathbf{K}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Коль скоро $\mathbf{K} \models \forall u, v \exists x (x = \mathcal{G}_i(u, v))$, а формула $x = \mathcal{G}_i(u, v)$ абсолютна для \mathbf{K} по лемме 12(1), мы сразу имеем (A) для \mathbf{K} .

Аналогично, раз формулы $\forall X \exists Y (Y = \mathcal{G}_i''(X))$ и $\forall X \exists Y (Y = \mathcal{G}^*(X))$ истинны в \mathbf{K} , а формулы $Y = \mathcal{G}_i''(X)$ и $Y = \mathcal{G}^*(X)$ абсолютны для \mathbf{K} по лемме 12(2) (коль скоро (A) уже установлено), то мы имеем и (B) для \mathbf{K} .

Далее, (C), т. е. $\omega \in \mathbf{K}$, имеет место по условию.

Проверим (D): $\mathbf{gcl}_X \in \mathbf{K}$ при условии, что $X \in \mathbf{K}$. Коль скоро формула $\forall X \exists C (C = \mathbf{gcl}_X)$ следствия 3 истинна в \mathbf{K} , найдется множество $C \in \mathbf{K}$, для которого $\mathbf{K} \models C = \mathbf{gcl}_X$. Однако формула $C = \mathbf{gcl}_X$ абсолютна для \mathbf{K} по лемме 12 (поскольку (A), (B), (C) уже установлены). Таким образом, и на самом деле $C = \mathbf{gcl}_X$, и в результате имеем $C = \mathbf{gcl}_X \in \mathbf{K}$, что и требовалось.

Продолжая так один пункт за другим, мы проверяем все требования (A)–(G) для данного множества \mathbf{K} , опираясь на лемму 12 на каждом шаге. Последнее требование (G) влечет $\mathbf{K} = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord} \cap \mathbf{K}} \mathbf{L}_\alpha^* = \bigcup_{\alpha \in \text{Ord} \cap \mathbf{K}} \mathbf{L}_\alpha = \mathbf{L}_\lambda$, где $\lambda = \text{Ord} \cap \mathbf{K}$ — наименьший ординал, не принадлежащий (транзитивному) множеству \mathbf{K} . \square

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ТЕОРЕМА 4). Определим искомую формулу как конъюнкцию всех восьми формул следствия 3 и формулы $\exists x (x = \omega)$. Следствие 3 и лемма 14 доказывают теорему. \square

7. Схема выделения в конструктивном универсуме теории Симпсона

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (ТЕОРЕМА 1). Мы рассуждаем в SST. Благодаря утверждению (vii) теоремы 3, достаточно проверить, что схема аксиом выделения Sep выполнена в \mathbf{L} , а также в \mathbf{L} верны предложения (I) и (II) теоремы 1.

Пусть напротив, схема Sep нарушена в \mathbf{L} , т.е. существуют: транзитивное множество $B \in \mathbf{L}$, скажем, $B = \mathbf{L}_\alpha$ для какого-то α , и формула $\varphi(p, x)$ с параметром $p \in \mathbf{L}$, для которых множество $Y = \{b \in B : \varphi^{\mathbf{L}}(p, b)\}$ не принадлежит \mathbf{L} . (Y – множество в базовом универсуме SST, так как эта теория включает Sep.) Используя полное упорядочение $<_{\mathbf{L}}$ теоремы 3(vi), берем $<_{\mathbf{L}}$ -наименьшую пару множеств $B, p \in \mathbf{L}$ с указанными свойствами. Этим общий случай сводится к следующему:

- (I) $\varphi(\cdot)$ – беспараметрическая формула, не содержащая \forall (заменено на $\neg \exists \neg$), и выполнено равенство $(\ddagger) Y = \{b \in B : \varphi^{\mathbf{L}}(b)\} \notin \mathbf{L}$.

Вместе с φ , также рассматривается:

- (II) формула σ теоремы 4, аналогично записанная без \forall .

Если $\exists y \psi(y, x_1, \dots, x_k)$ – экзистенциальная подформула одной из формул φ, σ , и $x_1, \dots, x_k \in \mathbf{L}$, то положим $S_\psi(x_1, \dots, x_k)$ равным $<_{\mathbf{L}}$ -наименьшему элементу $y \in \mathbf{L}$, для которого $\psi^{\mathbf{L}}(y, x_1, \dots, x_k)$ – если такие y есть, а иначе $S_\psi(x_1, \dots, x_k) = \emptyset$. Таким образом, каждая $S_\psi : \mathbf{L}^k \rightarrow \mathbf{L}$ является *скулемовской класс-функцией*, определяемой над \mathbf{L} без параметров, где $k = k(j) < \omega$ – арность. Добавим к списку функций S_ψ также функцию $S(x) = x$, и пусть h_0, \dots, h_n – этот полный список класс-функций. Каждая h_j – класс-функция, определенная над \mathbf{L} без параметров.

Следующий шаг состоит в использовании процедуры *гёделева коллапса*. В рамках аксиоматики ZFC он состоит в выборе элементарной подмодели $\mathfrak{M} \subseteq M$ заданной мощности κ в заданном транзитивном множестве например вида $M = \mathbf{L}_\Omega$, где $\Omega > \kappa$ – определенный кардинал, и затем в транзитивной свёртке множества \mathfrak{M} по лемме 3. Однако в SST существование кардиналов над ω недоказуемо, и поэтому гёделеву процедуру следует адаптировать. Именно, 1) мы берем весь класс \mathbf{L} в роли начальной структуры M , 2) $\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{L}$ строится как элементарная подмодель \mathbf{L} относительно некоторого *конечного* числа формул – и случай когда \mathfrak{M} – собственный класс, не исключается, и 3) рассматриваем транзитивную свёртку \mathfrak{N} множества \mathfrak{M} . При этом \mathfrak{N} получится именно множеством по лемме 4, даже в случае, когда \mathfrak{M} – собственный класс.

Реализуя этот план, рассмотрим замыкание $\mathfrak{M} \subseteq \mathbf{L}$ множества $B \cup \omega \cup \{\omega, B\} \in \mathbf{L}$ в \mathbf{L} относительно многократного действия класс-функций h_0, \dots, h_n . Таким образом, \mathfrak{M} – класс, определяемый без параметров, возможно, собственный класс.

ЛЕММА 15. (i) $\omega, B \in \mathfrak{M}$ и $\omega \cup B \subseteq \mathfrak{M}$;

(ii) \mathfrak{M} – элементарная подструктура в \mathbf{L} для $\varphi(b)$ из (I) при любом $b \in B$, и потому $Y = \{b \in B : \varphi^{\mathfrak{M}}(b)\}$ согласно равенству (\ddagger) в (I);

(iii) формула σ истинна в \mathfrak{M} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Стандартные теоретико-модельные следствия из построения \mathfrak{M} при помощи сколемовских функций. \square

Далее, простое комбинаторное рассуждение приносит класс-функцию F , заданную на подходящем множестве P , для которой $\mathfrak{M} = F'' P = \{F(p) : p \in P\}$.

Именно, определим P как совокупность всех пар $p = \langle T, f \rangle$, где $T = T_p \subseteq \omega^{<\omega}$ – конечное дерево, $f = f_p$ – функция с $\text{dom } f = T$, если $t \in \text{Max}(T)$ (множество всех концевых вершин), то $f(t) \in B \cup \{B\}$, а если $t \in T \setminus \text{Max}(T)$, то $f(t) \in \{0, 1, \dots, n\}$, причем если $f(t) = j$ и $k = k(j)$ (арность функции h_j), то $\{1, \dots, k\} = \{t \wedge \ell \in T\}$. В этом случае, определим

$$F_p(t) = \begin{cases} f(t), & \text{при } t \in \text{Max}(T), \\ h_j(F_p(t \wedge 1), \dots, F_p(t \wedge k)), & \text{при } t \notin \text{Max}(T), j = f(t), k = k(j) \end{cases}$$

для всех $t \in T$, и окончательно $F(p) = F_p(\langle \rangle)$ для пустого кортежа $\langle \rangle \in T$. Равенство $\mathfrak{M} = F'' P = \{F(p) : p \in P\}$ очевидно по построению.

Заметим, что P – в самом деле множество (в **SST**), поскольку оно определяется при помощи схемы **Sep** и операций леммы 6.

Пусть теперь класс-функция $\tau : \mathfrak{M}$ на транзитивное множество или класс \mathfrak{N} является транзитивной свёрткой, т. е., $\tau(x) = \{\tau(y) : y \in x \cap \mathfrak{M}\}$ для всех $x \in \mathfrak{M}$. Для построения \mathfrak{N} , τ достаточно использовать лемму 3 для множеств вида $M_\alpha = \mathfrak{M} \cap \mathbf{L}_\alpha$, $\alpha \in \text{Ord}$, и потом определить τ как объединение всех полученных транзитивных свёрток $\tau_\alpha : M_\alpha$ на транзитивное множество N_α .

Согласно лемме 4(i) для суперпозиции F и τ , \mathfrak{N} является множеством.

СЛЕДСТВИЕ 4. (i) $\omega, B \in \mathfrak{N}$ и $x = \tau(x) \in \mathfrak{N}$ для всех $x \in B \cup \omega$;

(ii) $Y = \{b \in B : \varphi^{\mathfrak{N}}(b)\}$, следовательно, $Y \in \mathbf{Def} \mathfrak{N}$;

(iii) Формула σ истинна в \mathfrak{N} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) выполнено поскольку множества B, ω транзитивны, и по построению выполнено $B \cup \omega \cup \{\omega, B\} \subseteq \mathfrak{M}$. Для вывода (ii) заметим, что $\tau : \mathfrak{M}$ на \mathfrak{N} есть \in -изоморфизм, и используем пункт (ii) леммы 15. Наконец, (iii) дается леммой 15(iii), опять же из-за того, что $\tau : \mathfrak{M}$ на \mathfrak{N} есть \in -изоморфизм. \square

Однако, согласно выбору формулы σ , множество \mathfrak{N} имеет вид \mathbf{L}_α , $\alpha \in \text{Ord}$. Отсюда следует $Y \in \mathbf{Def} \mathbf{L}_\alpha = \mathbf{L}_{\alpha+1}$, так что $Y \in \mathbf{L}$. Но это противоречит выбору множества Y в начале § 7. Вывод **Sep** в \mathbf{L} этим противоречием закончен.

Завершая доказательство теоремы, заметим, что предложение (I) теоремы 1 выполнено в \mathbf{L} поскольку каждое множество \mathbf{L}_λ с предельным индексом λ , очевидно, замкнуто относительно конечных подмножеств. Далее, отсюда следует существование декартовых произведений в \mathbf{L} по лемме 6. И уже отсюда и теоремы 3(vi) следует полная упорядочиваемость каждого множества в \mathbf{L} .

\square (теорема 1)

8. Заключение

По содержанию § 3, можно выделить довольно интересный вопрос о доказательствах лемм 5, 6 и следствия 1 в теории **SST** без аксиомы **Cntbl** вообще, или хотя

бы с заменой её более слабой аксиомой полного упорядочения **WOA**. Вопрос имеет определенное значение, поскольку по нашей теореме **1** конструктивная часть **L** универсума **SST** удовлетворяет **SST** без аксиомы **Cntbl** но с **WOA**, причем **Cntbl** не обязательно выполняется в **L**, см. пример **1** в конце § **5**.

Вообще, относительно специальных аксиом **Prod**, **TrCov**, **Beta**, **Cntbl** теории **SST**, можно ставить вопросы об их взаимной независимости над базой из остальных аксиом этой теории.

Авторы благодарны рецензентам за ценные замечания, позволившие улучшить изложение материала в этой статье.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Krzysztof R. Apt and W. Marek. Second order arithmetic and related topics. *Ann. Math. Logic*, 6:177–229, 1974.
- [2] Jon Barwise, editor. *Handbook of mathematical logic. Reprint*, volume 90 of *Stud. Logic Found. Math.* Elsevier, Amsterdam, 1982.
- [3] G. Boolos. On the semantics of the constructible levels. *Z. Math. Logik Grundlagen Math.*, 16:139–148, 1970.
- [4] Keith Devlin. *The joy of sets. Fundamentals of contemporary set theory*. Undergraduate Texts Math. New York: Springer-Verlag, 2 edition, 1993.
- [5] Keith J. Devlin. *Constructibility*. *Perspect. Log.* Cambridge: Cambridge University Press; Urbana, IL: Association for Symbolic Logic (ASL), 2016.
- [6] Victoria Gitman. Parameter-free schemes in second-order arithmetic. *The Journal of Symbolic Logic*, page 1–19, 2025. Published online by Cambridge University Press: 27 January 2025.
- [7] Victoria Gitman, Joel David Hamkins, and Thomas A. Johnstone. What is the theory ZFC without power set? *Math. Log. Q.*, 62(4-5):391–406, 2016.
- [8] Victoria Gitman and Richard Matthews. ZFC without power set II: Reflection strikes back. *Fundam. Math.*, 264(2):149–178, 2023.
- [9] Thomas Jech. *Set theory*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, The third millennium revised and expanded edition, 2003. Pages xiii + 769.
- [10] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. On the significance of parameters in the Choice and Collection schemata in the 2nd order Peano arithmetic. *Mathematics*, 11(3), 2023. Article No 726.
- [11] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. Jensen Δ_n^1 reals by means of ZFC and second-order Peano arithmetic. *Axioms*, 13(2), 2024. Article No 96.
- [12] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. Notes on the equiconsistency of ZFC without the power set axiom and 2nd order PA. *Axioms*, 14(12), 2025.
- [13] Vladimir Kanovei and Vassily Lyubetsky. Parameterfree Comprehension does not imply full Comprehension in second order Peano arithmetic. *Studia Logica*, 113:109–124, 2025.
- [14] Georg Kreisel. A survey of proof theory. *J. Symb. Log.*, 33:321–388, 1968.
- [15] W. Marek. ω -models of second order arithmetic and admissible sets. *Fundam. Math.*, 98:103–120, 1978.
- [16] Stephen G. Simpson. Set theoretic aspects of ATR_0 . Logic colloquium '80, Eur. Summer. Meet., Prague 1980, *Stud. Logic Found. Math.* 108, 255-271 (1982)., 1982.
- [17] Stephen G. Simpson. *Subsystems of second order arithmetic*. Perspectives in Logic. Cambridge: Cambridge University Press; Urbana, IL: ASL, 2nd edition, 2009. Pages xvi + 444.
- [18] Andrzej M. Zarach. Replacement \nrightarrow collection. In *Gödel '96. Logical foundations of mathematics, computer science and physics – Kurt Gödel's legacy*, pages 307–322. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

- [19] P. Zbierski. Models for higher order arithmetics. *Bull. Acad. Pol. Sci., Sér. Sci. Math. Astron. Phys.*, 19:557–562, 1971.
- [20] P. Zbierski. Non standard interpretations of higher order theories. *Fundam. Math.*, 112:175–186, 1981.
- [21] Т. Йех. *Теория множеств и метод форсинга*. “Мир”, Москва, 1973. Пер. с англ. В.И. Фуксона под ред. В.М. Гришина, оригинал Thomas Jech, *Lectures in set theory, with particular emphasis on the method of forcing*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 217, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
- [22] В. Г. Кановей. Теории Цермело без аксиомы степени и Цермело–Френкеля без аксиомы степени равнонепротиворечивы. *Матем. Заметки*, 30(3):407–419, 1981. Перевод: *Math. Notes*, 30(3):695–702, 1981.
- [23] В. Г. Кановей и В. А. Любецкий. Независимость схемы свертки в арифметике второго порядка от счетного выбора без параметров. *Матем. Заметки*, 117(2):257–269, 2025. Перевод: *Math. Notes*, 117(2):275–286, 2025.

В. Г. Кановей

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук (ИППИ РАН), г. Москва

E-mail: kanovei@iitp.ru

В. А. Любецкий

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук (ИППИ РАН), г. Москва

E-mail: lyubetsk@iitp.ru