НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ДЛЯ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

Селиверстов Александр Владиславович

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук, Москва

Рассмотрены примеры использования графических методов для иллюстрации задач дискретной математики: разделение секрета, диофантовы уравнения, распознавание симметрии. Также рассмотрено понятие двойственной кривой. Эти задачи использовались на семинарах для студентов.

Ключевые слова: начертательная геометрия; разделение секрета; симметрия; преподавание математики.

DESCRIPTIVE GEOMETRY FOR TEACHING OF MATHEMATICS

Seliverstov Alexandr Vladislavovich

Institute For Information Transmission Problems
(Kharkevich Institute), Moskow

We consider examples of usage of graphic methods to illustrate problems in discrete mathematics: secret sharing, Diophantine equations, symmetry recognition. We also consider the concept of the dual curve. These tasks have been used in seminars for students.

Keywords: descriptive geometry; secret sharing; symmetry; teaching of mathematics.

Главная цель этой работы – ещё раз показать, что начертательная геометрия тесно связана не только с аналитической геометрией, что не раз отмечалось в литературе [1, 2], но и с другими разделами математики [3]. Возможно, это позволит точнее оценить значение различных направлений в историческом развитии математики, а также привлечь внимание к обсуждаемым темам. Хотя попытки установить связи между разными направлениями математики нередко вызывают обвинения в наукообразии и эклектике.

Обсуждение роли начертательной геометрии иногда сводится к противопоставлению методов аналитической геометрии, реализованных в виде программ для вычислительных машин, и задач на построение циркулем и линейкой [4–6]. Однако такое сравнение не вполне корректно. Построение циркулем и линейкой относится к попытке аксиоматизации геометрии. Попытка оказалась неудачной, но она сыграла важную роль в понимании оснований математики. Кроме того, возможность построения циркулем и линейкой тесно связана со свойствами квадратичного замыкания поля рациональных чисел, что придаёт наглядность формальной теории чисел. Однако такое суровое самоограничение ничем кроме традиции не обосновано. В частности, совершенно незаслуженно забыт мезолабий Эратосфена, позволяющий вычислять кубические корни. Хотя это очень естественное и нетривиальное дополнение к построениям циркулем и линейкой. Этот механический прибор мог бы весьма пригодиться, если применение компьютеров в геометрии неожиданно отменят. Он позволяет найти две средние пропорциональные величины x и y между двумя данными отрезками p и q, удовлетворяющих условиям $p: x = x: y = y: q$. При условии $q = 2p$ величина x служит решением задачи об удвоении куба [7]. Мезолабий был усовершенствован Декартом в XVII веке, что позволило строить с его помощью любое число средних пропорциональных между двумя данными отрезками, например, $p: x = x: y = y: z = z: q$.

На практике инженеры никогда не ограничивали себя циркулем и линейкой, а символом строителя в прошлом был угольник, хотя прямой угол можно построить и без угольника. Таким образом, построения циркулем и линейкой – это лишь увлекательная игра. При этом роль игры в обучении очень велика. С другой стороны, распространено мнение, что аналитические методы приводят к грубым ошибкам из-за округления чисел по ходу вычисления. Действительно, этот недостаток присущ некоторым пакетам программ, а особенно их ранним версиям. Но более осмысленное использование численных методов позволяет уменьшить погрешность. Кроме того, универсальным выходом из затруднительного положения служит применение символьных вычислений. Например, работая в облачном сервисе для математических вычислений MathPartner с системами алгебраических уравнений, вычисления можно проводить точно и лишь на последнем шаге перейти к приближённым значениям, если это необходимо [8, 9]. Это позволяет в случае, когда решение выражается рациональными числами, обойтись без приближений. Обычно задачи на плоскости или в трёхмерном пространстве решаются легко. Существенные трудности могут возникнуть при необходимости обработки видеопотока в реальном времени. Впрочем, в этом случае построение циркулем и линейкой не даёт преимуществ.

Таким образом, классическая начертательная геометрия наиболее полезна именно в процессе обучения математике в широком понимании этого слова. Однако она воспринимается лишь как метод для архитекторов, конструкторов машин, дизайнеров. Один из путей расширения списка приложений состоит в поиске связей с различными математическими задачами. Мой опыт преподавания подтверждает, что любая тема легче воспринимается, когда она связана с конкретным приложением, иногда шутливым, которое можно кратко пояснить здесь и сейчас. Именно кратко, поскольку времени у преподавателя всегда мало. Мы рассмотрим несколько задач, показывающих возможность и важность графических методов при обучении студентов, которые не изучают начертательную геометрию как самостоятельный предмет. Здесь уместно напомнить, что мы окружены разнообразными изобретениями [10]; примером служат солнечные часы [11].

Конечно, разбор таких задач не может заменить начертательную геометрию, но позволяет разнообразить учебный процесс или служить темой дополнительных занятий для заинтересованных студентов любой специализации. Интерес к математическому образованию связан с его содержанием, которое нередко остаётся формальным и оторванным от жизни. С другой стороны, отмечена предпочтительность графических форм предъявления информации по сравнению с вербальной формой [12].

При изучении конических сечений таким примером, хотя вряд ли применяемым на практике в такой форме, может быть задача о разделении секрета. Впервые эту задачу сформулировал и решил Ади Шамир в 1979 г. [13]. И хотя она давно известна, рассмотрим её с новой точки зрения. Предлагаемый метод не претендует на оптимальность для прикладных задач, но предназначен лишь для иллюстрации графического подхода в учебных целях. Некоторое исходное секретное сообщение надо закодировать и выдать каждому из n участников некоторую информацию о секрете так, чтобы любые $m<n$, собравшись вместе, могли однозначно восстановить исходное сообщение, а никакие $(m–1)$ не могли. Пусть исходное сообщение – это координаты центра окружности, а каждый из участников получает координаты одной точки на этой окружности, у каждого своя точка. Тогда втроём всегда легко найти центр окружности, независимо от положения трёх точек. При этом решение легче всего найти графически: в центре окружности пересекаются серединные перпендикуляры к хордам. Однако никакие два участника не могут узнать центр окружности по своим двум точкам. Здесь кворум $m = 3$, общее число участников $n>3$. (При $n = 3$ задача становится тривиальной.) Естественное изменение решения для увеличения кворума M

заключается в замене окружности произвольным коническим сечением. Другой путь – заменить окружность сферой размерности (m–2); при этом кворум может быть сколь угодно большим. Дальнейшее обобщение – разрешить использовать мнимые точки [14]. Так можно привлечь внимание к графическим методам и одновременно к довольно абстрактному разделу геометрии. Если кворум для раскрытия секрета равен m, а собралось большее число участников, то они могут независимо восстанавливать секретное сообщение разными способами. Если результаты оказались разные, то кто-то использовал неправильные сведения или допустил ошибку. В этом случае ответ можно уточнить голосованием. Хотя реально применяемые коды основаны на вычислениях над конечным полем, общие идеи можно иллюстрировать привычными геометрическими построениями. Разбор вариантов этой задачи не требовал много времени и обычно проходил в середине или в конце семинара, позволяя слушателям немного отдохнуть от формальных рассуждений.

Более сложная тема – решение диофантовых уравнений. Решение уравнения от двух переменных легко иллюстрируется рисунком на плоскости. Однако решение уравнений от большего числа переменных обычно вызывает трудности. В частности, рассматривая линейные диофантовы уравнения от трёх переменных, полезно уметь строить сечение куба плоскостью общего положения. Этому учат в школе, но получается это не у всех студентов. Если секущая плоскость проходит через центр куба, то сечение будет либо шестиугольником, либо параллелограммом. В этом случае геометрическая задача не помогает решить уравнение, но позволяет лучше понять детали, часто ускользающие от внимания.

Графические методы незаменимы при изучении касательных и точек перегиба. Без преувеличения яркой иллюстрацией служит каустика – огибающая семейства лучей, не сходящихся в одной точке.

Выпуклое множество на плоскости не определяется длинами своих ортогональных проекций (отрезков прямых), поскольку существуют различные фигуры постоянной ширины, например, круг и треугольник Рёло (Reuleaux triangle). Следующий пример показывает, что построение касательных прямых к границе даёт гораздо больше информации. Напомним, что касательная прямая соответствует точке двойственной кривой, а касательные, пересекающиеся в одной точке, – точкам пересечения прямой линии и двойственной кривой. Согласно формуле Плюккера степень двойственной кривой окажется ниже для особой алгебраической кривой, чем для гладкой кривой той же степени. В некоторых случаях построением только вещественных касательных можно доказать отсутствие не только вещественных, но и комплексных особых точек на проективном замыкании кривой. Например, для доказательства гладкости проективного замыкания коники достаточно указать две касательные, пересекающиеся в точке, не принадлежащей этой конике. Такие касательные легко провести через точку, лежащую вне области проективной плоскости, ограниченной коникой.

Симметрией кривой будем называть проективное преобразование плоскости, при котором эта кривая отображается на себя. Кубическая кривая в нормальной форме Вейерштрасса симметрична относительно смены знака одной из координат. Эта кривая во второй нормальной форме симметрична относительно поворота на 120 градусов. В работе [15] показано, что приведение кубической кривой к нормальной форме Вейерштрасса и вычисление проективного инварианта сводятся к поиску двух пар симметрично расположенных секущих. Проверка симметричности расположения и последующее вычисление проективного инварианта кривой выполняются с использованием лишь трансверсально пересекающихся прямых и кривой; оно не использует построение касательных прямых. В работе [16] рассмотрена симметрия третьего порядка.

Возможно, всё написанное покажется достойным не научной публикации, а математического кружка. Однако доступное изложение известных понятий не менее важно, чем доказательство нового. С другой стороны, не у всех преподавателей имеется возможность проводить исследования [17]. Мой опыт преподавания не связан непосредственно с графикой; упомянутые примеры могут быть объяснены без использования специальных программ, даже при свободном обсуждении вне аудитории. Не уверен, можно ли эффективно обсуждать методы начертательной геометрии, гуляя по улице или по коридору. Последнее нередко ассоциируется с чем-то бесполезным и вошло в таком качестве в поговорки [18]. Но такое обсуждение геометрических задач возможно не только в Древней Греции, но и в современных условиях. Это не отменяет важности графического представления информации [11], что подчёркивает важность применения соответствующих программ. Примеры можно найти в работах [4, 6, 19, 20].

Список литературы

1. Сальков Н.А. Начертательная геометрия – база для геометрии аналитической // Геометрия и графика. – 2016. – Т. 4, № 1. – С. 44–54. DOI: 10.12737/18057

2. Иванов Г.С., Дмитриева И.М. Принцип двойственности – теоретическая база взаимосвязи синтетических и аналитических способов решения геометрических задач // Геометрия и графика. – 2016. – Т. 4, № 3. – С. 3–10. DOI: 10.12737/21528

3. Сальков Н.А. Начертательная геометрия – теория изображений // Геометрия и графика. – 2016. – Т. 4, № 4. – С. 41–47. DOI: 10.12737/22842

4. Хейфец А.Л. Сравнение методов начертательной геометрии и 3D компьютерного геометрического моделирования по точности, сложности и эффективности // Вестник Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Строительство и архитектура. – 2015. – Т. 15, № 4. – С. 49–63. DOI: 10.14529/build150408

5. Хейфец А.Л. Начертательная геометрия как «бег в мешках» // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. – 2015. – Т. 1. – С. 298–325.

6. Хейфец А.Л. Геометрическая точность компьютерных алгоритмов конструктивных задач // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. – 2016. – Т. 1. – С. 367–387.

7. Розенфельд Б.А. Аполлоний пергский. – М.: МЦНМО, 2004. – 176 с.

8. Ильченко Е.А. Инструменты математического сервиса MathPartner для выполнения параллельных вычислений на кластере // Труды Ин-та системного программирования РАН. – 2016. – Т. 28, № 3. – С. 173–188. DOI: 10.15514/ISPRAS-2016-28 (3) -11

9. Малашонок Г.И. Новое поколение систем символьных вычислений // Вестник Тамб. ун-та. Сер. Естественные и технические науки. – 2016. – Т. 21, № 6. – С. 2026–2041. DOI: 10.20310/1810-0198-2016-21-6-2026-2041

10. Ракитская М.В. Элементы ТРИЗ в лекциях по начертательной геометрии // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. – 2016. – Т. 1. – С. 302–313.

11. Милосердов Е.П., Глебов М.А. Расчет параметров конструкции и разработка алгоритмов реализации аналемматических солнечных ча-

сов // Геометрия и графика. – 2014. – Т. 2, № 3. – С. 14–16. DOI: 10.12737/6520

12. Тестов В.А. Основные проблемы реализации концепции развития математического образования // Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании. – 2014. – № 3. – С. 278–287.

13. Shamir A. How to share a secret // Communications of the ACM. – 1979. – Vol. 22, № 11. – P. 612–613. DOI: 10.1145/359168.359176

14. Короткий В.А., Гирш А.Г. Графические алгоритмы реконструкции кривой второго порядка, заданной мнимыми элементами // Геометрия и графика. – 2016. – Т. 4, № 4. – С. 19–30. DOI: 10.12737/22840

15. Рубанов Л.И., Селиверстов А.В. Проективно-инвариантное описание излучины реки // Информационные процессы. – 2016. – Т. 16, № 3. – С. 281–290.

16. Селиверстов А.В. О симметрии проективных кривых // Вестник Твер. гос. ун-та. Сер. Прикладная математика. – 2016. – № 3. – С. 59–66.

17. Строкова Т.А. Нужен ли современной школе учитель-исследователь? // Образование и наука. – 2016. – № 7. – С. 11–25. DOI: 10.17853/1994-5639-2016-7-11-25

18. Николаева Е., Николаев С. Андроны едут // Slavia Orientalis. – 1996. – Т. 45, № 4. – С. 503–508.

19. Хейфец А.Л. 3D-модели и алгоритмы компьютерной параметризации при решении задач конструктивной геометрии (на некоторых исторических примерах) // Вестник Южно-Урал. гос. ун-та. Сер. Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. – 2016. – Т. 16, № 2. – С. 24–42. DOI: 10.14529/ctcr160203

20. Головнин А.А. Базовые алгоритмы компьютерной графики // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. – 2016. – Т. 1. – С. 13–30.