ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 32 **1996** **Вып. 3**

УДК 621.391.1:51

© 1996 г. **В. А. Любецкий**

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ МЕТОДА СЕМАНТИЧЕСКОГО ОЦЕНИВАНИЯ[1]

Предлагается компьютерно ориентированная система семантического оценивания суждений. Изучаются ее свойства и доказываются соответствующие утверждения. В частности, показана возможность конструирования объекта по доказательству его существования; показана возможность переносить свойства упорядоченных полей (в том числе теорем Гильберта и Артина, включая верхние числовые оценки в этих теоремах) на упорядоченные кольца специального вида.

Задача, решению которой посвящена эта работа, состоит в попытке развить компьютерно ориентированный метод работы со "смыслом" (= семантикой) суждений (во многих случаях цель и содержание компьютерной обработки информации состоят в преобразованиях суждений в соответствии с их "смыслами"). Этот метод состоит в приписывании суждениям элементов из специально подбираемого частично упорядоченного множества X; если φ – какое-то суждение, то соответствующий ему элемент $[\![\varphi]\!]$ из X является его "смыслом" или "степенью достоверности суждения φ". В X имеется наибольший элемент $\top$ и наименьший элемент $\bot$. Таким образом, суждение φ считается "истинным" (относительно данного приписывания), если $[\![\varphi]\!] = \top$, и "ложным", если $[\![\varphi]\!] = \bot$. Гибкая система таких приписываний может быть компьютерно реализована, что позволяет эффективно работать со "смыслами" суждений. Каждое такое приписывание называется семантической оценкой со значениями в X. Математически этот метод может рассматриваться как эффективный вариант теории пучков на частично упорядоченных множествах; в этом смысле он может рассматриваться как относящийся к гейтинговозначному и булевозначному анализу.

Такой подход показал свою полезность, в частности, в задаче однозначного (максимально индивидуализированного) описания объекта по доказательству его существования и в задаче переноса известных в теории полей утверждений и числовых оценок на случай колец специального вида. Первая из этих задач рассматривается здесь как проблема построения "естественного", сохраняющего выводимость перевода классической теории в соответствующую неклассическую теорию. Вопрос о сложности соответствующего описания и эффективности возникающих таким образом алгоритмов (для различных фрагментов классических теорий множеств и типов)

[1]**Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (номер проекта 93-012-1027).**

требует дополнительного исследования. Вторая из упомянутых задач включает некоторые вопросы, возникающие в теории кодов. Напомним, что теория множеств, не использующая закон исключенного третьего, сохраняя высокие выразительные возможности (для описания сцен, образов, отношений и т.п.) классической теории множеств, имеет многие черты эффективной теории. Например, выводимые в ней формулы вида $\forall x\, \exists y\; \varphi(x,y)$ часто задают функции определимым эффективным образом.

Основными результатами работы являются следующие два: во-первых, строится широкий класс формул, для которых из их выводимости в классической теории множеств следует их же выводимость в интуиционистской теории множеств. Этот результат обобщает известную теорему Фридмана об AE-арифметических формулах [1], а также используется для обоснования алгоритма, намеченного в работе [2].

Во-вторых, приводятся теоремы переноса для классической логики в случае колец (и упорядоченных колец; в качестве примера приводятся обобщения теорем Гильберта о нулях и Артина об упорядоченных полях на случай регулярных f-колец, включая соответствующие числовые верхние оценки).

В качестве классической теории множеств ZF мы рассматриваем теорию множеств Цермело – Френкеля с ε-индукцией вместо аксиомы фундирования и с Collection-аксиомой вместо аксиомы подстановки. Напомним формулировки упомянутых аксиом:

$$(\forall x\; [(\forall y{\in}x\; \varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)]) \Rightarrow\; \forall x\, \varphi(x) \quad (\text{“}\varepsilon\text{ – индукция”});$$
$$\forall x\; [(\forall y{\in}x\; \exists z\; \varphi(y,z)) \Rightarrow \exists w\; \forall y{\in}x\; \exists z{\in}w\; \varphi(y,z)] \quad (\text{“Collection”}).$$

Это самая обычная система аксиом классической теории множеств. В качестве соответствующей неклассической (интуиционистской) теории множеств ZFI$'$ рассматривается теория ZF без аксиомы $\varphi \vee \neg\, \varphi$ (обычно называемой законом исключенного третьего и обозначаемой LEM).

Символ $\leftrightharpoons$ означает “равно по определению” или “эквивалентно по определению”. Предполагается некоторое знакомство читателя с работами [3–7].

Фи-формулой назовем такую формулу, для посылки любой импликации которой выполняется следующее: она не содержит квантор $\forall$, а квантор $\exists$ не входит в область действия связки $\Rightarrow$. Любая формула классически эквивалентна фи-формуле; например, формуле в предваренной форме. AE-формулой называется формула вида $\forall x_1 \ldots x_n \exists y_1 \ldots y_n\; \varphi_0$, где φ_0 – бескванторная формула. Формулой с тесными отрицаниями называется формула, содержащая импликации только в форме отрицаний ее атомарных частей. Отрицание $\neg\varphi$ везде понимается как $\varphi \Rightarrow \bot$, где $\bot$ – какая-то фиксированная тождественно ложная формула.

Пусть фиксирован произвольный язык, включающий кроме символа равенства $\bullet = \bullet$ какие-то функциональные $f, \ldots$ и какие-то предикатные $P, \ldots$ символы. Например, пусть f и P – двухместные. Пусть K – какая-то интерпретация этих символов в счетном конструктивном множестве; например, в множестве всех положительных целых чисел $\omega \leftrightharpoons \{0,1,2,\ldots\}$. “Интерпретация” означает, что $x = y$ понимается как тождество (т.е. как совпадение двух множеств x и y), и $f : \omega^2 \to \omega$, $P \subseteq \omega^2$. По существу $\overline{K} \leftrightharpoons <\omega, f, \ldots, P, \ldots>$ есть произвольная счетная структура (из функций и отношений). Излагаемый ниже подход использует условие счетности носителя при проверке только соотношений $(*_1)$ и $(*_2)$, которые даны ниже. Эти соотношения – условия на произвольный носитель K структуры $\overline{K}$ (и они выполняются, если $K = \omega$). Если предположить, что они выполняются для произвольного множества K, то для структуры вида $\overline{K} \leftrightharpoons <K, f, \ldots, P, \ldots>$, $f : K^2 \to K$, $P \subseteq K^2$, указанная ниже теорема 1 также верна. Вопрос, для каких множеств K, кроме ω, выполняются эти условия, будет рассмотрен в другой работе автора.

Итак, пусть φ и ψ – произвольные фиксированные, соответственно, фи-формула и AE-формула в нашем языке, а формула $(\varphi \Rightarrow \psi)_{\overline{K}}$ выражает некоторое свойство структуры $\overline{K}$ и представляет собой формулу языка теории множеств ZF. Точнее, здесь речь может идти об одной из следующих двух формул:

$$\text{либо}\quad \forall f, P, \ldots (f : \omega^2 \to \omega \wedge P \subseteq \omega^2 \wedge \ldots \Rightarrow (\forall \overline{x}\ (\varphi \Rightarrow \psi))_{\omega, f, P, \ldots}),$$
$$\text{либо}\quad \forall f, P, \ldots (\varkappa(f, P, \ldots) \Rightarrow (\forall \overline{x}\ (\varphi \Rightarrow \psi))_{\omega, f, P, \ldots}),$$

где $\overline{x}$ – все свободные переменные в φ и ψ, а $\varkappa$ – формула языка ZF, описывающая структуру $\overline{K}$. Мы ограничимся здесь рассмотрением первого случая. Второй случай рассматривается аналогично (см. замечание 2). Первую из этих формул обозначим ζ. Обозначим через ζ' формулу ζ, в посылке которой добавлено $\forall x, y \in \omega\ (P(x, y) \vee \vee \neg P(x, y))$ для всех предикатных символов $P, \ldots$, входящих в ζ.

Т е о р е м а 1. *Если* $ZF \vdash \zeta$, *то* $ZFI' \vdash \zeta'$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим посылку. Последующее изложение есть явное метаматематическое описание вывода в ZFI′, о котором говорится в заключении теоремы 1. Отсюда, в частности, видно, что длина интуиционистского вывода – линейная функция от длины соответствующего классического вывода с некоторым малым коэффициентом, который легко указать.

Обозначим $\mathbb{Z}_2 \leftrightharpoons \{0, 1\}$, где $<$ определяется как $0 < 1$. Тогда $u \leqslant v \leftrightharpoons u < < v \vee u = v$. Эта структура является булевой алгеброй. (Конечно, не утверждается ее полнота.) Пусть $\mathcal{T}_2$ – множество всех идеалов в $\mathbb{Z}_2$; как обычно, идеалом a называется подмножество в $\mathbb{Z}_2$, обладающее свойствами: $0 \in a$, $\forall e_1, e_2 \in a\ \ (e_1 \vee e_2 \in a)$, $\forall e \in \mathbb{Z}_2\ \forall e_1 \in a\ \ (e \leqslant e_1 \Rightarrow e \in a)$. Порядок в $\mathcal{T}_2$ определяется естественно: $a \leqslant b \leftrightharpoons a \subseteq b$. Эта структура является полной гейтинговой алгеброй. Например, $\left(\bigvee\limits_{\alpha} a_\alpha\right) \wedge b \leqslant \bigvee\limits_{\alpha} (a_\alpha \wedge b)$. При этом $a \wedge b \leftrightharpoons a \cap b$, $\vee A \leftrightharpoons \{0\} \cup \bigcup A$. Последнее равенство следует из того, что $\{0\} \cup \bigcup A$ – идеал. Фиксируем вложение булевой алгебры $\mathbb{Z}_2$ в $\mathcal{T}_2$ как $0 \mapsto \{0\}$, $1 \mapsto \mathbb{Z}_2$.

Обозначим через A_2 множество всех модальных операторов (иначе называемых J-операторами) на $\mathcal{T}_2$; как обычно, J-оператором называется отображение $J : \mathcal{T}_2 \to \to \mathcal{T}_2$, для которого $J(a) \geqslant a$, $J(a \wedge b) = J(a) \wedge J(b)$, $J(J(a)) = J(a)$, $\forall a, b \in \mathcal{T}_2$. Порядок в A_2 определяется как $J_1 \leqslant J_2 \leftrightharpoons \forall a \in \mathcal{T}_2\ (J_1(a) \subseteq J_2(a))$. Эта структура является полной гейтинговой алгеброй. При этом $\left(\bigwedge\limits_{\alpha} J_\alpha\right)(a) \leftrightharpoons \bigcap\limits_{\alpha} (J_\alpha(a))$ и $\left(\bigvee\limits_{\alpha} J_\alpha\right)(a) \leftrightharpoons \leftrightharpoons \bigcap \{b \,|\, a \subseteq b,\ J_\alpha(b) = b,\ \forall \alpha\}$. Фиксируем вложение $\mathcal{T}_2 \to A_2$ как $a \mapsto J_a$, где $J_a(b) \leftrightharpoons a \vee b$. Это cHa-вложение, т.е. $\{0\} \mapsto J_0 \leftrightharpoons id$, где $id\,(a) \equiv a$, $\mathbb{Z}_2 \mapsto J_1$; здесь по определению $J_1(a) \equiv \mathbb{Z}_2$, $J_{a \wedge b} = J_a \wedge J_b$ и $J_{\bigvee\limits_{\alpha} a_\alpha} = \bigvee\limits_{\alpha} J_{a_\alpha}$. Заметим, что $(\neg\neg_{A_2})\, J_a = J_a$, так как $(\neg_{A_2})\ J_a = J^a$, где $J_a(b) \leftrightharpoons a \to b$. Действительно, $J_a \wedge J^a = id = J_0$, $J_a \vee J^a = J_1$. (Все это подробнее изложено, например, в [6]).

Поэтому любое $J_a \in \mathcal{B}_2 \leftrightharpoons \{J \in A_2 \,|\, (\neg\neg_{A_2}) J = J\}$, т.е. $\mathcal{T}_2$ cHa-вкладывается и в $\mathcal{B}_2$. При этом $\mathcal{B}_2$ – полная булева алгебра (как и всякая алгебра, образованная таким путем по полной гейтинговой алгебре).

Определим "оценку":

$$[\![k = t]\!]_{\overline{K}} \leftrightharpoons \{0\} \cup \{x \,|\, x = 1,\ k = t\} \subseteq \mathbb{Z}_2, \qquad [\![\bullet = \bullet]\!]_{\overline{K}} : K^2 \to \mathcal{T}_2.$$

Действительно, всякое ее значение является идеалом. Для любых термов s_1, s_2 определим $[\![s_1(\overline{k}) = s_2(\overline{k})]\!]_{\overline{K}}$ как $[\![k = t]\!]_{\overline{K}}$, где $s_1(\overline{k}) = k$, $s_2(\overline{k}) = t$ (здесь s_1, s_2 вычисляются в K). Аналогично определим $[\![P(s_1, s_2)]\!]_{\overline{K}} \leftrightharpoons [\![P(s_1^0, s_2^0)]\!]_{\overline{K}}$ (где s_1^0, s_2^0 – значения термов s_1, s_2 в $\overline{K}$) $\leftrightharpoons \{0\} \cup \{x \,|\, x = 1,\ P(s_1^0, s_2^0)\} \in \mathcal{T}_2$. Продолжим отображение $[\![\bullet = \bullet]\!]_{\overline{K}}$ с множества всех термов с параметрами из K на множество всех формул с параметрами из K (без свободных переменных) индукцией по связкам двумя способами. В первом случае используем операции в $\mathcal{T}_2$, а во втором – в $\mathcal{B}_2$; получаем отображения, которые будут обозначаться, соответственно, $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{T}_2}$ и $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{B}_2}$ (см. примеры, приведенные в [6]).

Условие

$$\forall k,\quad t \in K \quad (k = t \vee k \neq t) \tag{$*_1$}$$

выполняется для носителя $K \leftrightharpoons \omega$. Это приводит к существенному упрощению ситуации: $[\![s_1 = s_2]\!]_{\overline{K}} = \{0\}$ или $[\![s_1 = s_2]\!]_{\overline{K}} = \mathbb{Z}_2$. Аналогично: $[\![P(s_1, s_2)]\!]_{\overline{K}} = \{0\}$ или $[\![P(s_1, s_2)]\!]_{\overline{K}} = \mathbb{Z}_2$ (в силу дополнительной посылки $P \vee \neg P$ в формуле ζ'). Указанное свойство будем называть *нормальностью оценки*. Соответственно, $[\![s_1 = s_2]\!]_{\mathcal{B}_2} = J_0$ или $[\![s_1 = s_2]\!]_{\mathcal{B}_2} = J_1$, и $[\![P(s_1, s_2)]\!]_{\mathcal{B}_2} = J_0$ или $[\![P(s_1, s_2)]\!]_{\mathcal{B}_2} = J_1$. Здесь (и в следующих теоремах) можно предполагать непосредственно *условие нормальности*: $\big([\![k = t]\!]_{\overline{K}}, [\![P(k,t)]\!]_{\overline{K}} \in \mathbb{Z}_2\big)$, $\forall k,\, t \in K$ (или, соответственно, $\in B(K)$).

Лемма 1. *Для любой формулы φ выполняется* $\varphi_{\overline{K}} \Leftrightarrow ([\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2)$.

Доказательство (индукцией по длине φ). Имеем $(s_1 = s_2)_{\overline{K}} \Leftrightarrow (k = t)_{\overline{K}} \Leftrightarrow \big([\![k = t]\!]_{\overline{K}} = \mathbb{Z}_2\big) \Leftrightarrow \big([\![s_1 = s_2]\!]_{\overline{K}} = \mathbb{Z}_2\big)$. Аналогично: $P(s_1, s_2)_{\overline{K}} \Leftrightarrow P(k,t) \Leftrightarrow \big([\![P(s_1, s_2)]\!]_{\overline{K}} = \mathbb{Z}_2\big)$. Если $[\![\varphi \vee \psi]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2$, то $1 \in ([\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!])$, $1 \in [\![\varphi]\!]$ или $1 \in [\![\psi]\!]$. Если $(\varphi \Rightarrow \psi)_{\overline{K}}$ и $e \in [\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2}$, то $e = 0$ или $e = 1$ и по индукции $e \in [\![\psi]\!]$. Если $\varphi_{\overline{K}}$ и $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2} \leqslant [\![\psi]\!]_{\mathcal{T}_2}$, то $[\![\psi]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2$, $\psi_{\overline{K}}$. Если $[\![\exists\, x\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2$, то $1 \in (\{0\} \cup \bigcup\limits_k [\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{T}_2})$, $[\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2$ для некоторого $k \in \overline{K}$. ▲

Таким образом, использование оценки $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{T}_2}$ в доказательстве теоремы 1 является лишь вопросом изложения.

Обозначим через $V^{\mathcal{B}_2}$ булевозначный универсум для полной булевой алгебры $\mathcal{B}_2$ (общее определение булевозначного универсума см. в [7, с. 57]). Тогда класс V всех множеств вкладывается в $V^{\mathcal{B}_2}$ как обычно: $x^\vee \leftrightharpoons \{y^\vee \mid y \in x\}_-$, где X_- обозначает тождественно единичную функцию, определенную на X. Здесь $(\bullet)^\vee : V \to V^{\mathcal{B}_2}$. Индукцией по длине доказательства легко получить, что если $\mathrm{ZF} \vdash \zeta$, то $[\![\zeta]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}} = J_1$ и, в частности, $[\![f^\vee : (\omega^\vee)^2 \to \omega^\vee,\ P^\vee \subseteq (\omega^\vee)^2 \wedge \ldots \Rightarrow \forall\, \overline{x}\ (\varphi \Rightarrow \psi)_{\omega^\vee, f^\vee, P^\vee})]\!] = J_1$,

$$[\![\varphi_{\omega^\vee}]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}} \leqslant [\![\psi_{\omega^\vee}]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}}. \tag{1}$$

В соответствии с посылкой теоремы 1 получаем соотношение (1), которое будет использоваться в дальнейшем; в нашем доказательстве это единственное использование посылки из теоремы 1.

При получении (1) мы опирались также на свойство: $[\![f^\vee : (\omega^\vee)^2 \to \omega^\vee]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}} = J_1$. Здесь нетривиально доказательство однозначности: нужно получить

$$[\![k_1^\vee = t_1^\vee]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}} \wedge [\![k_2^\vee = t_2^\vee]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}} \leqslant [\![f(k_1, k_2)^\vee = f(t_1, t_2)^\vee]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}}.$$

Это следует из леммы 2; впрочем, для случая k_1, t_1, k_2, $t_2 \in \omega$ это ясно и непосредственно (из строгой разрешимости множества ω). Напомним, что множество X называется *строго разрешимым*, если наследство X^+ множества X (определяемое по ε-индукции как $X^+ \leftrightharpoons X \cup \bigcup\{Y^+ \mid Y \in X\}$) обладает свойством: $\forall\, u,\ v \in X^+$ $(u = v \vee \exists\, w \in u\ (w \notin v) \vee \exists\, w \in v\ (w \notin u))$.

Лемма 2. *Для любой формулы φ выполняется*

$$[\![\varphi\,(k_1, \ldots, k_n)]\!]_{\mathcal{B}_2} = [\![\varphi\,(k_1^\vee, \ldots, k_n^\vee)_{\omega^\vee, f^\vee, P^\vee}]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}}.$$

Доказательство (индукцией по длине φ). Рассмотрим атомарный случай. Тривиально $[\![k = t]\!]_{\overline{K}} \leqslant [\![k^\vee = t^\vee]\!]_{V^{\mathcal{T}_2}} \leqslant [\![k^\vee = t^\vee]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}}$ (или по-другому, используя нормальность, получаем сразу $[\![k = t]\!]_{\overline{K}} \leqslant [\![k^\vee = t^\vee]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}}$). Предположим условие

$$[\![k^\vee = t^\vee]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}} \leqslant [\![k = t]\!]_{\overline{K}}. \tag{$*_2$}$$

Если $k, t \in \omega$, то оно тривиально выполняется как и для всякого другого строго разрешимого множества. Итак, $[\![k = t]\!]_{\overline{K}} = [\![k^\vee = t^\vee]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}}$.

Рассмотрим случай термов. В случае одного функционального символа получаем:

$$[\![f(k^\vee,t^\vee)=r^\vee]\!]_{B_2}=[\![<k^\vee,t^\vee,r^\vee>\in f^\vee]\!]_{B_2}=\bigvee_{u,v\in K}[\![k^\vee=u^\vee]\!]_{B_2}\wedge[\![t^\vee=v^\vee]\!]_{B_2}\wedge$$
$$\wedge[\![r^\vee=f(u,v)^\vee]\!]_{B_2}=\bigvee_{u,v\in K}[\![k=u]\!]_{\overline{K}}\wedge[\![t=v]\!]_{\overline{K}}\wedge[\![r=f(u,v)]\!]_{\overline{K}}=$$
$$=\bigvee_{u,v\in K}[\![k=u]\!]\wedge[\![t=v]\!]\wedge[\![r=f(k,t)]\!]=[\![r=f(k,t)]\!]_{\overline{K}}.$$

Предпоследнее равенство следует из того, что $[\![k=u]\!]_{\overline{K}}\wedge[\![t=v]\!]_{\overline{K}}\wedge[\![r=f(k,t)]\!]_{\overline{K}}\leqslant$ $\leqslant[\![r=f(u,v)]\!]_{\overline{K}}$. В общем случае получаем:

$$[\![f(t_1,t_2)=s]\!]_{B_2}=[\![(\exists\, x,y(f(x,y)=s\wedge t_1=x\wedge t_2=y))_{K^\vee}]\!]_{B_2}=$$
$$=\bigvee_{x,y\in K}[\![f(x^\vee,y^\vee)=s]\!]_{B_2}\wedge[\![t_1=x^\vee]\!]_{B_2}\wedge[\![t_2=y^\vee]\!]_{B_2}=$$
$$=\bigvee_{x,y\in K}[\![f(x,y)=s]\!]_{\overline{K}}\wedge[\![t_1=x]\!]_{\overline{K}}\wedge[\![t_2=y]\!]_{\overline{K}}=$$
$$=\bigvee_{x,y\in K}[\![t_1=x]\!]_{\overline{K}}\wedge[\![t_2=y]\!]_{\overline{K}}\wedge[\![f(t_1,t_2)=s]\!]_{\overline{K}}=[\![f(t_1,t_2)=s]\!]_{\overline{K}}.$$

Другой атомарный случай:

$$[\![P^\vee(k^\vee,t^\vee)]\!]_{V^{B_2}}\leftrightharpoons[\![<k^\vee,t^\vee>\in P^\vee]\!]_{V^{B_2}}=\bigvee_{<u,v>\in P}[\![k^\vee=u^\vee]\!]_{V^{B_2}}\wedge[\![t^\vee=v^\vee]\!]_{V^{B_2}}=$$
$$=\bigvee_{<u,v>\in P}[\![k=u]\!]_{\overline{K}}\wedge[\![t=v]\!]_{\overline{K}}=[\![P(k,t)]\!]_{\overline{K}}.$$

Последнее равенство проверяется непосредственно.

Аналогично

$$[\![P^\vee(s_1,s_2)]\!]_{V^{B_2}}\leftrightharpoons[\![(\exists\, x,y\ (P^\vee(x,y)\wedge s_1=x\wedge s_2=y))_{K^\vee}]\!]_{V^{B_2}}=$$
$$=\bigvee_{x,y\in K}[\![P^\vee(x^\vee,y^\vee)]\!]_{B_2}\wedge[\![s_1=x^\vee]\!]_{B_2}\wedge[\![s_2=y^\vee]\!]_{B_2}=$$
$$=\bigvee_{x,y\in K}[\![P(x,y)]\!]_{\overline{K}}\wedge[\![s_1=x]\!]_{\overline{K}}\wedge[\![s_2=y]\!]_{\overline{K}}=[\![P(s_1,s_2)]\!]_{\overline{K}}.$$

Последнее равенство проверяется, как и выше, непосредственно.

Случаи связок очевидны. ▲

Замечание 1. Следующее утверждение не используется в этом доказательстве, но полезно для его понимания: $[\![k^\vee=t^\vee]\!]_{T_2}=[\![k=t]\!]_{\overline{K}}$, здесь k, t – произвольные множества. Действительно, допустим это равенство для всех $x\in k$, $y\in t$. В одну сторону индуктивное предположение не используется: $e\in[\![k=t]\!]_{\overline{K}}\Rightarrow e=$ $=0\vee e=1$ и $0\in[\![k^\vee=t^\vee]\!]$ или $k^\vee=t^\vee$. Если $e\in[\![k^\vee=t^\vee]\!]_{T_2}$, то $e=0\vee e=$ $=1$. В первом случае все ясно. Во втором случае $1=e\in[\![k^\vee=t^\vee]\!]_{T_2}=\bigwedge\limits_{x\in k}\bigvee\limits_{y\in t}$ $[\![x^\vee=y^\vee]\!]_{T_2}\wedge\ldots$, т.е. для любого $x\in k$ существует $y\in t$ такое, что $1\in[\![x^\vee=y^\vee]\!]_{T_2}$, $1\in[\![x=y]\!]_{\overline{K}}$, $x=y$, т.е. $x\in t$, $k\subseteq t$ и аналогично $t\subseteq k$. Итак, $k=t$ и $[\![k=t]\!]_{\overline{K}}=\mathbb{Z}_2$, $1\in[\![k=t]\!]_{\overline{K}}$. ▲

Л е м м а 3. а) *Для любой фи-формулы φ с параметрами $\overline{k}=<k_1,\ldots,k_n>\in K$ выполняется*

$$[\![\varphi(\overline{k})]\!]_{T_2}\ \leqslant\ [\![\varphi(\overline{k})]\!]_{B_2}.$$

б) *Для любой* AE-*формулы ψ с параметрами $\overline{k}=<k_1,\ldots,k_n>\in K$ выполняется*

$$\left(a\leqslant[\![\psi(\overline{k})]\!]_{B_2}\right)\Rightarrow\left(a\leqslant[\![\psi(\overline{k})]\!]_{T_2}\right),\qquad\forall\, a\in T_2.$$

Доказательство. а) Пусть сначала φ не содержит квантора $\forall$, а также в ней квантор $\exists$ не входит в область действия $\Rightarrow$. Индукцией по длине φ проверим, что:

если φ не содержит $\exists$, то $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}_2} \in \mathbb{Z}_2$; а если φ содержит $\exists$, то $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2} = [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}_2}$.

Действительно, для атомарной формулы φ первое утверждение получается по свойству нормальности оценки. Для случаев $\wedge$ и $\vee$ доказательство тривиально. Для случая $\Rightarrow$ формула φ не содержит $\exists$ (по условию) и получаем первое утверждение. Случай $\exists$ тривиален.

Пусть теперь φ есть фи-формула. Если φ – атомарная или φ получается с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$, то утверждение леммы 3а) ясно. Если φ получается как $\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$, то для φ_1 получаем $[\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{T}_2} = [\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{B}_2}$ (согласно предыдущему абзацу). По индуктивному предположению $[\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{T}_2} \leqslant [\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{B}_2}$, поэтому $([\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{T}_2} \to_{\mathcal{T}_2} [\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{T}_2}) \leqslant ([\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{T}_2} \to_{\mathcal{B}_2} [\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{T}_2}) \leqslant ([\![\varphi_1]\!]_{\mathcal{B}_2} \to_{\mathcal{B}_2} [\![\varphi_2]\!]_{\mathcal{B}_2})$.

б) Если $\psi(\overline{k})$ – атомарная, т.е. вида $s_1 = s_2$ или $P(s_1, s_2)$, то $[\![\psi(\overline{k})]\!]_{\mathcal{T}_2} = [\![\psi(\overline{k})]\!]_{\mathcal{B}_2}$ (по определению) и $[\![\psi(\overline{k})]\!] \in \mathbb{Z}_2$ (по свойству нормальности оценки). Заметим, что пропозициональные операции $\wedge$, $\vee$, $\to$ в $\mathcal{T}_2$ и в $\mathcal{B}_2$ над элементами из $\mathbb{Z}_2$ (т.е. над идеалами $\{0\}$ и $\mathbb{Z}_2$ или операторами J_0 и J_1) дают один и тот же результат, принадлежащий снова $\mathbb{Z}_2$. Поэтому для бескванторной $\psi(\overline{k})$ мы получаем опять $[\![\psi(\overline{k})]\!]_{\mathcal{T}_2} = [\![\psi(\overline{k})]\!]_{\mathcal{B}_2} \in \mathbb{Z}_2$ (индукцией по длине φ). Здесь существенно условие $(*_1)$. Для случая $\exists\, y\, \psi$ получаем $[\![\exists\, y\, \psi(y, \overline{k})]\!]_{\mathcal{T}_2} = [\![\exists\, y\, \psi(y, \overline{k})]\!]_{\mathcal{B}_2} \in \mathcal{T}_2$ (в силу сНа-вложения $\mathcal{T}_2$ в $\mathcal{B}_2$). Наконец, для случая $\forall\, x\, \exists\, y \psi$ получаем проверяемое неравенство непосредственно. ▲

Итак, завершим доказательство теоремы 1. Предположим $f : \omega^2 \to \omega$, $P \subseteq \omega^2$ и $\varphi_{\omega,f,P}(\overline{k})$ Допустим соотношение $(*_2)$. Тогда по лемме 1 получаем $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2$, и по лемме 3а) $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}_2} = J_1$. По лемме 2 $[\![\varphi(k_1^\vee, \ldots, k_n^\vee)_{K^\vee}]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}} = J_1$. В силу соотношения (1) имеем $[\![\psi(k_1^\vee, \ldots, k_n^\vee)_{K^\vee}]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}} = J_1$, по лемме 2 $[\![\psi(\overline{k})]\!]_{\mathcal{B}_2} = J_1$, и по лемме 3б) $[\![\psi(\overline{k})]\!]_{\mathcal{T}_2} = \mathbb{Z}_2$. По лемме 1 $\psi_{\omega,f,P}(\overline{k})$. ▲

Замечание 2. Во втором случае (упомянутом перед теоремой 1) нужно предположить "абсолютность" формулы $\varkappa$, т.е.

$$\varkappa(\omega, f, P, \ldots) \Rightarrow ([\![\varkappa(\omega^\vee, f^\vee, P^\vee, \ldots)]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}} = 1)\,. \qquad (*_3)$$

Тогда, предполагая $\varkappa(\omega, f, P, \ldots)$, получим $[\![\varkappa(\omega^\vee, f^\vee, P^\vee, \ldots)]\!]_{V^{\mathcal{B}_2}} = 1$ и отсюда получим (1), и далее, как в доказательстве теоремы 1. Обычная структура $<\omega, +, -, \bullet, \leqslant, 0, 1>$ описывается, конечно, абсолютной формулой. Это случай теоремы Фридмана. Абсолютными формулами описываются также любые рекурсивные операции и отношения на ω. Если $\varkappa$ – позитивная с ограниченным квантором $\forall$, то она абсолютна. Если $\varkappa$ – с тесными отрицаниями и релятивизована к множеству U, для которого наследство множества $\{x, y\}$ (для любых $x, y \in U$) строго разрешимо, то $\varkappa$ абсолютна. Если алгебра $\mathcal{B}_2$ – с отделимостью, то любая формула $\varkappa$ с ограниченными кванторами абсолютна. Во всех этих случаях доказательство состоит в непосредственной индукции.

Утверждение, аналогичное теореме 1, верно для многосортного языка (как в теореме 3, где дополнительный сорт переменных пробегает алгебраически или вещественно замкнутое расширение исходного кольца).

Вместо одной формулы φ можно рассматривать теорию T, состоящую из набора фи-формул, понимая $T_{\overline{K}}$ как $\overline{K} \models T$ при подходящем описании T как множества кодов – натуральных чисел. Обычно T содержит счетное множество аксиом и T можно описать, например, как $\alpha \subseteq \omega$. Тогда, если $\forall n \in \alpha\ (\overline{K} \models n)$, то $[\![\forall n \in \alpha^\vee (\overline{K} \models n)]\!] = \wedge\{[\![(\varphi_n)_K]\!] \mid n \in \alpha\} = J_1$. ▲

Приведем теорему 2, смысл которой состоит в возможности элиминировать в выводе некоторые аксиомы подобно, например, элиминации сечения (как аксиомы) или элиминации LEM в теореме 1. Утверждения о возможности такой элиминации иногда называют *теоремами переноса.*

Формула φ называется *слабо позитивной*, если φ получается из атомарных формул индуктивно с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$ и *особого случая* для импликации: если φ_1 – P-формула и φ_2 – слабо позитивная, то $(\exists\,\overline{x}\varphi_1) \wedge (\forall\,\overline{x}\,(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2))$ – слабо позитивная. *Слабо хорнова* формула ψ определяется индуктивно как полученная из атомарных формул с помощью связок $\wedge$, $\exists$, $\forall$ и *особого случая* для импликации: если φ_1 – слабо позитивная и φ_2 – слабо хорнова, то $(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)$ – слабо хорнова. Напомним, что *P-формула* определяется как атомарная или полученная с помощью связок $\wedge$, $\exists$, $\forall$ и *особого случая* для импликации: $(\exists\,x\varphi_1) \wedge (\forall\,\overline{x}\,(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2))$ (где φ_1, φ_2 есть P-формулы).

Пусть φ и ψ – такие формулы в языке колец. Ниже символы $+$, $-$, $\bullet$, 0, 1 суть произвольные теоретико-множественные переменные, обозначаемые таким образом в связи с их интерпретацией как произвольных операций.

Т е о р е м а 2. а) *Если* $\mathrm{ZFI}' \vdash \forall +, -, \bullet, 0, 1\ (+ : \omega^2 \to \omega,\ - : \omega \to \omega,\ \bullet : \omega^2 \to \omega,\ 0, 1 \in \omega \Rightarrow [\Phi_3 \Rightarrow \forall\,\overline{x}\,(\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \psi(\overline{x}))]_{\omega,+,-,\bullet,0,1})$, *то* $\mathrm{ZFI}' \vdash \forall +, -, \bullet, 0, 1\ (\ldots \Rightarrow [$ *"кольцо"* $\Rightarrow \forall\,\overline{x}\,(\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \psi(\overline{x}))]_{\omega,+,-,\bullet,0,1})$, *где* $\ldots$ *означает соответствующее выражение из посылки и* Φ_3 *говорит, что* $\overline{K} \leftrightharpoons \langle\omega, +, -, \bullet, 0, 1\rangle$ *есть неразложимое кольцо, т.е. всякое его разложение в прямую сумму идеалов тривиально (вида* $K \oplus \{0\}$*).*

б) *Утверждение* п. а) *остается верным, если опустить предположение о счетности* $\overline{K}$ *(т.е. носитель* K *кольца* $\overline{K}$ *произволен), но предположить, что множество* $B(\overline{K})$ *всех центральных идемпотентов кольца* $\overline{K}$ *разрешимо (т.е.* $\forall\, e_1, e_2 \in B(K)\ (e_1 = e_2 \vee e_1 \neq e_2)$*).*

в) *Если* $\mathrm{ZF} \vdash \forall +, -, \bullet, 0, 1\ [i \Rightarrow \forall\,\overline{x}\,(\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \psi(\overline{x})]_{\omega,+,-,\bullet,0,1}$, *то* $\mathrm{ZFI}' \vdash \forall +, -, \bullet, 0, 1\ [i' \Rightarrow \forall\,\overline{x}\,(\varphi(\overline{x}) \Rightarrow \psi(\overline{x}))]_{\omega,+,-,\bullet,0,1}$.

Здесь дополнительно φ – фи-формула и ψ – AE-формула, а $\langle i', i\rangle$ – следующие, например, пары свойств (включающие свойство "быть кольцом"): <бирегулярное, квазипростое>, <строго регулярное, тело>.

В пунктах а), б) перед импликацией можно добавить в посылке и в заключении свойство $\Phi_1 \leftrightharpoons$ "быть нормальным кольцом".

Итак, в пунктах а), б) элиминируется свойство Φ_3, в п. в) элиминируется как закон исключенного третьего, так и свойство i, до много более слабого свойства i'. Напомним, например, что *строго регулярные кольца* определяются условием: $\forall\, x \in K\ \exists\, y \in K\ (x^2 \bullet y = x)$. Они образуют класс колец существенно более широкий, чем класс тел.

Д о к а з а т е л ь с т в о подобно доказательству теоремы 1. Мы отметим только различия в них. По $\overline{K}$ образуем булеву алгебру $B(\overline{K})$ (вместо $\mathbb{Z}_2$), и далее (как выше) образуем $\mathcal{T}(K)$ и $\mathcal{B}(K)$. Определим оценку $[\![k = t]\!]_K \leftrightharpoons \{e \in B(\overline{K}) \mid e \bullet k = e \bullet t\} \in \mathcal{T}(K)$. Продолжим ее до оценок $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{T}(K)}$ и $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{B}(K)}$. Теперь не выполняется, конечно, лемма 1. Вместо нее докажем следующую лемму.

Л е м м а 4. а) *Если* φ *– слабо позитивная, то* $\varphi_K \Rightarrow ([\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}(K)} = B)$.

б) *Если* φ *– слабо хорнова, то* $([\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}(K)} = B) \Rightarrow \varphi_K$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оба пункта доказываются совместной индукцией по длине φ. Если φ – атомарная, то $(s_1 = s_2)_K \Leftrightarrow ([\![s_1 = s_2]\!]_K = B)$. В случае а) для связок $\wedge$, $\vee$, $\exists$, $\forall$ тривиально; для связки $\Rightarrow$ получаем: если $(\exists\, x\,\varphi_1 \wedge (\forall\, x(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)))_K$, то $\exists\, k_0 \in K\ ([\![\varphi_1(k_0)]\!]_{\mathcal{T}} = B)$, и тогда $[\![\forall\, x(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)]\!]_{\mathcal{T}} = \bigcap\big\{[\![\varphi_2(k)]\!]_{\mathcal{T}} \mid k \in K,\ [\![\varphi_1(k)]\!]_{\mathcal{T}} = B\big\}$, откуда получаем, что последнее выражение равно B. Проверим первое равенство: достаточно показать, что $[\![\forall\, x\,(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2)]\!]_{\mathcal{T}} \geqslant$ "правой части", т.е. $\big([\![\varphi_1(k)]\!] \to [\![\varphi_2(k)]\!]\big) \geqslant$ "правой части", $\forall\, k$. Это следует из $[\![\varphi_1(k)]\!] \wedge$ "правая часть" $\leqslant [\![\varphi_2(k)]\!]$, т.е. из того, что $\forall\, k\, \exists\, k_1\ \forall\, e \in [\![\varphi_1(k)]\!]\ [\langle e\rangle \wedge [\![\varphi_2(k_1)]\!] \leqslant [\![\varphi_2(k)]\!]]$, где $[\![\varphi_1(k)]\!] = B$. Положим $k_1 \leftrightharpoons e \bullet k + (1 - e) \bullet k_0$, и тогда последнее выполняется. Действительно, пусть e' – любой элемент из левой части. Тогда $e' \leqslant e$, $e' \in [\![k =$

$= k_1]\!] \wedge [\![\varphi_2(k_1)]\!] \leqslant [\![\varphi_2(k)]\!]$ и $e \in [\![k = k_1]\!] \wedge [\![\varphi_1(k)]\!] \leqslant [\![\varphi_1(k_1)]\!]$, $(1-e) \in [\![k_1 = k_0]\!] \wedge$ $\wedge [\![\varphi_1(k_0)]\!] \leqslant [\![\varphi_1(k_1)]\!]$, $[\![\varphi_1(k_1)]\!]_T = B$. Здесь и далее $<e>$ обозначает главный идеал, порожденный элементом e.

В случае б) для связок $\wedge, \forall$ тривиально; для связки $\exists$ получаем: если $[\![\exists\, x\, \varphi]\!]_T =$ $= B$, то $1 = e_1 \vee \ldots \vee e_n = e'_1 \vee \ldots \vee e'_n$, где $\{e'_i\}$ – попарно дизъюнктны, и $e'_i \in [\![\varphi(k_i)]\!]$; положим $k_0 \leftrightharpoons \sum\limits_i e'_i \bullet k_i$. Тогда $e'_i \bullet k_0 = e'_i \bullet k_0$, $e'_i \in [\![k_0 = k_i]\!]_T \wedge [\![\varphi(k_i)]\!]_T \leqslant [\![\varphi(k_0)]\!]_T$, $B = [\![\varphi(k_0)]\!]_T$, (по индуктивному предположению) $\varphi(k_0)_K$. Для связки $\Rightarrow$ получаем: если $[\![\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2]\!]_T = B$ и $(\varphi_1)_K$, то в силу п. а) $[\![\varphi_1]\!]_T = B$, $[\![\varphi_2]\!]_T = B$ и $(\varphi_2)_K$. ▲

В булевозначном универсуме $V^{B(K)}$ выберем, как в лемме 2, нестандартное представление структуры $\overline{K}$. (Индекс K будем иногда опускать.) В данном случае это будет не $<K^\vee, f^\vee, P^\vee>$, а $<K', +', -', \bullet', 0', 1'>$, где $K' \leftrightharpoons \{P_k \mid k \in K\}_-$, $P_k(t^\vee) \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons [\![k = t]\!]_K$, t пробегает $K, +' \leftrightharpoons \{<P_k, P_t, P_{k+t}> \mid k, t \in K\}_-$, и так же для $-', \bullet'$, наконец, $0' \leftrightharpoons P_0$, $1' \leftrightharpoons P_1$. Существенно, что $[\![+' : (K')^2 \to K']\!]_{V^B} = J_1$ (и так же для всех других операций, включая $[\![0', 1' \in K']\!]_{V^B} = J_1$). Это нетривиально в части однозначности: нужно получить $[\![P_{k_1} = P_{t_1}]\!]_B \wedge [\![P_{k_2} = P_{t_2}]\!]_B \leqslant [\![P_{k_1+k_2} = P_{t_1+t_2}]\!]_B$. В силу леммы 2, которая верна также в этом случае (при том же условии $(*_2)$; см. доказательство ниже), это значит, что нужно проверить $[\![k_1 = t_1]\!]_B \wedge [\![k_2 = t_2]\!]_B \leqslant$ $\leqslant [\![k_1 + k_2 = t_1 + t_2]\!]_B$, т.е. $[\![k_1 = t_1]\!]_K \leqslant [\![k_2 = t_2]\!]_K \leqslant [\![k_1 + k_2 = t_1 + t_2]\!]_K$. Последнее верно для любой функции f (например, от двух аргументов), для которой $f(e \bullet k_1, e \bullet k_2) = e \bullet f(k_1, k_2)$, $\forall e \in B(K)$, $\forall k_1, k_2 \in K$; в частности, для функций $+$, $-$, $\bullet$.

Точнее, условие $(*_2)$ имеет в этом случае следующий вид:

$$[\![k^\vee = t^\vee]\!]_{V^{B(K)}} \leqslant [\![k = t]\!]_K, \quad \forall k, t \in K. \tag{$*_4$}$$

Фактически лемма 2 (для этого случая) следует из условия

$$[\![P_k = P_t]\!]_{V^{B(K)}} \leqslant [\![k = t]\!]_K,$$

т.е.

$$\bigcap_{x \in K} ([\![k = x]\!]_K \to \bigcup_{y \in K} [\![t = y]\!]_K \wedge [\![x^\vee = y^\vee]\!]_B) \wedge \ldots \leqslant [\![k = t]\!]_K. \tag{$*_5$}$$

Здесь ...обозначает обратное включение.

Очевидно, $(*_4) \Rightarrow (*_5)$.

Доказательство варианта леммы 2 (для случая теоремы 2). Проверим, что

$$[\![\varphi(k_1, \ldots, k_n)]\!]_{B(K)} = [\![(\varphi(P_{k_1}, \ldots, P_{k_n}))_{K'}]\!]_{V^{B(K)}} \tag{2}$$

для всех $\overline{k} \in K$.

Атомарный случай:

$$[\![k = t]\!]_K = [\![P_k = P_t]\!]_B, \qquad \forall k, t \in K \tag{3}$$

сразу следует из $(*_3)$. Условие $(*_3)$ выполняется на любом строго разрешимом множестве.

Случай термов (один функциональный символ):

$$[\![f(P_k, P_t) = P_r]\!]_B = [\![<P_k, P_t, P_r> \in f']\!]_B = \bigcup_{u,v \in K} [\![P_k = P_u]\!]_B \wedge$$

$$\wedge [\![P_t = P_v]\!]_B \wedge [\![P_r = P_{f(u,v)}]\!] = \bigcup_{u,v} [\![k = u]\!]_K \wedge [\![t = v]\!]_K \wedge [\![r = f(u, v)]\!]_K =$$

$$= \bigcup_{u,v} [\![k = u]\!]_K \wedge [\![t = v]\!]_K \wedge [\![r = f(k, t)]\!]_K = [\![r = f(k, t)]\!]_K.$$

Предпоследнее равенство использует соотношение

$$[\![k=u]\!]_K \wedge [\![t=v]\!]_K \wedge [\![r=f(u,v)]\!]_K \leqslant [\![r=f(k,t)]\!]_K,$$

где f – любая функция со свойством $e \bullet f(u,v) = f(e \bullet u, e \bullet v)$. Случай нескольких функциональных символов: $[\![f(t_1,t_2)=s]\!]_B = [\![(\exists x,y\ (f(x,y)=s) \wedge (t_1=x) \wedge (t_2 = y))_{K'}]\!]_B = \bigcup\limits_{x,y\in K} [\![f(P_x,P_y)=s]\!]_B \wedge [\![t_1=P_x]\!]_B \wedge [\![t_2=P_y]\!]_B = \bigcup\limits_{x,y} [\![f(x,y)=s]\!]_K \wedge [\![t_1 = x]\!]_K \wedge [\![t_2=y]\!]_K = \bigcup\limits_{x,y\in K} [\![t_1=x]\!] \wedge [\![t_2=y]\!] \wedge [\![f(t_1,t_2)=s]\!]$. ▲

Лемма 3 переносится на этот случай без изменения (нормальность оценки следует из условия i'), откуда получаем доказательство теоремы 2. ▲

Позитивно АЕ-*хорновой* назовем формулу вида $\varphi \Rightarrow \psi$, где φ – слабо позитивная фи-формула и ψ – АЕ-слабо хорнова формула. Множество всех таких формул, истинных в некоторой структуре или классе структур, называется ***позитивно*** АЕ-***хорновой теорией*** этой структуры или класса структур. Говоря об этой теории, мы подразумеваем, что утверждение о соответствующей общезначимости выводимо в ZFC.

С л е д с т в и е 1. *Позитивно* АЕ-*хорновы теории класса строго регулярных колец и класса тел совпадают* (то же для всех пар $<i', i>$ классов колец из теоремы 2в). ▲

Замечание 3. В теореме 2 формула φ может включать и любые формулы вида ζ', где ζ произвольна в пп. а), б), и ζ есть фи-формула в п. в). В пп. а), б) ψ может быть произвольной, и тогда в заключении следует писать ψ' вместо ψ. В п. в) и следствии 1 ψ может быть произвольной АЕ-формулой (и тогда в заключении следует опять писать ψ').

Вместо φ и ψ там можно рассматривать и теории, состоящие из формул тех же типов.

Язык колец можно обогатить и любыми предикатными символами P (как в лемме 2), если для них выполняется условие $P(x,y) \Rightarrow P(e\bullet x, e\bullet y)$, $\forall e \in B(K)$, $\forall x,y \in K$. Например, если $\forall e \in B(K)$ $(e \geqslant 0)$, то так будет для предиката $\leqslant$. ▲

Иллюстрацией к замечанию 3 может служить теорема 3 (см. ниже). Начнем с ряда более общих утверждений, которые используются в доказательстве этой теоремы.

Пусть A – *строго регулярное упорядоченное* f*-кольцо* (в языке колец с дополнительным отношением $\leqslant$). Напомним, что последнее означает: порядок $\leqslant$ является решеточным, и $(x \geqslant 0,\ a \wedge b = 0) \Rightarrow (a \wedge (b \bullet x) = a \wedge (x \bullet b) = 0)$. Мы будем систематически использовать следующие простые свойства f-колец: если $c \geqslant 0$, то $(a \vee b)\bullet c = a\bullet c \vee b \bullet c$ (и то же для $\wedge$, и слева), $|a\bullet b| = |a|\bullet|b|$, $a^2 \geqslant 0$, $a \wedge b = 0 \Rightarrow a \bullet b = 0$.

Пусть $B(A)$ – булева алгебра всех центральных идемпотентов кольца A, и $B \subseteq \mathcal{T} \subseteq \mathcal{B}$ – обычные расширения (как в теореме 2). Как выше, определяются оценки $[\![\bullet]\!]_A$, $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{T}}$ и $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{B}}$, причем $[\![s_1 \leqslant s_2]\!]_A \leftrightharpoons [\![k \leqslant t]\!]_A$ (где k, t – значения термов s_1 и s_2 в A) $\leftrightharpoons \{e \in B \mid e \bullet k \leqslant e \bullet t\}$. Заметим, что отношение порядка в B (ранее определявшееся как $e_1 \leqslant e_2 \leftrightharpoons e_1 \bullet e_2 = e_1$) совпадает с отношением порядка, индуцированным из A.

Действительно, если $e_1 \leqslant_B e_2$, т.е. $e_1 \bullet e_2 = e_1$, то $(e_2 - e_1)^2 = (e_2 - e_1)$, отсюда $e_2 - e_1 \geqslant_A 0$. Если $e_1 \leqslant_A e_2$, то $(1-e_2)\bullet e_1 \leqslant 0$ и $(1-e_2)\bullet e_1 \geqslant 0$, $(1-e_2)\bullet e_1 = 0$. Более того, $e_1 \wedge_B e_2 = e_1 \wedge_A e_2$ и $e_1 \vee_B e_2 = e_1 \vee_A e_2$. Действительно, $e_1 \bullet e_2 \leqslant e_1$, $e_1 \bullet e_2 \leqslant e_2$, и если $a \leqslant e_1$, $a \leqslant e_2$, то $(1-e_1)\bullet a \leqslant 0$, $a \leqslant e_1 \bullet a$, $e_1 \bullet a \leqslant e_1 \bullet e_2$, $a \leqslant e_1 \bullet e_2$. Теперь случай $\vee_B$. Здесь $(e_1 \vee_A e_2)\bullet(e_1 \vee_A e_2) = (e_1 \vee_A e_2)$, т.е. $(e_1 \vee_A e_2) \in B$ и $e_1, e_2 \leqslant (e_1 \vee_A e_2)$, поэтому (в B) $e_1 \vee_B e_2 \leqslant e_1 \vee_A e_2$ и (в A) $e_1 \vee_A e_2 \leqslant e_1 \vee_B e_2$. Итак, отношение порядка и решеточные операции в A являются продолжениями соответствующих отношения и операций в B. Важно также, что

$$[\![0 \leqslant k]\!]_A = [\![k^- = 0]\!]_A. \tag{4}$$

Действительно, условие $ek \geqslant 0$ влечет $e(k \wedge 0) = ek \wedge 0 = 0$, и условие $e(k \wedge 0) = 0$ влечет $ek \wedge 0 = 0$, $ek \geqslant 0$. Поэтому нормальность оценки $[\![\bullet]\!]_A$ следует из ее нормальности для равенства, последнее следует из строгой регулярности. Итак, для любой бескванторной формулы φ имеем $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T},\mathcal{B}} \in B(A)$.

Обычным образом получаем $[\![\forall x \exists y\ (x = 0 \vee x \bullet y = y \bullet x = 1)]\!]_{\mathcal{T}} = B$, а также $[\![\forall x, y\ (x \leqslant y \vee y \leqslant x)]\!]_{\mathcal{T}} = B$. Действительно, $[\![0 \leqslant x]\!]_{\mathcal{T}} \vee_{\mathcal{T}} [\![x \leqslant 0]\!]_{\mathcal{T}} = [\![x^- = 0]\!] \vee [\![x^+ = 0]\!]$, пусть $x^+ = x^+ \bullet y \bullet x^+$ и $e \leftrightharpoons y \bullet x^+ \in B$; тогда $x^+ \bullet (1 - e) = 0$ (т.е. $1 - e$ – из второго слагаемого), а e – из первого слагаемого, так как $(x^+) \wedge (-x^-) = 0$, $(x^+) \bullet (-x^-) = 0$, $x^+ \bullet x^- = 0$, $yx^+ \bullet x^- = 0$, $e \bullet x^- = 0$. Поэтому объединение содержит 1. Итак, в смысле $\mathcal{T}$- и $\mathcal{B}$-глобальных истинностей:

$$A \text{ есть (линейно) упорядоченное тело.} \tag{5}$$

Второе утверждение следует из того, что свойства “линейное” и “тело” записываются фи-формулами, а лемма 3а) также выполняется (в форме $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}(A)} \leqslant [\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}(A)}$) (см. ниже).

Теперь определим некоторое расширение $\overline{A}$ кольца A. Для этого, как в теореме 2, определим $A' \in V^{\mathcal{T}} \subseteq V^{\mathcal{B}}$ такое, что

$$[\![\varphi(k_1, \ldots, k_n)]\!]_{\mathcal{B},A} = [\![\varphi(P_{k_1}, \ldots, P_{k_n})_{A'}]\!]_{V^{\mathcal{B}}}$$

(для всех формул φ, как в лемме 2). Тогда $[\![A'$ – (линейное) упорядоченное тело$]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$. Пусть $[\![A''$ – вещественно замкнутое упорядоченное тело, $A' \subseteq A'']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$. Положим

$$\overline{A} \leftrightharpoons (A'')^{\wedge \mathcal{B}(A)} \leftrightharpoons \{g \in V^{\mathcal{B}(A)} \mid [\![g \in A'']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1\}.$$

Выполняется

$$[\![(\overline{A})_- = A'']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = \top.$$

Определим оценку $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{B}(A),\overline{A}}$ обычным образом, полагая $[\![f = g]\!]_{\mathcal{B}(A),\overline{A}} \leftrightharpoons [\![f = g]\!]_{V^{\mathcal{B}}}$ для любых $f, g \in \overline{A}$, и аналогично для $\leqslant$. Операции в $\overline{A}$ индуцируются операциями в $(\overline{A})_-$ в смысле ($[\![\bullet]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = \top$). Имеются два сорта переменных x, y, z (пробегающих A) и α, β, γ (пробегающих $\overline{A}$); причем $[\![\forall x \varphi(x)]\!]_{\mathcal{B}(A),\overline{A}} \leftrightharpoons \bigcap\{[\![\varphi(P_x)]\!]_{\mathcal{B}(A),\overline{A}} \mid x \in A\}$ и т.д.

Л е м м а 5. а) *Кольцо $\overline{A}$ – расширение кольца A относительно вложения $k \mapsto P_k$, включая операции $\wedge$ и $\vee$; $[\![(\overline{A})_- = A'']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = \top$; оценки $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}(A),\overline{A}}$ и $[\![\varphi_{A''}]\!]_{V^{\mathcal{B}}}$ совпадают, включая операции $\wedge$ и $\vee$; оценка $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{B}(A),\overline{A}}$ совпадает с оценкой $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{T}(A),A}$ для всех атомарных формул $s_1 = s_2$ и $s_1 \leqslant s_2$ (включая операции $\wedge$ и $\vee$).*

б) *Структура $<\overline{A}, [\![\bullet]\!]_{\mathcal{B}(A),\overline{A}}>$ есть $\mathcal{B}$-ортополное вещественно замкнутое строго регулярное f-кольцо.*

в) *Для всякого $\mathcal{B}$-ортополного вещественно замкнутого строго регулярного f-кольца A_1, которое расширяет кольцо A, существует $A'' \in V^{\mathcal{B}}$ такое, что $[\![A''$ – вещественно замкнутое тело, расширение $A']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = \top$ и $A_1 = (A'')^{\wedge \mathcal{B}(A)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Если $k +_A t = r$, то $[\![<P_k, P_t, P_{k+t}> \in +']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = \top$ и $[\![P_{k+t} = P_r]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = \top$, отсюда $P_k +_{(\overline{A})} P_t = P_r$. Если $k \leqslant_A t$, то $[\![<P_k, P_t> \in \leqslant']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = \top$ и $P_k \leqslant_{(\overline{A})} P_t$. Если $k \wedge_A t = r$, то $r \leqslant k, t \wedge \forall u\ (u \leqslant k, t \Rightarrow u \leqslant r)$, $P_r \leqslant P_k, P_t$ и $[\![P_k \leqslant P_t \vee P_t \leqslant P_k]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = \top$, где $[\![P_k \leqslant P_t]\!]_{V^{\mathcal{B}}} =^{(1)} [\![k \leqslant t]\!]_A \leftrightharpoons J_a$ и $[\![P_t \leqslant P_k]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = [\![t \leqslant k]\!]_A \leftrightharpoons J_b$, т.е. $J_a \vee_{\mathcal{B}} J_b = J_{a \vee_{\mathcal{T}} b} = J_1$, $a \vee_{\mathcal{T}} b = B$, $\exists e_1 \in a, e_2 \in b$ $(e_1 \vee e_2 = 1)$, где $e_1 k \leqslant e_1 t$ и $e_2 t \leqslant e_2 k$. Тогда $(e_1 k) \wedge_A e_1 t = e_1 t = e_1 r$, $e_1 k = e_1 r$. Так как $[\![P_k = P_r]\!]_{V^{\mathcal{B}}} =^{(2)} [\![k = r]\!]_A$, то $J_{<e_1>} \leqslant [\![P_k = P_r]\!]_{\mathcal{B}} \wedge [\![P_k \leqslant P_t]\!]_{\mathcal{B}} \leqslant [\![P_k \wedge_{A''} P_t =$

$= P_r]\!]_B$. Аналогично $J_{<e_2>} \leqslant [\![P_k \wedge_{A''} P_t = P_r]\!]_B$, поэтому $[\![P_k \wedge_{A''} P_t = P_r]\!]_B = \top$, $P_k \wedge_{(\overline{A})} P_t = P_r$.

Осталось проверить сами по себе важные соотношения (1) и (2). Равенство (2) есть формула (3), которая проверялась выше. Равенство (1) сразу следует из равенства (2): $[\![P_k \leqslant P_t]\!]_B \leftrightharpoons [\![<P_k, P_t> \in \leqslant_{A''}]\!]_B = [\![<P_k, P_t> \in \leqslant_{A'}]\!]_B = \vee_B\{[\![P_k = P_u]\!]_B \wedge [\![P_t = P_v]\!]_B \mid u \leqslant v\} = \vee_T \{[\![k = u]\!]_A \wedge [\![t = v]\!]_A \mid u \leqslant v\} = [\![k \leqslant t]\!]_A$.

Следующее утверждение п. а) очевидно, и мы перейдем к очередному утверждению.

Проверим, что

$$[\![(s_1 + s_2)^\circ = s_1^\circ + s_2^\circ]\!]_{V^B} = \top, \quad [\![s = s^\circ]\!]_{V^B} = \top, \quad ([\![s_1 + s_2 = s_3]\!]_{V^B} \doteq \top) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow s_1 + s_2 = s_3 \text{ в } \overline{A}. \tag{6}$$

Здесь s и $s^\circ, \ldots$ – термы и, соответственно, их значения в $\overline{A}$.

Отсюда сразу получим $[\![s_1 = s_2]\!]_{\overline{A}} \leftrightharpoons [\![s_1^\circ = s_2^\circ]\!]_{\overline{A}} \leftrightharpoons [\![s_1^\circ =_{A''} s_2^\circ]\!]_{V^B} = [\![s_1 = s_2]\!]_{V^B}$ и $[\![s_1 \leqslant s_2]\!]_{\overline{A}} \leftrightharpoons [\![s_1^\circ \leqslant s_2^\circ]\!]_{\overline{A}} \leftrightharpoons [\![s_1^\circ \leqslant_{A''} s_2^\circ]\!]_{V^B} = [\![s_1 \leqslant s_2]\!]_{V^B}$, что дает (индукцией по числу связок) совпадение оценок для всех формул. Первое из соотношений в (6) есть в сущности определение, второе проверим по индукции:

$$[\![s_1 + s_2 = (s_1 + s_2)^\circ]\!]_B = \vee\{[\![s_1 = x]\!] \wedge [\![s_2 = y]\!] \wedge [\![<x, y, (s_1 + s_2)^\circ> \in +]\!]$$

(где $[\![s_1 = s_1^\circ]\!] = [\![s_2 = s_2^\circ]\!] = \top$, отсюда) $\geqslant \top$.

Третье соотношение в (6) получаем сразу: если $[\![\exists x, y, z \in A'' \ (s_1 = x \wedge s_2 = y \wedge s_3 = z \wedge x + y = z)]\!] = \top$, то $\exists f, g, h \in \overline{A}$ ($[\![s_1 = f \wedge s_2 = g \wedge s_3 = h \wedge f + g = h]\!] = \top$, $s_1^\circ = f$, $s_2^\circ = g$, $s_3^\circ = h$). Аналогично наоборот.

Важно также, что операции $\wedge$ и $\vee$ имеют в $\overline{A}$ их обычный смысл:

$$\begin{array}{l} \text{если } f \wedge_{(\overline{A})} g = h, \text{ т.е. } [\![f \wedge_{A''} g = h]\!]_B = \top, \text{ то } h \leqslant_{(\overline{A})} f, g, \\ \text{если } u \leqslant_{(\overline{A})} f, g, \text{ то } u \leqslant_{(\overline{A})} h. \end{array} \tag{7}$$

Наоборот, если h есть наибольшая нижняя грань f, g в $\overline{A}$, то $[\![h \leqslant f, g]\!]_B \wedge [\![\forall u \leqslant f, g \ (u \leqslant h)]\!]_B = \top$.

Наконец, проверим последнее соотношение в лемме 4а). Для атомарных случаев: $[\![s_1 = s_2]\!]_A = [\![s_1 =_{A'} s_2]\!]_{V^B}$ (это проверялось в доказательстве леммы 2 для теоремы 2, и продолжаем) $= [\![s_1 =_{A''} s_2]\!]_{V^B} \leftrightharpoons [\![s_1 = s_2]\!]_{\overline{A}}$ и $[\![s_1 \leqslant s_2]\!]_A \leftrightharpoons [\![s_1^\circ \leqslant s_2^\circ]\!]_A = [\![P_{s_1^\circ} \leqslant P_{s_2^\circ}]\!]_{V^B}$ (по равенству (1), и продолжаем) $= [\![s_1^\circ \leqslant s_2^\circ]\!]_{V^B} = [\![s_1 \leqslant s_2]\!]_{\overline{A}}$. Здесь использовалось соотношение

$$[\![P_{(s(k_1, \ldots, k_n))^\circ} = (s(P_{k_1}, \ldots, P_{k_n}))^\circ]\!]_{V^B} = \top,$$

которое проверяется индукцией по длине терма s (так как $[\![P_{(s_1+s_2)^\circ} = P_{s_1^\circ + s_2^\circ} = P_{s_1^\circ} + P_{s_2^\circ} = s_1 + s_2]\!] = \top$).

Заметим, что в этом пункте использовалось только, что A'' – линейно упорядоченное расширение A'.

б) $\mathcal{B}$-*ортополное* означает (по определению), что для любого семейства $\{<b_\alpha, f_\alpha>\}$ *согласованных* пар (т.е. $b_\alpha \wedge b_\beta \leqslant [\![f_\alpha = f_\beta]\!]_{\overline{A}}$, $\forall \alpha, \beta$, где $b_\alpha \in B$ и $f_\alpha \in \overline{A}$) существует $f_0 \in \overline{A}$, для которого $b_\alpha \leqslant [\![f_0 = f_\alpha]\!]$, $\forall a$. В нашем случае это свойство очевидно. Свойства вещественной замкнутости, строгой регулярности и f-свойство записываются хорновыми формулами, откуда получаем наше утверждение.

в) Доказательство этого пункта содержится в [4, с. 119]. ▲

Итак, в классе $\mathcal{K}_A \leftrightharpoons \{K \supseteq A \mid K$ – строго регулярное f-кольцо$\}$ $\mathcal{B}$-ортополные вещественно замкнутые элементы соответствуют (в нестандартном смысле) вещественно замкнутым телам, расширяющим нестандартный образ A' кольца A.

Пусть расширенный язык (упорядоченных) колец имеет дополнительный сорт переменных α, β, $\gamma, \ldots$ (пробегающих упорядоченное строго регулярное f-кольцо $\overline{A}$, $\overline{A} \subseteq V^{\mathcal{B}(A)}$, которое сейчас может быть выбрано не обязательно так, как выше).

P-формулу в расширенном языке мы определим как атомарную или полученную с помощью связок $\wedge$, $\forall x$, $\exists\alpha$, $\forall\alpha$ и как $(\exists\alpha\varphi_1) \wedge (\forall a\ (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2))$ (где φ_1, φ_2 – P-формулы). *Слабо позитивную формулу* в том же языке мы определяем как атомарную или полученную с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\exists x$, $\forall x$, $\exists\alpha$, $\forall\alpha$ и как $(\exists\alpha\varphi_1)\wedge(\forall\alpha\ (\varphi_1 \Rightarrow \Rightarrow \varphi_2))$ (где φ_1 – P-формула, и φ_2 – слабо позитивная). *Входную формулу* в том же языке мы определяем как слабо позитивную или вида $\varphi'(x, y, \ldots, z)$ (где φ – фи-формула в исходном языке колец), или слабо позитивную фи-формулу в исходном языке колец, или полученную с помощью связок $\wedge$, $\vee$, $\exists x$, $\forall x$, $\exists\alpha$, $\forall\alpha$. (Понятие входной формулы можно было бы и расширить, допустив случай $(\exists\overline{x}\varphi_1)\wedge(\forall\overline{x}\ (\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2))$ для фи-формулы в исходном языке колец). *Нормальная* формула определяется как формула вида $\varphi \Rightarrow \psi$, где φ – входная формула, а ψ – AE-формула в исходном языке колец. Напомним, что ϕ' – формула в исходном языке колец, эквивалентная формуле $[\![\phi]\!]_{\mathcal{T}} = B$ (см. [4, с. 115].

Л е м м а 4в). *Для любой входной формулы φ выполняется: если $\varphi_{A,\overline{A}}$, то $[\![(\varphi^0)_{A',(\overline{A})_-}]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$, где φ^0 получается из φ заменой каждой части вида u' на u (т.е. опусканием знака $'$).*

Д о к а з а т е л ь с т в о ведется индукцией в соответствии с определением входной формулы. В случае φ' имеем: $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}(A)} = B$ (по определению φ'), $[\![\varphi]\!]_{\mathcal{B}(A)} = J_1$ (по условию "быть фи-формулой"), и $[\![\varphi_{A'}]\!]_{V^{\mathcal{B}(A)}} = J_1$ (по лемме 2).

Для случая слабо позитивной формулы – индукцией по ее длине. В атомарном случае $s_1 = s_2$ и $s_1 \leqslant s_2$, где s_1, s_2 – термы над $\overline{A}$, – индукцией по длине термов. Начальный шаг имеет место по определению $\overline{A}$. Далее как выше, в доказательстве леммы 4а), б). Для связок очевидно. ▲

С этого момента (для упрощения изложения) мы предполагаем коммутативность кольца A, т.е. A – коммутативное регулярное упорядоченное f-кольцо. Тогда $[\![A'$ – упорядоченное поле$]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$. Существует вещественно замкнутое расширение кольца A', пусть $[\![A''$ – вещественно замкнутое поле, $A' \subseteq A'']\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$. Положим $\overline{A} \leftrightharpoons (A'')^{\wedge_{\mathcal{B}(A)}}$.

Итак, пусть $\varphi \Rightarrow \psi$ – нормальная формула. По лемме 4в) $[\![\varphi^0_{A',(\overline{A})_-}]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$. Если $\mathrm{ZFC} \vdash (\varphi^0 \Rightarrow \psi)_{A,\overline{A}}$ (для любых упорядоченного поля A и вещественно замкнутого расширения $\overline{A}$), то $[\![\psi_{A'}]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = J_1$. Как выше, получаем ψ'_A (отсюда получаем и ψ_A, если ψ – слабо хорнова). Расширение всегда берется в том же классе колец, к которому принадлежит исходное кольцо. Подразумевается, что "общезначимость" включает выводимость соответствующего утверждения в ZFC.

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3. *Пусть $\varphi \Rightarrow \psi$ – нормальная формула. Если в классе упорядоченных полей A и их вещественно замкнутых расширений $\overline{A}$ общезначима формула $\varphi^0 \Rightarrow \psi$, то в классе коммутативных регулярных f-колец A и их $\mathcal{B}$-ортополных вещественно замкнутых расширений $\overline{A}$ общезначима формула $\varphi \Rightarrow \psi'$.* ▲

Аналогично предыдущему, *позитивно* AE-*хорновой* формулой назовем формулу вида $\varphi \Rightarrow \psi$, где φ – слабо позитивная формула в расширенном языке колец или слабо позитивная фи-формула в исходном языке колец, и ψ – AE-слабо хорнова формула в исходном языке колец. Множество всех таких формул, истинных в некоторой структуре или классе структур, называется *позитивно* AE-*хорновой* теорией этой структуры или класса структур.

С л е д с т в и е 2. *Позитивно* AE-*хорновы теории классов упорядоченных полей и их вещественно замкнутых расширений и коммутативных регулярных f-колец и их $\mathcal{B}$-ортополных вещественно замкнутых расширений совпадают.* ▲

Замечание 4. В следствии 2 и теореме 3 можно брать в качестве $\overline{A}$ только одно вещественное замыкание кольца A и, соответственно, только одно $\mathcal{B}$-ортополное вещественное замыкание кольца A (это по определению $(A'^{-})^{\wedge_{\mathcal{B}(A)}}$). ▲

Пусть $\mathcal{K}$ – класс всех коммутативных регулярных f-колец. В качестве ***примера*** к следствию 2 можно указать на теорему Гильберта о нулях (включая границу для степени и степеней многочленов) и теорему Артина, сформулированные для класса $\mathcal{K}$. Приведем вторую из них (вероятно, известную).

Для всякого кольца A из $\mathcal{K}$ существует (и выше описывается) класс вещественно замкнутых расширений $\overline{A}$ (из $\mathcal{K}$) таких, что для любого многочлена f над A, если $f \geqslant 0$ над $\overline{A}$, то f представим как сумма квадратов рациональных над A функций f_i, т.е. $f = \sum\limits_{i=1}^{m} c_i \bullet (f_i)^2$, где c_i из A и $c_i \geqslant 0$. Причем граница для числа m и степеней многочленов, входящих в f_i, та же, что и в случае полей.

Это утверждение представляет собой одну из возможных форм положительного ответа на семнадцатую проблему Гильберта для класса $\mathcal{K}$ колец.

То же относится к теореме Ритта о нулях дифференциальных многочленов, теореме Лина – Зайденберга о критических точках полиномиального отображения $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, теореме Гельфанда – Пономарева о представлениях свободных модулярных решеток, классификации гензелевых полей.

Теорема 3 очевидным образом формулируется и в общем виде, не связанном со случаем полей.

Замечание 5. Вместо пар "строго регулярное f-кольцо – упорядоченное тело" и "коммутативное регулярное f-кольцо – упорядоченное поле" можно взять все обычные пары кольцевых свойств (как в [3–5]) или в общем виде пару свойств $\varphi' \leftrightarrow \varphi$.

Приведем те шаги доказательства, которые относятся к переходу от одного члена этих пар к другому, в остальном доказательство не меняется.

1) A – проективное f-кольцо, если и только если ($[\![A'$ линейно упорядоченное$]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = \top$);

2) A – квазирегулярное f-кольцо, если и только если ($[\![A'$ ℓ-простое линейно упорядоченное$]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = \top$);

3) A – проективное f-кольцо без нильпотентных элементов, если и только если ($[\![A'$ линейно упорядоченное без делителей нуля$]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = \top$);

Те же соотношения верны для $[\![\bullet]\!]_{V^{\mathcal{T}}}$ - и $[\![\bullet]\!]_{\mathcal{B}(A),\overline{A}}$ -оценок.

Проверим эти утверждения.

1). Напомним, что проективное кольцо A определяется условием:

$$\begin{aligned}&\forall a_1, a_2 \in A\ \exists b_1, b_2 \in A\ (a_1 = b_1 + b_2 \wedge |b_1| \wedge |a_2| = 0 \wedge \\ &\wedge \forall b \in A\ (|b| \wedge |a_2| = 0 \Rightarrow |b_2| \wedge |b| = 0),\end{aligned} \tag{8}$$

смысл которого в том, что $A = a_2^{\perp} + a_2^{\perp\perp}$, $\forall a_2 \in A$, где $a_2^{\perp} \leftrightharpoons \{b \in A \mid |b| \wedge |a_2| = 0\}$ – ***поляра элемента*** a_2 (т.е. "всякая поляра – прямое слагаемое"). Всякая поляра $M^{\perp}$ является ℓ-идеалом (где $M \subseteq A$). Пусть выполняется левая часть. Мы хотим проверить, что $[\![0 \leqslant x]\!]_A \vee [\![x \leqslant 0]\!]_A = [\![x^- = 0]\!]_A \vee [\![x^+ = 0]\!]_A = \top$. По условию $A = (x^+)^{\perp} + (x^+)^{\perp\perp}$. Выберем e так, что $1 = e + y$, $e \in (x^+)^{\perp}$, $y \in (x^+)^{\perp\perp}$. Ясно, что $\forall u \in (x^+)^{\perp}$ $(eu = ueu)$ (так как $u = ue + uy = ue$), и $\forall v \in (x^+)^{\perp\perp}$ $(ev = ve = 0)$. Отсюда $\forall a \in A$ $(a = u + v,\ ae = ea)$, т.е. e – центральный элемент. Так как e – идемпотент $(1 = e + y = e^2 + y^2,\ e - e^2 = y^2 - y = 0)$, то $e \in B(A)$ и $e \geqslant 0$. Итак, $x^+ \wedge (-x^-) = 0$, $x^+ \bullet (-x^-) = 0$, $x^+ \bullet x^- = 0$, $x^- \in (x^+)^{\perp}$, $e \bullet x^- = x^-$, $(1-e) \bullet x^- = 0$ и $1 - e$ из первого слагаемого. Так как $x^+ \in (x^+)^{\perp\perp}$, то $e \bullet x^+ = 0$ и e – из второго слагаемого.

Обратное утверждение для $\mathcal{T}$-оценки следует из того, что формула (8) вытекает из условия линейности и является хорновой. Для случая $\mathcal{B}$-оценки, предполагая $[\![A'$ линейное$]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = \top$, получим $[\![P_x \leqslant P_y \vee P_y \leqslant P_x]\!]_{V^{\mathcal{B}}} = \top$, с учетом равенства (1) имеем

$[\![x \leqslant y]\!]_A \vee_B [\![y \leqslant x]\!]_A = [\![x \leqslant y]\!]_A \vee_T [\![y \leqslant x]\!]_A = \top$ и $[\![\forall x, y \in A' \ (x \leqslant y \vee y \leqslant x)]\!]_{V^T} = \top$, а для $[\![\bullet]\!]_T$-оценки уже доказано.

2) Квазирегулярное кольцо A определяется условием: $A = \langle a_2 \rangle + a_2^{\perp}$, $\forall a_2 \in A$, т.е.

$$\forall a_1, a_2 \in A \ \exists b_1, b_2 \in A \ (a_1 = b_1 + b_2 \wedge \exists n \in \mathbb{N} \ \exists d_1, \ldots, d_n, \ f_1, \ldots, f_n \in A$$
$$(|b_1| \leqslant d_1 \bullet |a_2| \bullet f_1 + \ldots + d_n \bullet |a_2| \bullet f_n \wedge |b_2| \wedge |a_2| = 0); \tag{9}$$

Напомним, что ℓ-простое кольцо A определяется условием отсутствия собственных ℓ-идеалов, т.е.

$$\forall a \in A \ (a = 0 \vee \forall b \in A \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists d_1, \ldots, d_n, \ f_1, \ldots, f_n \in A$$
$$(|b| \leqslant d_1 \bullet |a| \bullet f_1 + \ldots + d_n \bullet |a| \bullet f_n). \tag{10}$$

Имеем $a^{\perp\perp} \supseteq \langle a \rangle$ и $a^{\perp\perp} = \langle a \rangle$ (если $z \in a^{\perp\perp} \wedge a^{\perp}$, то $|z| \wedge |z| = |z| = 0$), отсюда квазирегулярное кольцо A является проективным, и по п. 1) получаем $[\![A'$ линейное$]\!] = \top$. Проверим, что $[\![A'$ ℓ-простое$]\!] = \top$ (см. (10)). Пусть e – центральный идемпотент, соответствующий ℓ-идеалу $\langle a \rangle$, т.е. $(1-e) \bullet e = 0$. Тогда $[\![a = 0]\!]_A \ni (1-e)$, и мы покажем, что второе слагаемое из (10) включает e (откуда следует проверяемое утверждение). Рассмотрим произвольный сомножитель, соответствующий b, и выберем b_1, b_2, для которых $b = b_1 + b_2$, $|b_1| \leqslant d_1 \bullet |a| \bullet f_1 + \ldots + d_n \bullet |a| \bullet f_n$ и $|b_2| \wedge |a| = 0$). Получим $[\![|b| \leqslant d_1 \bullet |a| \bullet f_1 + \ldots + d_n \bullet |a| \bullet f_n]\!]_A \ni e$, так как $[\![|b| \leqslant |b_1| + |b_2|]\!]_A = \top$ и $[\![|b_1| + |b_2| \leqslant d_1 \bullet |a| \bullet f_1 + \ldots + d_n \bullet |a| \bullet f_n + |b_2|]\!] = \top$ и $e \bullet |b_2| = 0$ (в силу $|b_2| \in a^{\perp}$, $(1-e) \bullet |b_2| = |b_2|$).

Обратное утверждение для $\mathcal{T}$-оценки следует из того, что ℓ-простота и линейность влекут квазирегулярность и проективность, которые записываются хорновыми формулами. При этом существенно используется компактность алгебры $\mathcal{T}$. Для случая $\mathcal{B}$-оценки от линейности в $V^{\mathcal{B}}$ переходим к линейности в $V^{\mathcal{T}}$, как в п. 1). Условие ℓ-простоты запишем как $\forall a_2 \in A \ \forall a_1 \in A \ \exists n \in \mathbb{N} \ \exists d_1, \ldots, d_n, \ f_1, \ldots, f_n \in A$ $(a = 0 \vee (|a_1| \leqslant d_1 \bullet |a_2| \bullet f_1 + \ldots + d_n \bullet |a_2| \bullet f_n)$. Эта формула $\mathcal{B}$-глобально истинна, из чего следует ее $\mathcal{T}$-глобальная истинность (с учетом соотношений (1) и (2)). Последнее по доказанному влечет квазирегулярность.

3) Пусть A – проективное f-кольцо без нильпотентных элементов. Проверим, что $[\![\forall x, y \ (x \bullet y = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 0)]\!] = \top$. Если $e \in [\![x \bullet y = 0]\!]$, то $exy = 0$, $e|x| \bullet |y| = 0$. Далее, $0 \leqslant (e|x| \wedge |y|)^2 = e|x|^2 \wedge e|x| \bullet |y| \wedge e|y| \bullet |x| \wedge |y|^2 \leqslant e|x| \bullet |y| = 0$, отсюда по условию $e|x| \wedge |y| = 0$, $ex \in y^{\perp}$. По другому условию $y^{\perp} + y^{\perp\perp} = A$. Пусть e' – центральный идемпотент, соответствующий слагаемому $y^{\perp}$. Тогда $(1-e') \bullet ex = 0$, $(1-e') \bullet e \in [\![x = 0]\!]$. С другой стороны, $e' \in y^{\perp}$, $e' \wedge |y| = 0$, $e' \bullet |y| = 0$, $|e'y| = 0$, $e'y = 0$, $ee' \bullet y = 0$, $ee' \in [\![y = 0]\!]$. Поэтому $(1-e') \bullet e \vee e'e = e \in [\![x = 0]\!] \vee_T [\![y = 0]\!]$.

Обратное утверждение получается как в пп. 1, 2. ▲

Многие утверждения, верные для колец из правых частей этих эквивалентностей (т.е. для линейно упорядоченных колец, ℓ-простых, без делителей нуля, тел или полей и т.д.) или алгебр над такими кольцами, имеют указанный выше вид $\varphi \Rightarrow \psi$ (или сводятся к серии последовательных утверждений такого вида). Тогда они переносятся на кольца или алгебры над кольцами из левых частей этих эквивалентностей. Сводка таких результатов подготавливается автором к печати. ▲

Замечание 6. Теоремы 2, 3 могут быть сформулированы для произвольных структур подобно теореме 1. Пусть $\mathcal{S}$ – множество функций, определенных на множестве K. Элементы из K можно представить константами и в этом смысле говорить только о функциях. Базисом в $\mathcal{S}$ назовем такую часть $B \subseteq \mathcal{S}$, что $e \in B \leftrightharpoons e \circ e = e, \ldots$ Пусть $\mathcal{S}_0 \leftrightharpoons \{f \in \mathcal{S} \mid f \circ e = e \circ f\}$ (слева e применяется ко всем аргументам функции f). Тогда, полагая $[\![k = t]\!]_K \leftrightharpoons \{e \in B \mid e \circ k = e \circ t\}$, можно развить теорию, близкую к изложенной выше. Множество $\mathcal{S}_0$ может включать и отношения P такие, что $P(x) \Rightarrow P(ex)$. Автор полагает, что это позволяет определить семантику некоторого языка функционального программирования.

Классы входных и выходных формул могут быть расширены следующим образом. Пусть вид формулы φ обеспечивает $\varphi_K \Rightarrow ([\![\varphi]\!] \in j_0)$, где j_0 – некоторый фильтр. Затем теоретико-множественным рассуждением получаем, что $[\![\psi]\!] \in j_1$, где j_1, вообще говоря, – другой фильтр, обладающий (для формул ψ из определенного класса) свойством $([\![\psi]\!] \in j_1) \Rightarrow \psi_K$. Выше $j_0 \leftrightharpoons j_1 \leftrightharpoons \{\top\}$. ▲

Эти теоремы содержались по существу в работе [3], а для языка колец в явном виде с доказательством в [8, с. 111] и без доказательства в [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Friedman H.* Classically and intuitionistically provable recursive functions // Higher Set Theory. Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1978. V. 669. P. 21–27.
2. *Любецкий В.А.* Об одном подходе к моделированию интеллектуальных систем // Пробл. передачи информ. 1993. Т. 29. № 3. С. 107–109.
3. *Lyubetsky V.A.* Heyting-valued analysis: P.S. Novikov's hypothesis // Amer. Math. Society, Contemporary Mathematics. 1992. V. 131. (Part 3). P. 565–582.
4. *Любецкий В.А.* Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа // УМН. 1989. Т. 44. № 4. С. 99–153.
5. *Lyubetsky V.A.* On some applications of Heyting-valued analysis, II // Lecture Notes in Computer Science. New York: Springer-Verlag, 1988. V. 417. P. 122–145.
6. *Fourman M.P., Scott D.S.* Sheaves and logic // Lecture Notes in Mathematics. New York: Springer-Verlag, 1979. V. 753. P. 302–401.
7. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
8. *Любецкий В.А.* Оценки и пучки: теоремы переноса: Дис. ... д-ра физ.-мат. н. М., 1991.
9. *Любецкий В.А.* Оценки и пучки: теоремы переноса: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. н. М., 1991.

Поступила в редакцию
29.12.94