ПРОБЛЕМЫ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ

Том 45 **2009** **Вып. 3**

УДК 621.391.1 : 519.64

© 2009 г. **А.В. Селиверстов, В.А. Любецкий**

О СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦАХ С НЕОПРЕДЕЛЕННОЙ ГЛАВНОЙ ДИАГОНАЛЬЮ[1]

Рассматриваются свойства матрицы вещественной квадратичной формы, которая принимает постоянное значение на достаточно большом множестве вершин многомерного куба с центром в начале координат, причем соответствующая квадрика не разделяет вершины куба. В частности, показано, что граф матрицы такой квадратичной формы не меняет числа компонент связности при удалении из него одного ребра.

Рассматривается квадратичная форма $A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}$, где вектор $\boldsymbol{x}$ пробегает n-мерное вещественное пространство, $\boldsymbol{x}^t$ означает транспонирование, A – вещественная симметричная $(n\times n)$-матрица с элементами a_{ij}. Всюду далее предполагается, что $n \geqslant 3$. Квадрикой, заданной парой $Q = \langle A, c\rangle$, будем называть аффинное многообразие, определяемое уравнением $A(\boldsymbol{x}) = c$, где c – вещественное число. Фактически будет рассматриваться пересечение квадрики Q с множеством $\mathbb{U}$ вершин n-мерного *куба* с координатами вершин ± 1. Пересечение квадрики Q и множества $\mathbb{U}$ обозначается M_Q. Переменная D обозначает диагональную матрицу с любыми вещественными числами на главной диагонали, если специально не оговорено иное. Обозначим через $G(A)$ неориентированный граф без петель и кратных ребер, в котором n вершин, и i-я вершина соединена ребром с j-й, если элемент a_{ij} матрицы A не равен нулю. Граф $G(A)$, очевидно, не зависит от диагональных элементов матрицы A. Через rk обозначим ранг матрицы, а через $|M|$ – мощность множества M.

Свойства графов $G(A)$ изучались, например, каков наименьший ранг матрицы, задающей данный граф, и как найти такую матрицу [1]. В статье используется важная теорема Фидлера [2]: *если* $(\forall D)\,(\mathrm{rk}(A + D) \geqslant n - 1)$, *то существует матрица перестановки* P, *для которой матрица* P^tAP *– трехдиагональная и неразложимая.* Более того, это справедливо над любым полем, кроме поля из трех элементов, для которого имеются некоторые исключения [3]. Разложимость матрицы A означает, что она блочно-диагональная, т.е. ее можно представить в виде прямой суммы двух матриц $A = B \oplus C$.

Нас интересуют следующие задачи, частичные ответы на которые приведены ниже. Отметим, что все доказательства, как и доказательство теоремы Фидлера в [3], – элементарные.

1. Найти точку максимума (или минимума) квадратичной формы $A(\boldsymbol{x})$ при ограничении $\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$ посредством изменения матрицы A на более “простую” матрицу B, имеющую ту же точку максимума. А именно, здесь рассматривается переход от A к матрице $A+D$, при этом точка максимума не меняется: $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{U})\,(\forall D)\,[(A+D)(\boldsymbol{x}) = A(\boldsymbol{x}) + \mathrm{tr}\,D]$, где tr – след матрицы. “Простая” здесь означает, что B имеет в общем случае более низкий ранг, чем A. Заметим, что для матриц малого ранга

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Международного научно-технического центра (номер проекта 3807).

известны эвристические или приближенные, но эффективные алгоритмы решения задачи оптимизации [4].

2. Из свойств множества M_Q вывести свойства графа $G(A)$. Среди свойств графа могут быть следующие: иметь не более одной компоненты связности (которая везде понимается как *неодноэлементное* множество вершин графа); быть незамкнутым (связным, без самопересечений) путем, проходящим через все вершины графа; быть циклом, т.е. замкнутым путем (связным, без самопересечений), проходящим через все вершины графа, и так далее. Среди свойств множества M_Q отметим такое: квадрика Q *не разделяет* вершины куба, если $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{U})\,(A(\boldsymbol{x}) \geqslant c)$ или $(\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{U})\,(A(\boldsymbol{x}) \leqslant c)$. Обычно рассматриваются квадрики, на которых лежат в точности все точки максимума (или минимума) соответствующей квадратичной формы $A(\boldsymbol{x})$ (при ограничении $\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$), т.е. форма достигает значения c. Второе условие на M_Q состоит в том, что оно содержит достаточно много вершин куба. Это условие может выражаться оценкой снизу на мощность множества M_Q, или условием, что M_Q не лежит в одной гиперплоскости, или условием максимальности этого множества в частично упорядоченном множестве из следующего пункта.

3. Рассмотрим частично упорядоченное множество (нижнюю полурешетку), состоящее из всех множеств вида M_Q, кроме множества $\mathbb{U}$ с отношением теоретико-множественного включения $\subseteq$. Хотелось бы описать эту полурешетку, и первым шагом к этому служит описание ее максимальных элементов. Назовем их *жесткими* множествами M_Q, а соответствующие квадрики – *жесткими* квадриками Q. Вместо квадрик с центром в начале координат интересно рассмотреть и другие семейства гиперповерхностей. Тривиальный пример – семейство гиперповерхностей, определяемых уравнениями вида $A(\boldsymbol{x}) + L(\boldsymbol{x}) = c$, где $L(\boldsymbol{x})$ – линейная форма от $\boldsymbol{x}$. Этот случай сводится к случаю квадрик с центром в начале координат путем повышения размерности куба на единицу: рассмотрим квадрики $A(\boldsymbol{x}) + yL(\boldsymbol{x}) = c$. В размерности два (хотя мы далее ее не рассматриваем) жесткими являются диагональные пары вершин квадрата; такая пара лежит на прямой.

4. Описать фактор-множество, состоящее из классов эквивалентности всех квадрик со следующим отношением: $Q \sim Q'$, если $M_Q = M_{Q'}$.

Далее используются следующие очевидные замечания: граф $G(A)$ – связный, если и только если матрица A перестановочно подобна неразложимой матрице; граф $G(A)$ – незамкнутый путь без самопересечения, если и только если матрица A перестановочно подобна трехдиагональной неразложимой матрице.

Перейдем к утверждениям и доказательствам.

Теорема 1. *Если квадрика $Q = \langle A, c\rangle$ не разделяет вершины ± 1-куба и при этом $|M_Q| \geqslant 3$, то граф $G(A)$ не является незамкнутым путем, проходящим через все вершины, и $(\exists D)\,(\operatorname{rk}(A + D) \leqslant n - 2)$.*

Доказательство. Пусть граф $G(A)$ является незамкнутым путем. Без ограничения общности можно считать, что число c является максимальным на $\mathbb{U}$ значением квадратичной формы $A(\boldsymbol{x})$, а матрица A – трехдиагональная и неразложимая. В вершине $\boldsymbol{x} \in \mathbb{U}$ значение квадратичной формы равно

$$A(\boldsymbol{x}) = 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i+1} x_i x_{i+1} + \operatorname{tr} A,$$

оно достигает максимального значения ровно в двух противоположных вершинах, и в них каждое слагаемое $a_{i,i+1} x_i x_{i+1}$ положительно. Действительно, знак первой координаты вершины можно выбрать произвольно, а знаки остальных координат определяются им однозначно, поскольку коэффициенты $a_{i,i+1}$ – ненулевые в силу неразложимости матрицы A. Противоречие с условием доказывает, что граф $G(A)$

не является незамкнутым путем. В силу теоремы Фидлера найдется диагональная матрица D, для которой матрица $A + D$ имеет ранг не больше чем $n - 2$. ▲

П р и м е р 1. В теореме 1 нельзя для любой матрицы A снизить границу на ранг до $n-3$: квадрика $(x_1+x_2+2x_4)(x_3+x_4) = 0$ не разделяет вершины куба, и для нее при любой матрице D матрица $A+D$ имеет (2×2)-подматрицу с определителем $-1/4$.

У т в е р ж д е н и е. *Для любой комплексной матрицы A существует такая комплексная диагональная матрица D, что $A+D$ имеет нулевое собственное значение кратности $n-1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение очевидно при $n = 1$. Пусть $n \geqslant 2$. Рассмотрим семейство матриц вида $\{uA + \operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n) \mid u, d_1,\dots,d_n \in \mathbb{C}\}$, где через $\operatorname{diag}(d_1,\dots,d_n)$ обозначена диагональная матрица. Каждой такой матрице сопоставим характеристический полином

$$x^n + F_{n-1}x^{n-1} + \ldots + F_1x + F_0 = \det(-uA + \operatorname{diag}(x-d_1,\dots,x-d_n)),$$

коэффициенты F_k которого являются формами от параметров $u, d_1,\dots,d_n$. В частности, $F_{n-1} = -d_1 - \ldots - d_n - u\operatorname{tr} A$. По теореме Гильберта любые $n \geqslant 2$ форм над $\mathbb{C}$ от $n+1$ переменной каждая имеют общий нуль, отличный от начала координат. В частности, система уравнений

$$\begin{cases} F_{n-1} - u = 0, \\ F_{n-2} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ F_1 = 0, \\ F_0 = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение $\check u, \check d_1,\dots,\check d_n$. Предположим, что $\check u = 0$. Тогда

$$F_0(\check u, \check d_1,\dots,\check d_n) = \ldots = F_{n-1}(\check u, \check d_1,\dots,\check d_n) = 0.$$

Поэтому характеристический полином матрицы $\operatorname{diag}(\check d_1,\dots,\check d_n)$ равен x^n. Это означает, что $\check d_1 = \ldots = \check d_n = 0$. Но решение $\check u, \check d_1,\dots,\check d_n$ – ненулевое. Противоречие доказывает, что система имеет решение при $u \neq 0$. Из однородности следует, что она имеет решение и при $u = 1$. Тогда соответствующие ему значения $d_1,\dots,d_n$ удовлетворяют утверждению. ▲

Условимся говорить, что свойство выполняется для *почти любой* матрицы, если множество исключений имеет меру нуль по Лебегу. Обозначим через $[\cdot]$ целую часть числа.

Г и п о т е з а. *Для почти любой комплексной матрицы A порядка n существует такая комплексная диагональная матрица D, что* $\operatorname{rk}(A+D) \leqslant n - [\sqrt{n}]$.

Гипотеза основана на следующих соображениях. Если матрица A – диагональная, то полагаем $D = -A$. Пусть A – недиагональная матрица. Рассмотрим комплексное проективное пространство $W \cong \mathbb{CP}^{n^2-1}$ ненулевых $(n\times n)$-матриц с точностью до умножения на скаляры. Подмногообразие $W_r \subseteq W$ матриц ранга не больше r выделяется равенством нулю всех миноров порядка $r+1$. Его коразмерность равна $(n-r)^2$ (см. [5]). Недиагональной матрице A порядка n сопоставим проективное подпространство $L_A \subset W$, выделяемое уравнениями $a_{ij}x_{k\ell} = a_{k\ell}x_{ij}$ для всех $i \neq j$ и $k \neq \ell$. Точка из L_A соответствует ненулевым матрицам вида $\lambda(A+D)$ или диагональным матрицам. В частности, для любых недиагональных матриц A и B соответствующие подпространства L_A и L_B пересекаются по $(n-1)$-плоскости H, состоящей из диагональных матриц; вложение $H \subset W$ не зависит от выбора матрицы A. Размерность пространства L_A есть $\dim L_A = n$. При $r = n - [\sqrt{n}]$ сумма размерностей многообразий W_r и L_A не меньше, чем размерность пространства W. Согласно проективной теореме о размерности [6] многообразия $W_{n-[\sqrt{n}]}$ и L_A пересекаются. Точка пересечения соответствует матрицам вида $\lambda A + D$ ранга не выше чем $n - [\sqrt{n}]$. Остается показать, что для *почти любой* матрицы A найдется точка в пересечении $W_{n-[\sqrt{n}]}$ и L_A, не принадлежащая $(n-1)$-плоскости H.

Теорема 2. *Если квадрика $Q = \langle A, c\rangle$ не разделяет вершины ± 1-куба и при этом $|M_Q| \geqslant 2n+1$, то граф $G(A)$ – не цикл длины n.*

Доказательство. В трехмерном пространстве квадрика, удовлетворяющая условию теоремы, проходит через все восемь вершин куба, и ее граф состоит из трех изолированных вершин.

Пусть $n \geqslant 4$. Можно считать, что число c – максимальное значение квадратичной формы $A(\boldsymbol{x})$ на $\mathbb{U}$. Предположим, что граф $G(A)$ является циклом длины n и вершины этого цикла соответствуют номерам координат. Значения квадратичной формы в точках из $\mathbb{U}$ с точностью до аддитивной константы равны сумме слагаемых, соответствующих ребрам цикла $G(A)$. Тогда максимальное значение формы достигается в не более чем $2n$ точках из $\mathbb{U}$. Действительно, если значение некоторой одной координаты фиксировано, то двигаясь вдоль цикла $G(A)$, можно однозначно определить значения еще $n-2$ координат, выбирая частичную сумму вдоль пути максимально возможной при предыдущем выборе знаков координат. При неудачном начальном выборе сумма по циклу может оказаться меньше числа c. Но каждая точка, где достигается максимум, будет получена при некотором выборе номера и знака "исходной" координаты. Начать обход цикла можно с любой из n координат. Поэтому произвол остается при выборе из не более чем $2n$ пар номера и знака координаты. ▲

Пример 2. В посылке теоремы 2 недостаточно положить $|M_Q| \geqslant 2n$: квадрика $x_1x_2 + \ldots + x_{n-1}x_n - x_nx_1 = n-2$ не разделяет вершины куба, на ней лежат $2n$ вершин, и ей соответствует цикл.

Теорема 3. *Если квадрика $Q = \langle A, c\rangle$ не разделяет вершины ± 1-куба и множество M_Q не лежит в какой-то одной гиперплоскости, то граф $G(A)$ и граф $G(A)$ без любого из его ребер имеют одинаковое число компонент связности.*

Доказательство. Предположим, что удаление некоторого одного ребра e из $G(A)$ разбивает некоторую компоненту связности графа $G(A)$ на две компоненты.

Можно считать, что число c – максимальное значение формы $A(\boldsymbol{x})$ на $\mathbb{U}$ (поскольку квадрика не разделяет вершины), а матрица A (с точностью до перенумерации координат) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} B & S \\ S^t & C \end{pmatrix},$$

где B и C – квадратные симметричные матрицы размеров $k \times k$ и $(n-k)\times(n-k)$, а прямоугольная матрица S имеет единственный ненулевой элемент, соответствующий ребру e.

Пусть единственный ненулевой элемент a_{ij} в матрице S – положительный, где $i \leqslant k$, $j \geqslant k+1$. Квадратичная форма $A(\boldsymbol{x})$ достигает максимального значения в вершинах $\boldsymbol{v}$, для которых значения координат v_i и v_j совпадают. Действительно, предположим обратное: на некоторой вершине $\boldsymbol{v}$ значение формы $A(\boldsymbol{v}) = c$ и $v_i = -v_j$. Рассмотрим вершину $\boldsymbol{w}$ с координатами $w_\ell = -v_\ell$ при $1 \leqslant \ell \leqslant k$ и $w_\ell = v_\ell$ при $k+1 \leqslant \ell \leqslant n$. Значение формы есть $A(\boldsymbol{w}) = A(\boldsymbol{v}) + 2a_{ij} > c$. Это противоречит предположению о максимальности значения c. Таким образом, форма достигает значения c в вершинах, лежащих на гиперплоскости $x_i = x_j$. Это противоречит условию.

Если единственный ненулевой элемент a_{ij} в матрице S – отрицательный, то форма достигает значения c в вершинах, лежащих на гиперплоскости $x_i = -x_j$. Это также противоречит условию. ▲

Т е о р е м а 4. 1. *Если квадрика* $Q = \langle A \oplus B, c\rangle$ *не разделяет вершины* ± 1*-куба и является жесткой, то одна из матриц* A *или* B *– диагональная.*

2. *Если квадрика* $Q = \langle A, c\rangle$ *не разделяет вершины* ± 1*-куба и является жесткой, то граф* $G(A)$ *имеет не более одной компоненты связности* (*отличной от изолированной вершины*).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что пункты 1 и 2 теоремы эквивалентны. Докажем пункт 1. Можно считать, что число c – максимальное значение квадратичной формы $(A \oplus B)(\boldsymbol{x})$ на $\mathbb{U}$. Поскольку формы $(A \oplus 0)(\boldsymbol{x})$ и $(0 \oplus B)(\boldsymbol{x})$ зависят от разных переменных, они независимо достигают своих максимальных значений α и β на $\mathbb{U}$. Следовательно, $\alpha + \beta = c$. Если обе матрицы A и B – недиагональные, то квадрики $(A \oplus 0)(\boldsymbol{x}) = \alpha$ и $(0 \oplus B)(\boldsymbol{x}) = \beta$ проходят через собственные множества $M_{\langle A \oplus 0, \alpha\rangle}$ и $M_{\langle 0 \oplus B, \beta\rangle}$ вершин куба, которые являются собственными расширениями множества M_Q. Это противоречит жесткости множества M_Q. ▲

Т е о р е м а 5. 1. *Если квадрика* $Q = \langle A, c\rangle$ *– жесткая, то на ней лежат не менее чем* $n(n-1)$ *вершин* ± 1*-куба, не принадлежащих одной гиперплоскости.*

2. *Если квадрика* $Q = \langle A, c\rangle$ *– жесткая, то*

$$(\forall Q')\,[M_Q \subseteq M_{Q'} \iff (\exists \mu \neq 0)\,(\exists \lambda, D)\,(Q' = \langle \mu(\lambda A + D), \mu c\rangle)].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Значения квадратичной формы в вершинах $\boldsymbol{v}$ и $-\boldsymbol{v}$ совпадают. Поэтому значения квадратичной формы во всех вершинах определяются ее значениями в вершинах, лежащих на одной произвольно выбранной стороне куба. В силу жесткости коэффициенты формы должны удовлетворять $n(n-1)/2$ линейно независимым соотношениям, каждое из которых соответствует вершине выбранной стороны куба. Действительно, расширим множество M_Q до M', добавив еще одну новую вершину. Соответствующие системы линейных уравнений от $(n+1)n/2$ матричных элементов a_{ij} обозначим через $\mathrm{Sys}(M_Q)$ и $\mathrm{Sys}(M')$. Они состоят из уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + 2\sum_{i>j} a_{ij} x_i x_j = c.$$

Очевидно, системы $\mathrm{Sys}(M_Q)$ и $\mathrm{Sys}(M')$ совместны, а их ранги (т.е. ранги соответствующих матриц, имеющих $(n+1)n/2$ столбцов и $|M_Q|$ и $|M'|$ строк соответственно) совпадают ($\mathrm{rk}\,\mathrm{Sys}(M_Q) = \mathrm{rk}\,\mathrm{Sys}(M')$) или отличаются на единицу ($\mathrm{rk}\,\mathrm{Sys}(M_Q) = \mathrm{rk}\,\mathrm{Sys}(M') - 1$). Если ранги совпадают, то системы $\mathrm{Sys}(M_Q)$ и $\mathrm{Sys}(M')$ имеют совпадающие пространства решений. Однако на квадрике, удовлетворяющей системе $\mathrm{Sys}(M')$, лежит вершина из M', не принадлежащая множеству M. Противоречие доказывает, что $\mathrm{rk}\,\mathrm{Sys}(M_Q) = \mathrm{rk}\,\mathrm{Sys}(M') - 1$. В силу жесткости множества M_Q квадрика, проходящая через все вершины из M', проходит через каждую вершину куба. Поскольку для квадрики, проходящей через все вершины куба, соответствующая матрица диагональна, то аффинное пространство решений системы $\mathrm{Sys}(M')$ состоит из диагональных матриц со следом c. Следовательно, ее ранг $\mathrm{rk}\,\mathrm{Sys}(M') = (n(n+1)/2) - (n-1)$. Окончательно получаем значение $\mathrm{rk}\,\mathrm{Sys}(M_Q) = n(n-1)/2$. Следовательно, мощность множества M_Q не меньше чем $n(n-1)/2$, а общее число вершин, лежащих на квадрике, не меньше чем $n(n-1)$, считая и вершины на противоположной стороне.

Предположим теперь, что вершины из M_Q лежат на гиперплоскости. В силу симметрии относительно центра куба координаты этих вершин связаны однородным линейным соотношением. Без ограничения общности можно считать, что

$$x_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i.$$

Подставив это выражение в систему линейных уравнений $\mathrm{Sys}(M_Q)$, мы получим систему уравнений вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ii} + 2\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i x_i x_j\right) + 2\sum_{n>i>j} a_{ij}x_i x_j = c.$$

Здесь первые n столбцов, соответствующих элементам a_{ii}, совпадают. Еще $n-1$ столбцов, соответствующих элементам a_{ni}, линейно выражаются через остальные столбцы. Таким образом, ранг полученной системы, вычисляемый по столбцам, не превышает $((n-2)(n-1)/2)+1$, что по крайней мере на два меньше, чем ранг $\mathrm{rk}\,\mathrm{Sys}(M_Q) = n(n-1)/2$. Противоречие доказывает, что вершины из M_Q не лежат в одной гиперплоскости.

2. Рассмотрим два аффинных подпространства в пространстве симметричных матриц порядка n:

$$N = \{B \mid (\forall \boldsymbol{v} \in M_Q)\, B(\boldsymbol{v}) = c\} \quad \text{и} \quad L = \{D + \lambda A \in N\}.$$

Размерности этих пространств таковы: $\dim N = n$, поскольку это подпространство определено системой $\mathrm{Sys}(M_Q)$ линейных уравнений ранга $n(n-1)/2$ в пространстве размерности $n(n+1)/2$, а $\dim L = n$, поскольку условие $(D+\lambda A)(\boldsymbol{v}) = c$ эквивалентно на вершинах куба одному линейному уравнению $\mathrm{tr}\, D = c(1-\lambda)$. Поскольку эти аффинные подпространства вложены ($L \subseteq N$) и их размерности совпадают, то и сами подпространства совпадают: $L = N$. ▲

Пример 3. Указанное в пункте 1 теоремы 5 число вершин $n(n-1)$ достигается на жесткой квадрике $(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 1$.

Авторы благодарны К.Ю. Горбунову и С.А. Пирогову за обсуждение результатов статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Fallat S.M., Hogben L.* The Minimum Rank of Symmetric Matrices Described by a Graph: A Survey // Linear Algebra Appl. 2007. V. 426. № 2–3. P. 558–582.
2. *Fiedler M.* A Characterization of Tridiagonal Matrices // Linear Algebra Appl. 1969. V. 2. № 2. P. 191–197.
3. *Bento A., Leal Duarte A.* On Fiedler's Characterization of Tridiagonal Matrices over Arbitrary Fields // Linear Algebra Appl. 2005. V. 401. P. 467–481.
4. *Схрейвер А.* Теория линейного и целочисленного программирования. М.: Мир, 1991.
5. *Харрис Дж.* Алгебраическая геометрия. Начальный курс. М.: МЦНМО, 2005.
6. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. М.: Мир, 1981.

Селиверстов Александр Владиславович
Любецкий Василий Александрович
Институт проблем передачи информации
им. А.А. Харкевича РАН
slvstv@iitp.ru
lyubetsk@iitp.ru

Поступила в редакцию
04.12.2008
После переработки
10.04.2009