

Ранняя история конечных проективных плоскостей

А. В. Селиверстов

Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича
Российской академии наук

Аксиомы проективной плоскости

1. Любые две разные точки инцидентны единственной прямой.
2. Любые две разные прямые инцидентны единственной точке.
3. Существуют такие четыре точки, что прямая, инцидентная любым двум из них, не инцидентна ни одной из двух других. (Существует четырёхугольник.)

Существуют конечные проективные плоскости.

Плоскость из 7 точек и 7 прямых нашёл Джино Фано (1892).

Системы ортогональных латинских квадратов

Два латинских квадрата порядка q ортогональны, если все упорядоченные пары гомотопических элементов различны, т. е. встретилась каждая из q^2 пар.

2	1	0
1	0	2
0	2	1

 и

2	0	1
1	2	0
0	1	2

Ортогональные латинские квадраты рассматривали корейский математик Чхве Сок Чон (Choi Seok-Jeong, 1646–1715) и Леонард Эйлер (Leonhard Euler, 1707–1783) после 1776 года, когда жил в С.-Петербурге. Эйлер был уверен, что задача о 36 офицерах не имеет решения, но доказал Гастон Тарри (Gaston Tarry, 1843–1913) в 1900 году. Ещё:

Frolov M. Sur les permutations carrées. *Journal de Mathématiques Spéciales*. 1890, t. 4.

К 1788 de Palluel использовал 4×4 латинские квадраты для планирования зимовки овец. (*Handbook of Combinatorial Designs*. Taylor & Francis, 2007)

В 1925 году Роналд Фишер (Sir Ronald Aylmer Fisher, 1890–1962) применил ортогональные латинские квадраты для планирования сельскохозяйственных экспериментов.

В 1896 г. Элиаким Гастингс Мур (Eliakim Hastings Moore, 1862–1932), а в 1938 г. Радж Чандра Боуз (Raj Chandra Bose, 1901–1987) нашли связь конечных проективных плоскостей с полными системами ортогональных латинских квадратов.

Теорема (Bose, 1938) Для любого натурального числа $q \geq 3$ существование конечной проективной плоскости порядка q эквивалентно существованию $(q - 1)$ попарно ортогональных латинских квадратов порядка q .

Конфигурации

Конечная плоскость — симметричная конфигурация специального вида.

Плоскость Фано — это конфигурация 7_3 .

Паппова конфигурация 9_3 . Дезаргова конфигурация 10_3 .

Интерес к симметричным конфигурациям усилился после работ Плюккера (Julius Plücker, 1801–1868). Гладкая кривая третьего порядка имеет 9 точек перегиба, по три точки на каждой из 12 прямых.

Коды, исправляющие ошибки

1. Исходное сообщение — прямая на проективной плоскости.
2. Передаваемое сообщение (кодовое слово) — набор точек на одной прямой.
3. **Стирающий канал** (некоторые точки потеряны):
достаточно двух точек, чтобы восстановить прямую.
4. **Канал с шумом** (некоторые точки заменяются на другие):
если сохранилось больше половины точек на прямой, то исходную прямую можно восстановить методом максимального правдоподобия.
5. **Декодирование** — задача линейной алгебры, которую легко решить.
6. Метод эффективен, когда плоскость конечная.

Первая половина XIX века

Работы о проективной геометрии, которые начал Жан-Виктор Понселе (Jean-Victor Poncelet, 1788–1867), относятся к вещественной проективной геометрии, а геометрия не отделяется от математики в целом.

Развитие проективной геометрии как таковой, сделанное в *Geometrie der Lage* (1847) и позже в *Beiträge zur Geometrie der Lage* (1856, 1857 и 1860) фон Штаудтом (Karl Georg Christian von Staudt, 1798–1867), не было вполне понято современниками. Многие математики старались внести уточнения, чтобы точнее описать свойства привычной вещественной плоскости. Вероятно, мысль о конечной плоскости была абсурдной.

В середине XIX века широко используются поля вычетов по простому модулю $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Томас Киркман (Thomas Penyngton Kirkman, 1806–1895) рассматривал комбинаторные дизайны, которые сегодня рассматривают как конечные аффинные (1850) и проективные (1857) плоскости простого порядка.

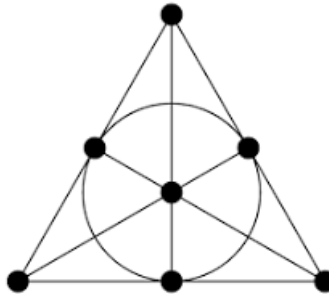
Однако геометрическую терминологию Киркман не использовал.

Kirkman T. P. Note on a unanswered prize question. *Cambridge and Dublin Math. J.* 1850. V. 5. P. 255–262.

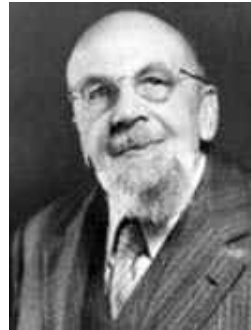
Kirkman T. P. On the perfect r -partitions of $r^2 - r + 1$. *Transactions of the Historic Society of Lancashire and Cheshire.* 1857. P. 127–142.

Джино Фано

Джино Фано (Gino Fano, 1871–1951) отбросил ограничения и получил конечную проективную плоскость. Для многих геометров мысль о конечной плоскости была абсурдной. Но это не было слишком смелым в 1892 для Фано, который в 1888 году поступил, а 22 июня 1892 года окончил Туринский университет, защитив диссертацию. В том же году Фано опубликовал систему аксиом проективной геометрии и конечную проективную плоскость, содержащую семь точек и семь прямых. В 1893–1894 годах Фано посещает лекции Феликса Клейна в Гёттингене.



Джино Фано



<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fano/>

Работа Джино Фано сразу была замечена современниками.

Постулаты Энриквеса (1894)

Федерико Энриквес (Federigo Enriques, 1871–1946) был ровесником Джино Фано. В 1891 году Энриквес окончил Пизанский университет, а в 1894–1902 годах работал в Болонском университете. В 1894 году Энриквес формулирует семь постулатов геометрии трёхмерного проективного пространства. Плоскости, прямые и точки — формы трёх видов. Постулат IV говорит о бесконечности.

IV. In una certa forma di 1^a specie vi sono infiniti elementi.

В определённой форме 1-го вида существует бесконечно много элементов.

Однако Энриквес сразу делает замечание, ссылаясь на Фано, о необязательности этого ограничения.

La proposizione IV non è subito necessaria perchè (come ha avvertito il signor Fano) lo sviluppo dalla prima parte della geometria di posizione è indipendente da tale ipotesi; ma occorrendo essa in seguito l'abbiamo posta subito per semplicità.

Постулат IV не является непосредственно необходимым, поскольку (как указал сеньор Фано) развитие первой части геометрии положения не зависит от этой гипотезы; но поскольку это потребуется позже, мы сразу добавили это для простоты.

Enriques F. Sui fondamenti della geometria proiettiva. *Rendiconti R. Ist. Lombardo Sci. e Lett.* 1894. (II) XXVII. P. 550–567.

Конечные поля

В 1893 году классификацию конечных полей получил Элиаким Гастингс Мур (Eliakim Hastings Moore, 1862–1932), работавший в Чикаго.

Moore E. H. Mathematical Papers, Chicago Congress of 1893, pp. 210–226.

Конечное поле содержит p^k элементов, где p простое, и с точностью до изоморфизма задано числом элементов. Иными словами, любое конечное поле — поле Галуа.

Любое конечное поле получается присоединением корня неприводимого многочлена над полем вычетов по простому модулю. Мультипликативная группа поля циклическая.

В 1896 году Мур публикует *Tactical Memoranda*, где строит полные системы взаимно ортогональных латинских квадратов, используя конечные поля.

Moore E. H. Tactical Memoranda I–III. *Amer. J. Math.* 1896. V. 18. P. 264–303.



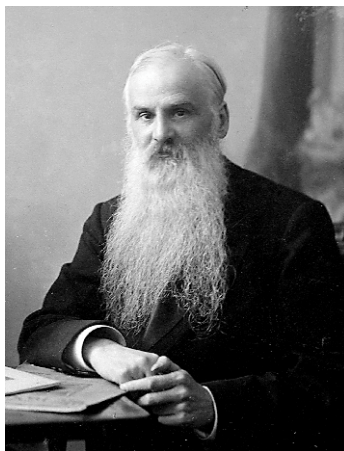
Э. Г. Мур

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Moore_Eliakim/

Фёдор Эдуардович Молин

Фёдор Эдуардович Молин (Theodor Georg Andreas Molien, 1861–1941) изучал бесконечные ассоциативные алгебры.

Ф. Э. Молин родился 10 сентября 1861 г. в Риге, окончил Рижскую гимназию, в 1880 г. поступает на физико-математический факультет Дерптского университета. До 1901 г. на протяжении 15 лет Ф. Э. Молин работал на кафедре чистой математики Дерптского (с 1893 г. Юрьевского) университета. В 1900 г. Ф. Э. Молин получил приглашение руководить кафедрой математики в открывшемся в Томске Технологическом институте.



Ф. Э. Молин

Александров И. А., Крылов П. А. Ф. Э. Молин – ученый и педагог. *Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех.* 2011. № 3(15). С. 6–11.

Теорема Паппа была известна в III веке. Теорему Паппа можно рассматривать как частный случай теоремы Паскаля. Многие авторы называют теорему Паппа теоремой Паскаля, в частности, на это указывает А. В. Васильев (1923).

Работа Паппа была переведена на латынь комментатором Федерико Коммандино (Federico Commandino, 1509–1575) и опубликована в 1588 г.

Теорема Паппа. Пусть точки P_1 , P_2 и P_3 лежат на одной прямой, а точки P'_1 , P'_2 и P'_3 лежат на другой прямой. Пусть три прямые $P_1P'_2$, $P_1P'_3$ и $P_2P'_3$ пересекают три прямые P'_1P_2 , P'_1P_3 и P'_2P_3 соответственно в точках P_{12} , P_{13} и P_{23} . Тогда точки P_{12} , P_{13} и P_{23} лежат на одной прямой.

Теорема Дезарга известна с XVII века.

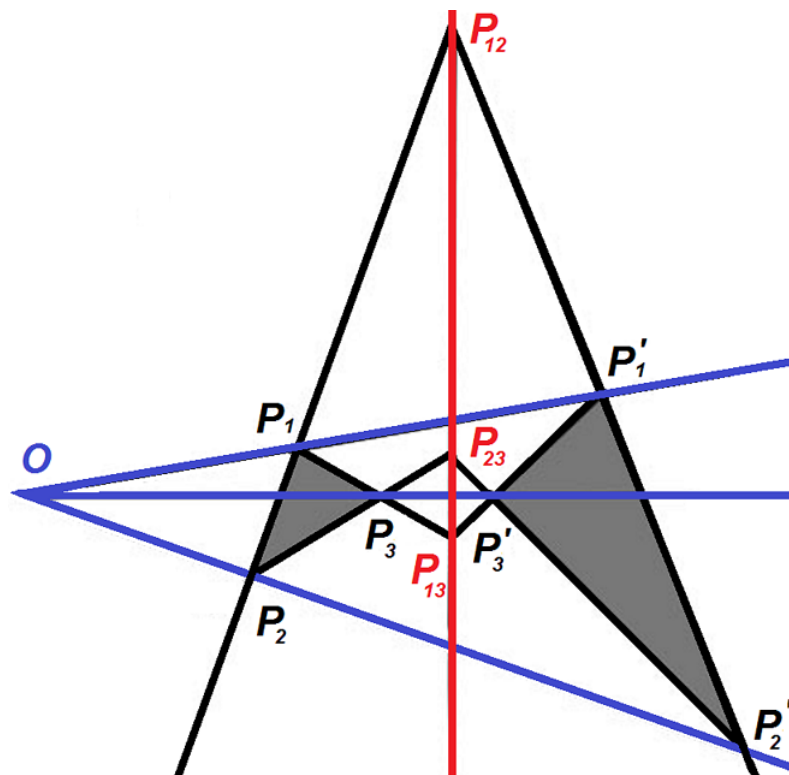
Два треугольника $P_1P_2P_3$ и $P'_1P'_2P'_3$ перспективны (из точки), если прямые, соединяющие соответственные вершины треугольников, проходят через одну точку O .

Теорема Дезарга. Если два треугольника $P_1P_2P_3$ и $P'_1P'_2P'_3$ перспективны, то коллинеарны три точки P_{12} , P_{13} и P_{23} пересечения пар прямых, содержащих пары соответственных сторон треугольников.

Теорема Паппа влечёт теорему Дезарга (Hilbert, 1899; Hessenberg, 1905).

Для конечных плоскостей теоремы Дезарга и Паппа эквивалентны. Это следует из того, что любое конечное тело коммутативно, т. е. это поле.

Недезаргова проективная плоскость не может быть вложена в проективное пространство большей размерности.



Теорема Дезарга. Если два треугольника $P_1P_2P_3$ и $P'_1P'_2P'_3$ перспективны, то коллинеарны три точки P_{12} , P_{13} и P_{23} пересечения пар прямых, содержащих пары соответственных сторон треугольников.

Независимость теорем Паппа и Дезарга от аксиом инцидентности впервые (1891) отметил Герман Винер (Hermann Ludwig Gustav Wiener, 1857–1939), приватдоцент (1885–1894) Галле-Виттенбергского университета имени Мартина Лютера (Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg).



Г. Винер

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Wiener_Hermann/

18 сентября 1890 Винер стал одним из основателей Немецкого математического общества (die Deutsche Mathematiker-Vereinigung).

Wiener H. Ueber Grundlagen und Aufbau der Geometrie. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*. 1890/91. V. 1. P. 45–48.

Винер не рассматривает никакую систему аксиом в привычном для нас виде, а использует лишь набор допустимых операций. Основной результат он формулирует так:

Beispiele:

- 1) Der Satz von Desargues über perspective Dreiecke.
- 2) Der auf das Geradenpaar bezogene Pascal'sche Satz.

Der Beweis dieser Sätze kann nicht aus den gegebenen Objecten und Operationen geführt werden, d.h. dieses Gebiet der Geometrie ist kein in sich begründetes. Entnimmt man aber den Beweis irgend eines solchen Satzes (oder auch mehrerer) einem anderen Gebiete, so lässt sich durch Wiederholung dieses Satzes (bezw. der Sätze) ein begrenztes Gebiet der ebenen Geometrie herleiten.

Примеры:

- 1) Теорема Дезарга о перспективных треугольниках.
- 2) Теорема Паскаля, связанная с парой прямых.

Доказательство этих теорем не может быть проведено посредством данных объектов и операций, т.е. эта область геометрии не является по своей сути обоснованной. Но если взять доказательство любой такой теоремы (или нескольких) из другой области, то путём многократного применения этой теоремы (или теорем) можно получить ограниченную область геометрии плоскости.

Следующий шаг сделал Давид Гильберт в 1899 году в книге *Grundlagen der Geometrie*. В ней построен пример недезарговой плоскости, удовлетворяющей группам аксиом сочетания (инцидентности) на плоскости, порядка, параллельности и непрерывности. Эта плоскость не вкладывается в пространство большей размерности, поскольку теореме Дезарга легко доказать, используя объемлющее пространство. Аксиомы Гильберта описывают аффинную плоскость, но легко построить проективное замыкание, добавив несобственную прямую.

Другой результат Гильберта состоит в возможности сопоставить дезарговой плоскости тело, элементы которого будут координатами. Коммутативность умножения, когда тело будет полем, эквивалентна выполнимости теоремы Паппа. В частности, кватернионная плоскость дезаргова, но для неё теорема Паппа не выполнена.

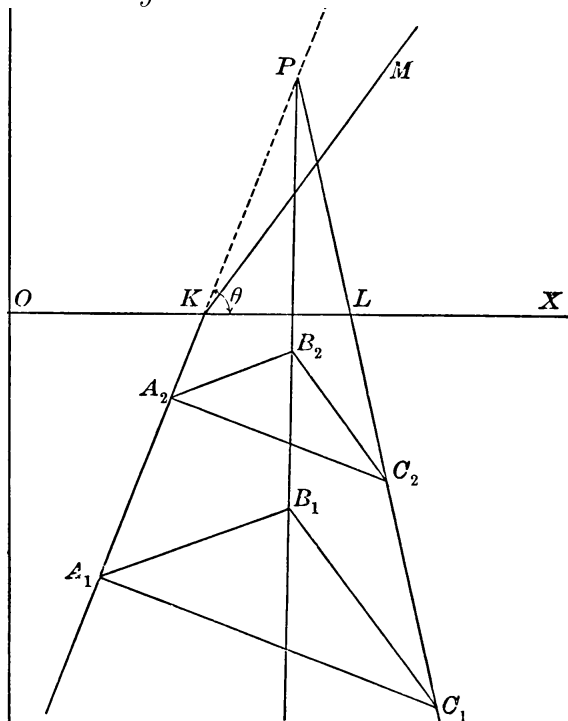
Книга *Основания геометрии* Гильберта в переводе на русский публикуется в 1923 году в Петрограде (книгоиздательство “Сеятель” Е. В. Высоцкого). Перевод сделан с 5-го издания. Русское издание включает большую (24 стр.) вступительную статью Александра Васильевича Васильева (1853–1929), в которой рассмотрена история аксиоматического подхода в геометрии. В частности, отмечается важность работ Лобачевского, фон Штаудта и Винера.

Плоскость Моултона

Изящный пример недезарговой плоскости нашёл американский астроном Форест Рэй Моултон (Forest Ray Moulton, 1872–1952), представивший свою работу 2 января 1902 года. Моултон ссылается на Винера и Гильберта.

Рассмотрим обычную вещественную аффинную плоскость с декартовой системой координат. Ось абсцисс делит плоскость на две полуплоскости. Каждую прямую, имеющую положительный наклон к оси абсцисс, изменим следующим образом: её луч, лежащий в верхней полуплоскости, заменим лучом, имеющим вдвое меньший угловой коэффициент: $\operatorname{tg}\theta = 2\operatorname{tg}\theta'$. Первоначальная прямая изламывается при пересечении с осью абсцисс, а полученная ломаная рассматривается как прямая новой модели. Все остальные прямые, включая параллельные оси абсцисс, остаются прежними. Вслед за Гильбертом, Моултон рассматривает аффинную плоскость, но она может быть дополнена несобственной прямой, чтобы получилась проективная плоскость. На определённой так плоскости Моултона выполнены все аксиомы инцидентности. Но на ней не выполняется теорема Дезарга. Достаточно рассмотреть конфигурацию 10_3 десяти точек из теоремы Дезарга, из которых лишь одна лежит в верхней полуплоскости, причём из трёх прямых конфигурации, проходящих через эту точку верхней полуплоскости, только одна имеет положительный наклон. Излом этой прямой на плоскости Моултона по сравнению с обычной плоскостью вызовет нарушение теоремы Дезарга.

Moulton F. R. A simple non-Desarguesian plane geometry. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1902. V. 3. P. 192–195.



Форест Рэй Моултон (Forest Ray Moulton, 1872–1952)

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Moulton/>

Теоремы Паппа и Дезарга

В XX веке поиск новых аксиоматизаций для разделов геометрии продолжался. Начиная с 1902 года Вениамин Каган публикует работы по аксиоматизации Евклидовой геометрии, эта тема рассмотрена в его магистерской диссертации (1907).

Освальд Веблен (Oswald Veblen, 1880–1960) в 1903 году защитил диссертацию “A System of Axioms for Geometry” под руководством Элиакима Мура (Eliakim H. Moore, 1862–1932).

Герхард Хессенберг (Gerhard Hessenberg, 1874–1925) доказал в 1905 году, что теорема Дезарга следует из теоремы Паппа.

Hessenberg G. Beweis des Desarguesschen Satzes aus dem Pascalschen. *Mathematische Annalen*. 1905. V. 61. No. 2. P. 161–172.

В то же время Джозеф Веддербарн (Joseph Henry Maclagan Wedderburn, 1882–1948), бывший в 1904–1905 годы в Университете Чикаго, доказал, что каждое конечное тело коммутативно. Следовательно, в конечной дезарговой плоскости верна теорема Паппа.

Другие доказательства этой теоремы о коммутативности конечного тела были найдены Леонардом Диксоном, Эмилем Артином и Гансом Цассенхаузом. Но более красивое нашёл Эрнст Витт в 1931 году. Это доказательство вошло в Книгу.

Плоскости Галуа

Хотя конечную проективную плоскость построил Фано в 1892 году, долгое время оставался открытым вопрос о существовании конечной недезарговой плоскости.

На проективной плоскости порядка q каждая прямая инцидентна $q + 1$ точкам и каждая прямая инцидентна $q + 1$ прямым. Поэтому общее число точек равно $q^2 + q + 1$.

Если порядок $q = p^k$ равен степени простого числа p , то существует дезаргова проективная плоскость порядка q . Также на этой плоскости верна теорема Паппа. Эта плоскость строится по аналогии с вещественной проективной плоскостью, но над конечным полем. Обратно, дезарговы конечные проективные плоскости допускают единообразное описание. Порядок такой плоскости равен степени простого числа.

Veblen O., Bussey W. H. Finite projective geometries. *Trans AMS*. 1906. P. 241–259. Представлено 22 апреля 1905.

Точки проективной плоскости соответствуют классам эквивалентных троек (x, y, z) , среди которых хотя бы один отличен от нуля. Для ненулевого элемента κ две тройки координат (x, y, z) и $(\kappa x, \kappa y, \kappa z)$ определяют одну точку.

Прямые состоят из точек, удовлетворяющих однородному линейному уравнению вида $xa + yb + zc = 0$, где не все коэффициенты нулевые.

Конечные недезарговы плоскости представлены 22 апреля 1905 года и опубликованы в 1907 году молодыми математиками — геометром Освальдом Вебленом и алгебраистом Джозефом Веддербарном. В частности, они построили недезаргову проективную плоскость порядка 9. Эта плоскость содержит 91 точку и 91 прямую.

Позже было доказано, что наименьший порядок недезарговой плоскости равен 9.

Статья Веблена и Веддербарна (1907) содержит формулировку трёх аксиом проективной плоскости.

1. Для двух точек A и B существует (α) одно и (β) только одно множество точек, называемое линией и содержащее обе точки A и B .
2. Для двух линий a и b существует (α) одна и (β) только одна точка, принадлежащая обоим линиям a и b .
3. Каждая линия содержит хотя бы три точки.

Авторы отмечают, что условие $2(\beta)$ следует из условий $2(\alpha)$ и $1(\beta)$. Заметим, что сегодня общепринято другое определение, в котором вместо третьего условия требуется существование четырёх точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

Дезаргова плоскость задана над телом, а Веблен и Веддербарн взяли алгебру, которую незадолго до того рассмотрел Леонард Юджин Диксон (Leonard Eugene Dickson, 1874–1954). Предложены две конструкции недезарговых плоскостей порядка 9.

Рассмотрим двумерное линейное пространство над полем вычетов по модулю три. Его элементами служат линейные комбинации $a + bj$, где a и b пробегает поле из трёх элементов $\{0, 1, 2\}$ с обычными операциями по модулю три, а через j обозначен новый порождающий элемент. Определим умножение, полагая $j^2 = 2$ и в общем случае

$$(a + bj)(c + dj) = \begin{cases} (ac - bd) + (bc + ad)j, & a^2 + b^2 \in \{0, 1\} \\ (ac + bd) + (bc - ad)j, & a^2 + b^2 = 2 \end{cases}$$

Мы предполагаем операции по модулю три, не указывая $(\text{mod } 3)$.

Нетривиальная часть таблицы умножения такова:

$\times$	2	j	$2j$	$1 + j$	$1 + 2j$	$2 + j$	$2 + 2j$
2	1	$2j$	j	$2 + 2j$	$2 + j$	$1 + 2j$	$1 + j$
j	$2j$	2	1	$2 + j$	$1 + j$	$2 + 2j$	$1 + 2j$
$2j$	j	1	2	$1 + 2j$	$2 + 2j$	$1 + j$	$2 + j$
$1 + j$	$2 + 2j$	$1 + 2j$	$2 + j$	2	$2j$	j	1
$1 + 2j$	$2 + j$	$2 + 2j$	$1 + j$	j	2	1	$2j$
$2 + j$	$1 + 2j$	$1 + j$	$2 + 2j$	$2j$	1	2	j
$2 + 2j$	$1 + j$	$2 + j$	$1 + 2j$	1	j	$2j$	2

Так определена ассоциативная алгебра с делением из девяти элементов:

$$\{0, 1, 2, j, 2j, 1 + j, 1 + 2j, 2 + j, 2 + 2j\}.$$

Эта алгебра некоммутативная, хотя выполнено свойство $xy = \pm yx$. Выполняется левая дистрибутивность $x(y + z) = xy + xz$, но не всегда выполняется правая, вообще говоря, $(y+z)x \neq yx + zx$. Поэтому рассматриваемая алгебра не является телом. Как известно, конечное тело является полем, но здесь нет противоречия.

Заметим, что мультипликативная группа изоморфна группе кватернионов

$$\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\},$$

где $i = 1 + j$ и $k = 1 + 2j$. Тогда $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ и $ki = -ik = j$.

Точки проективной плоскости соответствуют классам эквивалентных троек (x, y, z) элементов алгебры, среди которых хотя бы один отличен от нуля. Для ненулевого элемента κ две тройки координат (x, y, z) и $(\kappa x, \kappa y, \kappa z)$ определяют одну точку. Всего 91 точка.

Первая конструкция. Линии определяются линейными уравнениями. В отличие от обычной геометрии, здесь важно место коэффициентов линейных уравнений. Авторы предлагают рассматривать следующие уравнения: 81 вида $x + yb + zc = 0$, девять вида $y + zc = 0$ и ещё $z = 0$. Итого, получится 91 линия по 10 точек в каждой. Так определена недезаргова плоскость порядка 9.

Veblen O., Maclagan-Wedderburn J. H. Non-Desarguesian and non-Pascalian geometries. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1907. V. 8. P. 379–388.

<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1907-1500792-1>

Вторая конструкция. Преобразование точек с периодом 13

$$(x, y, z) \mapsto (x + z, 2x, 2y + 2z)$$

переводит точку в точку, но не всегда переводит линию в линию. Например, три точки $(1, 0, 0)$, $(0, j, 1)$ и $(j, j, 1)$, лежащие на одной линии $yj + z = 0$, переходят в точки $(1, 2, 0)$, $(1, 0, 2 + 2j)$ и $(1 + j, 2j, 2 + 2j)$, из которых первые две точки лежат на линии, заданной уравнением $x(1 + j) + y(1 + j) + z = 0$, но третья точка не лежит на этой линии.

Обозначим через $A_0, B_0, \dots, G_0$ семь точек с однородными координатами $(2, 0, 1)$, $(2 + 2j, j, 1)$, $(2 + j, 2j, 1)$, $(1 + 2j, 1 + j, 1)$, $(j, 2 + 2j, 1)$, $(1 + j, 1 + 2j, 1)$, $(2j, 2 + j, 1)$. Через $A_k, B_k, \dots, G_k$ для $k < 13$ обозначим точки, полученные k -ой степенью преобразования. Мы получим семь линий *новой* геометрии:

$$\begin{aligned} x + y + z = 0 &: A_0 A_1 A_3 A_9 B_0 C_0 D_0 E_0 F_0 G_0 \\ x + yj + z = 0 &: A_0 B_1 B_8 D_3 D_{11} E_2 E_5 E_6 G_7 G_9 \\ x + y(2j) + z = 0 &: A_0 C_1 C_8 E_7 E_9 F_3 F_{11} G_2 G_5 G_6 \\ x + y(1 + j) + z = 0 &: A_0 B_7 B_9 D_1 D_8 F_2 F_5 F_6 G_3 G_{11} \\ x + y(2 + 2j) + z = 0 &: A_0 B_2 B_5 B_6 C_3 C_{11} E_1 E_8 F_7 F_9 \\ x + y(1 + 2j) + z = 0 &: A_0 C_7 C_9 D_2 D_5 D_6 E_3 E_{11} F_1 F_8 \\ x + y(2 + j) + z = 0 &: A_0 B_3 B_{11} C_2 C_5 C_6 D_7 D_9 G_1 G_8. \end{aligned}$$

Эти семь линий пересекаются ровно в одной точке A_0 .

Преобразование и его степени дадут 84 других линий. При этом новые линии получаются из указанных семи линий сдвигом индексов по модулю 13. Итого, получится 91 линия по 10 точек в каждой. Так определена недезаргова плоскость порядка 9.

Veblen O., MacLagan-Wedderburn J. H. Non-Desarguesian and non-Pascalian geometries. *Trans. Amer. Math. Soc.* 1907. V. 8. P. 379–388.

<https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1907-1500792-1>



Освальд Веблен (Oswald Veblen, 1880–1960)

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Veblen/>

Конечные почти-поля (Цассенхауз, 1935)

$(Q; +, \cdot, 0)$ — левое почти-поле, если $(Q; +, 0)$ — абелева группа, Q^* — группа, дистрибутивность слева $c(a + b) = ca + cb$, выполнено $0 \cdot a = 0$ и уравнение $ax = bx + c$ однозначно разрешимо для всех $a \neq b$.

Нетривиальные примеры конечных почти-полей нашёл Диксон (1905).

В 1935 году Ганс Цассенхауз (Hans Julius Zassenhaus, 1912–1991) классифицировал конечные почти-поля. Кроме полей, существует бесконечное множество конечных почти-полей Диксона, порождаемых двумя элементами. И ещё 7 других конечных почти-полей порядка p^2 , где $p \in \{5, 7, 11, 23, 29, 59\}$, а для $p = 11$ два почти-поля.

Zassenhaus H. Über endliche Fastkörper. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*. 1935. V. 11. P. 187–220.

<https://doi.org/10.1007/BF02940723>



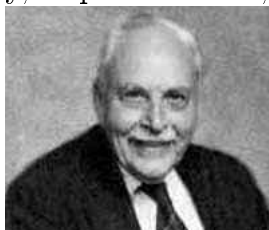
Ганс Цассенхауз (Hans Julius Zassenhaus, 1912–1991)

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zassenhaus/>

Работы 1940-х

Новые недезарговы плоскости нашёл Маршалл Холл (Marshall Hall, 1910–1990).

Hall M. Projective planes. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1943. V. 54. No. 2. P. 229–277. Presented to the Society, September 10, 1940.



М. Холл

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hall_Marshall/

В 1949 году Ричард Хьюберт Брук (Richard Hubert Bruck, 1914–1991) и Герберт Джон Райзер (Herbert John Ryser, 1923–1985) нашли ограничения на порядок конечной проективной плоскости.

Теорема Брука–Райзера. Если $n \equiv 1$ или $2 \pmod{4}$ и свободная от квадратов часть числа n содержит хотя бы один простой множитель вида $4k + 3$, то не существует конечной проективной плоскости порядка n .

В частности, не существует проективной плоскости порядка 6 или 14.

Bruck R. H., Ryser J. H. The non-existence of certain finite projective planes. *Canadian Journal of Mathematics*. 1949. V. 1. P. 88–93.

Parshall K. H. Defining a mathematical research school: the case of algebra at the University of Chicago, 1892–1945. *Historia Mathematica*. 2004. V. 31. P. 263–278.

Обзоры конечных плоскостей:

Картеси Ф. Введение в конечные геометрии. / Пер. с англ. Ф.Л. Варпаховского и А.С. Солодовникова. М.: Наука, 1980. 320 с.

Weibel Ch. Survey of non-Desarguesian planes. *Notices of the AMS*. 2007. V. 54. No. 10. P. 1294–1303.

Coulborn C.J., Dinitz J.H. (eds) *Handbook of Combinatorial Designs*. Taylor & Francis, 2007.

Классификация проективных плоскостей порядка 25:

Stoichev S.D., Gezek M. Unitals in projective planes of order 25. *Mathematics in Computer Science*. 2023. V. 17. No. 5. P. 1–19.

Почти-поля и квазиполя, включая историческую справку:

Кравцова О. В., Левчук В. М. Вопросы строения конечных почти-полей. *Тр. ИММ УрО РАН*. 2019. Т. 25. Вып. 4. С. 107–117.

Кравцова О. В., Логинова В. С. Вопросы строения конечных квазиполей Холла. *Тр. ИММ УрО РАН*. 2024. Т. 30. Вып. 1. С. 128–141.

Благодарю за внимание!

Аннотация

Близкие к теме доклада результаты об ортогональных латинских квадратах были известны уже в XVIII веке. Их получили корейский математик Чхве Сок Чон (Choi Seok-Jeong, 1646–1715) и позже Леонард Эйлер (Leonhard Euler, 1707–1783). В середине XIX века симметричные конфигурации, которые можно рассматривать как обобщение понятия конечной проективной плоскости, изучают Юлиус Плюккер (Julius Plücker, 1801–1868), Христиан фон Штаудт (Karl Georg Christian von Staudt, 1798–1867), Томас Киркман (Thomas Penyngton Kirkman, 1806–1895) и другие математики. Но мы подробно рассмотрим исследования конечных проективных плоскостей, начиная с достижений Германа Винера (Hermann Wiener, 1857–1939), Джино Фано (Gino Fano, 1871–1951), Федерико Энрикеса (Federigo Enriques, 1871–1946), Элиакима Мура (Eliakim Moore, 1862–1932) и Давида Гильберта (David Hilbert, 1862–1943) в области чистой математики в конце XIX века, а также некоторые работы начала XX века. К 1937 году было найдено много примеров недезарговых плоскостей, изменивших взгляд на основания геометрии. Важное изменение произошло в 1938 году, когда Радж Чандра Боуз (Raj Chandra Bose, 1901–1987) дал конечным плоскостям новое применение в сельском хозяйстве. При этом Боуз независимо повторил многие результаты, которые Э. Мур опубликовал ещё в 1896 году в *Tactical Memoranda*. Следующим шагом для усиления интереса к конечным плоскостям послужило создание кодов, исправляющих ошибки. Расцвела новая область прикладной математики. Однако приложения не будут представлены в деталях.