*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2017. Том 58, № 6*

*УДК 510.223+510.225*

# ГЕНЕРИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО МНОЖЕСТВА $\Sigma$ ПО СОЛОВЕЮ

**В. Г. Кановей, В. А. Любецкий**

**Аннотация.** Доказано, что множество $\Sigma$ по Соловею является генерическим множеством над исходной моделью в смысле форсинга, отношение порядка которого расширяет отношение порядка данного форсинга.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.610

**Ключевые слова:** генеричность, множество $\Sigma$ по Соловею.

**1. Введение.** Статья Соловея [1] принадлежит к классике форсинга. Ее главный результат — построение указанной в ее названии модели, а также близкой модели, в которой измеримыми по Лебегу утверждаются только определимые множества, но аксиома выбора верна в отличие от первой модели, в которой она по необходимости нарушена. В этой статье Соловей ввел несколько методов в теории множеств, ключевых для последующего развития метода форсинга. Одним из них была «важная лемма» из [1, разд. 4.4], которая утверждает, что любое генерическое расширение исходной модели также является генерическим расширением любой промежуточной модели в смысле определенного форсинга $\Sigma$, который является подмножеством исходного форсинга.

В теореме 3 данной статьи доказано, что, в контексте построения Соловея, и само множество $\Sigma$ генерическое над исходной моделью в смысле форсинга $\mathbb{Q}$, близко связанного с данным форсингом $\mathbb{P}$ в том смысле, что его область равна области данного форсинга $\mathbb{P}$, но само отношение порядка $\leq_{\mathbb{Q}}$ $\subseteq$-расширяет порядок $\leq_{\mathbb{P}}$ данного форсинга.

В качестве приложения этой теоремы мы излагаем краткое доказательство следующего результата (теорема 4): любая подмодель генерического по Коэну расширения некоторой модели сама является генерическим по Коэну расширением исходной модели (либо совпадает с последней), а с другой стороны, само данное расширение является генерическим по Коэну расширением этой промежуточной подмодели (либо опять совпадает с последней). Этот результат в принципе известен для специалистов в области форсинга, но ни одного опубликованного доказательства нам неизвестно.

**2. Множество Соловея $\Sigma$.** Упомянутый результат Соловея состоит в следующем.

Работа В. Г. Кановея выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 13–01–00006, 17–01–00705). Работа В. А. Любецкого выполнена за счет Российского научного фонда (грант 14–50–00150).

**Предложение 1.** *Предположим, что $\mathbb{P}$ — форсинг в теоретико-множественном универсуме $\boldsymbol{V}$, множество $G \subseteq \mathbb{P}$ является $\mathbb{P}$-генерическим множеством над $\boldsymbol{V}$, $t \in \boldsymbol{V}$ есть $\mathbb{P}$-имя, $X = t[G] \subseteq \boldsymbol{V}$* (*через $t[G]$ обозначается $G$-оценка, или интерпретация, имени $t$; $t[G] \in \boldsymbol{V}[G]$*). *Тогда существует такое множество $\Sigma = \Sigma(X, t) \in \boldsymbol{V}[G]$, $\Sigma \subseteq \mathbb{P}$, что*

(I) *$\Sigma$ замкнуто вниз в $\mathbb{P}$, т. е. если $q \in \Sigma$, $p \in \mathbb{P}$ и $p \leq q$, то $q \in \Sigma$ ($p \leq q$ означает, что вынуждающее условие $q$ более сильное, чем $p$);*

(II) $\boldsymbol{V}[\Sigma] = \boldsymbol{V}[X]$;

(III) *$G \subseteq \Sigma$ и $G$ $\Sigma$-генерическое над $\boldsymbol{V}[X]$;*

(IV) *класс $\boldsymbol{V}[G]$ есть $\Sigma$-генерическое расширение модели $\boldsymbol{V}[X] = \boldsymbol{V}[\Sigma]$;*

(V) *если множество $G' \subseteq \Sigma$ $\Sigma$-генерическое над $\boldsymbol{V}[X]$, то $G'$ $\mathbb{P}$-генерическое над $\boldsymbol{V}$ и, кроме того, $t[G'] = X$.*

Доказательство (набросок построения $\Sigma$, см. подробное доказательство в [1, 4.4] или [2, 13.3.2]). Полагаем $\Sigma = \mathbb{P} \setminus \bigcup_{\xi<\vartheta} A_\xi$, где ординал $\vartheta$ определяется в ходе построения (см. ниже), а последовательность множеств $A_\xi \subseteq \mathbb{P}$ — в $\boldsymbol{V}[G]$ следующим образом.

(1) $A_0$ состоит из всех «условий» $p \in \mathbb{P}$, вынуждающих $\breve{x} \in t$ для некоторого $x \in \boldsymbol{V} \setminus X$ или $\breve{x} \notin t$ для некоторого $x \in X$ (если $x \in \boldsymbol{V}$, то $\breve{x}$ — каноническое имя для $x$).

(2) $A_{\xi+1}$ состоит из всех таких «условий» $p \in \mathbb{P}$, для которых существует плотное множество $D \in \boldsymbol{V}$ в $\mathbb{P}$, удовлетворяющее следующему: если $q \in D$ и $p \leq q$, то $q \in A_\xi$.

(3) $A_\lambda = \bigcup_{\xi<\lambda} A_\xi$ для предельных ординалов $\lambda$.

Итак, каждое «условие» $p \in A_0$ прямо противоречит допущению, что $t$ — имя для $X$, по (1), и это противоречие сохраняется в пп. (2) и (3) индуктивного определения для все больших индексов $\xi$ соответственно во все более непрямой форме. Эта $\subseteq$-возрастающая последовательность множеств $A_\xi \subseteq \mathbb{P}$ стабилизируется на каком-то предельном ординале $\vartheta \in \boldsymbol{V}$, и имеем множества $A = \bigcup_{\xi<\vartheta} A_\xi$ и $\Sigma = \mathbb{P} \setminus A$. $\square$

Следующие работы (см. [3] и др.) о промежуточных подмоделях генерических расширений показали, что не только $\boldsymbol{V}[G]$ является генерическим расширением промежуточной модели $\boldsymbol{V}[X]$ согласно (III), но и сама промежуточная модель $\boldsymbol{V}[X]$ есть генерическое расширение исходной модели $\boldsymbol{V}$ (см. также [4, факт 11; 5, 15.43; 6, 10.10; 7; 8, разд. 1] среди других ссылок). Теорема 3 ниже (наш главный результат) свидетельствует, что на самом деле уже само $\Sigma(X, t)$ является генерическим множеством над $\boldsymbol{V}$ в смысле одного форсинга, тесно связанного с данным форсингом $\mathbb{P}$.

**3. Генеричность множества $\Sigma$.** Рассуждая в контексте предложения 1, определим новый частичный порядок $\leq_t$ на $\mathbb{P}$, который продолжает данное отношение порядка $\leq = \leq_{\mathbb{P}}$, так: $p \leq_t q$, если «условие» $q$ $\mathbb{P}$-вынуждает над $\boldsymbol{V}$, что $\breve{p} \in \Sigma(\breve{t}[\underline{G}], \breve{t})$. Другими словами, для $p \leq_t q$ необходимо и достаточно, чтобы соотношение $p \in \Sigma(X, t)$ выполнялось всякий раз, когда множество $G \subseteq \mathbb{P}$ генерическое над $\boldsymbol{V}$, $X = t[G]$ и $q \in G$.

**Лемма 2.** *Отношение $\leq_t$ является отношением частичного порядка на $\mathbb{P}$, принадлежит $\boldsymbol{V}$ и продолжает данный порядок $\leq = \leq_{\mathbb{P}}$, т. е. $\leq_{\mathbb{P}} \subseteq \leq_t$ (или, что равносильно, соотношение $p \leq_{\mathbb{P}} q$ влечет $p \leq_t q$).*

Доказательство. Предположим, что $p \le_t q \le_t r$. Чтобы вывести $p \le_t r$, допустим, что множество $G \subseteq \mathbb{P}$ генерическое над $\boldsymbol{V}$, $r \in G$ и $X = t[G]$; требуется проверить, что $p \in \Sigma(X,t)$.

По определению $q \in \Sigma(X,t)$. Рассмотрим любое множество $G' \subseteq \Sigma(X,t)$, $\Sigma(X,t)$-генерическое над $\boldsymbol{V}[X]$ и содержащее $q$. Тогда $G'$ $\mathbb{P}$-генерическое над $\boldsymbol{V}$ и $t[G'] = X$ согласно (V). Поэтому $p \in \Sigma(X,t)$, так как $p \le_t q$, что и требовалось.

Наконец, предположим, что $p \le q$, и выведем $p \le_t q$. Рассмотрим любое множество $G \subseteq \mathbb{P}$, генерическое над $\boldsymbol{V}$ и содержащее $q \in G$, и пусть $X = t[G]$. Чтобы доказать $p \in \Sigma(X,t)$, заметим, что $q \in \Sigma(X,t)$ согласно (III); теперь $p \in \Sigma(X,t)$ по (I). $\square$

**Теорема 3** (в условиях предложения 1). *Пусть $G \subseteq \mathbb{P}$ является генерическим множеством над $\boldsymbol{V}$ и $X = t[G]$. Тогда множество $\Sigma = \Sigma(X,t)$ само генерическое над $\boldsymbol{V}$ в смысле форсинга $\mathbb{P}_t = \langle \mathbb{P}; \le_t \rangle$.*

Доказательство. Допустим, что $p \in \mathbb{P}$, $q \in \Sigma$ и $p \le_t q$. Чтобы вывести $p \in \Sigma$, рассмотрим любое множество $G' \subseteq \Sigma$, $\Sigma$-генерическое над $\boldsymbol{V}[X]$ и содержащее $q$. Тогда $G'$ $\mathbb{P}$-генерическое над $\boldsymbol{V}$ и $t[G'] = X$ согласно (V). Стало быть, $p \in \Sigma$, так как $p \le_t q$.

Докажем, что любые два «условия» $p, q \in \Sigma$ $\le_t$-совместны в $\Sigma$. Ввиду генеричности имеется «условие» $r \in G$, вынуждающее как $\breve{p} \in \Sigma(\breve{t}[\underline{G}], \breve{t})$, так и $\breve{q} \in \Sigma(\breve{t}[\underline{G}], \breve{t})$. Тогда по определению получаем $p \le_t r$ и $q \le_t r$, а с другой стороны, $r \in \Sigma$ согласно (III).

Проверим само условие генеричности. Рассмотрим произвольное $\le_t$-плотное множество $D \subseteq \mathbb{P}$ (не обязательно плотное по отношению к исходному порядку $\le$). Пусть, напротив, какое-то «условие» $p \in G$ вынуждает, что $\breve{D} \cap \Sigma(\breve{t}[\underline{G}], \breve{t}) = \varnothing$. Согласно плотности имеется «условие» $q \in D$, удовлетворяющее $p \le_t q$.

Теперь рассмотрим произвольное множество $G' \subseteq \mathbb{P}$, $\mathbb{P}$-генерическое над $\boldsymbol{V}$ и содержащее $q$, и пусть $X' = t[G']$. Тогда $q \in G' \subseteq \Sigma' = \Sigma(X', t)$, откуда по доказанному следует $p \in \Sigma'$.

Наконец, рассмотрим множество $G'' \subseteq \Sigma'$, $\Sigma'$-генерическое над $\boldsymbol{V}[X']$ и содержащее $p$. Тогда $G''$ $\mathbb{P}$-генерическое над $\boldsymbol{V}$ и $t[G''] = X'$ согласно (V). Таким образом, $q \in D \cap \Sigma(t[G''], t)$ и $p \in G''$, и приходим к противоречию с выбором «условия» $p$. $\square$

**4. Промежуточные подмодели генерических расширений по Коэну.** Напомним, что генерические расширения по Коэну используют форсинг $\mathbb{C} = 2^{<\omega}$ (все конечные диадические последовательности).

**Теорема 4** (фольклор форсинга). *Пусть точка $a \in 2^\omega$ генерическая по Коэну над универсумом $\boldsymbol{V}$ и $X \in \boldsymbol{V}[a]$, $X \subseteq \boldsymbol{V}$. Тогда*

(i) *либо $X \in \boldsymbol{V}$, либо модель $\boldsymbol{V}[X]$ есть генерическое по Коэну расширение универсума $\boldsymbol{V}$;*

(ii) *либо $\boldsymbol{V}[X] = \boldsymbol{V}[a]$, либо $\boldsymbol{V}[a]$ есть генерическое по Коэну расширение модели $\boldsymbol{V}[X]$.*

Доказательство. Коэнов форсинг $\mathbb{C} = 2^{<\omega}$, очевидно, счетен. Поэтому при $\mathbb{P} = \mathbb{C}$ как форсинг $\Sigma$ в предложении 1, так и форсинг $\mathbb{Q}$ в теореме 3 счетны, а счетный форсинг, как известно, либо тривиален, либо производит именно коэновское расширение. $\square$

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Solovay R. M.* A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. Math. 1970. V. 92. P. 1–56.
**2.** *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* Современная теория множеств: абсолютно неразрешимые классические проблемы. М.: МЦНМО, 2013.
**3.** *Grigorieff S.* Intermediate submodels and generic extensions of set theory // Ann. Math. 1975. V. 101. P. 447–490.
**4.** *Fuchs G., Hamkins J. D., Reitz J.* Set-theoretic geology // Ann. Pure Appl. Logic. 2015. V. 166, N 4. P. 464–501.
**5.** *Jech T.* Set theory. The third millennium revised and expanded. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 2003.
**6.** *Kanamori A.* The higher infinite. Large cardinals in set theory from their beginnings. Berlin: Springer, 2003.
**7.** *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* Обобщение одной конструкции Соловея // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 6. С. 1341–1350.
**8.** *Zapletal J.* Terminal notions in set theory // Ann. Pure Appl. Logic. 2001. V. 109, N 1–2. P. 89–116.

*Статья поступила 2 ноября 2016 г.*

Кановей Владимир Григорьевич (автор для контактов)
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Большой Каретный переулок, 19, стр. 1, Москва 127051;
Российский университет транспорта (МИИТ),
ул. Образцова, 9, стр. 9, Москва 127994
kanovei@iitp.ru

Любецкий Василий Александрович
Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича РАН,
Большой Каретный переулок, 19, стр. 1, Москва 127051
lyubetsk@iitp.ru