Труды Математического института АН СССР
1988, том 182

УДК 510.225

В. Н. ГРИШИН, В. Г. КАНОВЕЙ

О РАБОТАХ ПО ДЕСКРИПТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ, ВЫПОЛНЕННЫХ В МИАНе

Предисловие

В начале XX в. в теории функций зародилось новое направление — дескриптивная теория функций. Эта теория, изучающая функции и множества в связи с их способом задания, стала больше известна под названием дескриптивной теории множеств. Вклад сотрудников МИАНа в развитие дескриптивной теории множеств столь фундаментален и разнообразен, что рассказ об этих работах по существу будет обзором основных направлений развития всей дескриптивной теории множеств.

Одним из признанных основателей дескриптивной теории множеств был выдающийся ученый-математик и педагог Н. Н. Лузин, ставший заведовать Отделом теории функций МИАНа со дня открытия института в Москве в 1934 г. Среди сотрудников отдела были ученики Н. Н. Лузина: П. С. Новиков, в то время также ставший известным ученым благодаря своим работам по неявным функциям и отделимости, Л. В. Келдыш, А. А. Ляпунов, несколько позже к ним присоединился В. Я. Арсенин.

В силу обширности фактического материала и ограниченности объема статьи авторы не смогли поместить изложение идей, на которых построены доказательства теорем, обсуждаемых ниже. В отношении изложения доказательства теорем классической дескриптивной теории множеств мы можем рекомендовать работы Н. Н. Лузина [1] или [2, с. 552—616]), его лекции [3], а также статьи [4] и [5]. Много интересной информации читатель найдет в обзорах [6] (см. также [7, с. 96—107]), [8] (см. также [7, с. 108—116]), [9, 10].

Работы по дескриптивной теории множеств велись в МИАНе примерно до начала 50-х годов, когда в связи с определенным исчерпанием классических методов обозначились принципиальные трудности в решении стоявших перед дескриптивной теорией проблем. В последующие 30 лет дескриптивная теория после периода застоя, длившегося примерно лет пятнадцать, стала вновь развиваться, в том числе и в Советском Союзе. За это время были получены ответы на почти все классические вопросы дескриптивной теории множеств, хотя и не в том первоначальном смысле слова «ответ», который подразумевался при их постановке. Речь идет о результатах невыводимости в аксиоматической теории множеств Цермело—Френкеля формул, выражающих соответствующие дескриптивные утверждения. Эти результаты, а также другие современные исследования по дескриптивной теории представлены в книге [11, гл. 8 и Добавление] и в книге [12].

Введение

В 1898 г. Эмиль Борель в своей книге [13], посвященной математическому анализу и теории интегрирования, вводит понятие «измеримого» множества, называя так всякое множество действительных чисел, которое можно получить из интервалов повторным счетнократным применением двух операций: разности двух множеств, когда вычитаемое составляет часть уменьшаемого, и объединения счетного числа попарно непересекающихся множеств. Выбор операций не случаен: они позволяют однозначно и очевидным образом (если отвлечься от случая бесконечной меры) приписать определенную меру результату, если известны меры исходных множеств. Введенные Э. Борелем множества получили первоначально название множеств, измеримых по Борелю, а в более поздних работах они называются B-измеримыми или B-множествами.

Несколько позже 1905 г. Рене Бэр начал исследование функций, которые можно получить из непрерывных действительных функций повторным счетнократным применением операции поточечного предела бесконечной последовательности функций. Такие функции стали называться бэровскими.

Глубокий анализ этих двух совершенно новых типов математических объектов был проведен Анри Лебегом в его мемуаре «Об аналитически представимых функциях» [14]. Выход этой работы ознаменовал зарождение новой математической дисциплины — дескриптивной теории множеств, со своим собственным предметом, который составили «называемые» множества (т. е. те множества, которые допускают конкретное построение, без обращения к аксиоме выбора) и со своей собственной методикой, представляющей собой своеобразный синтез методов канторовской теории множеств («диагональные» рассуждения, трансфинитные построения, систематическое обращение к трансфинитным числам) с геометрической наглядностью аналитических конструкций.

Однако круг идей французских аналитиков оказался недостаточным для более существенного развития новой теории. В частности, оставалась нерешенной фундаментальная проблема мощности B-множеств. Полученное П. С. Александровым в 1916 г. решение этой проблемы стало отправным пунктом интенсивного развития дескриптивной теории множеств, продолжавшегося в течение более чем двух десятилетий и связанного в основном с деятельностью отечественных математиков.

Для доказательства того, что каждое несчетное B-множество действительных чисел имеет континуальную мощность, Александров ввел в работе [15] свою знаменитую A-операцию, принесшую значительно более мощное средство для построения точечных множеств, чем операции типа счетного объединения и пересечения. В чем состоит эта операция? Для ее определения введем некоторые обозначения. Пусть N обозначает множество всех натуральных чисел, а Seq — множество всех конечных последовательностей $\langle n_1, \ldots, n_k\rangle$ $(k \geqslant 0)$ натуральных чисел (включая пустую последовательность при $k=0$). Если X — некоторое множество, то через $\mathscr{P}X$ обозначим множество всех подмножеств множества X. Запись U^V, где U и V — произвольные множества, обозначает множество всех функций вида $V \to U$. A-операция является далеко идущим обобщением операций счетного объединения $\bigcup\colon (\mathscr{P}X)^N \to \mathscr{P}X$ и пересечения $\bigcap\colon (\mathscr{P}X)^N \to \mathscr{P}X$. Она является функцией вида

$$A : (\mathscr{P}X)^{\mathrm{Seq}} \to \mathscr{P}X$$

и определяется равенством

$$A(H) = \bigcup_{\varphi \in N^N} \bigcap_{n \in N} H(\varphi \restriction n)$$

где $H \in (\mathscr{P}X)^{\mathrm{Seq}}$, а $\varphi \upharpoonright n$ — конечная последовательность, совпадающая с первыми n значениями функции φ.

Если X — множество действительных чисел и значениями функции H, к которой применяется A-операция, являются интервалы, то говорят, что A-операция действует на интервалы действительной прямой.

М. Я. Суслин определил в [16] класс A-множеств, получаемых (однократным) действием A-операции на интервалы действительной прямой. (A-множества называются также аналитическими или суслинскими множествами.)

Вот основные теоремы об A-множествах, полученные М. Я. Суслиным:

Всякое B-множество является A-множеством, но существует A-множество, которое не есть B-множество.

Для того чтобы A-множество было B-множеством, необходимо и достаточно, чтобы его дополнение было также A-множеством.

Всякое несчетное A-множество содержит совершенное подмножество [1] *и вследствие этого имеет мощность континуума* (по сути этот результат содержится в заметке П. С. Александрова [15]).

Проекция плоского B-множества на ось OX будет A-множеством, и, обратно, каждое линейное A-множество, т. е. расположенное на оси OX, является проекцией некоторого плоского B-множества класса G_δ [2].

Все эти результаты опубликованы в заметке [16], а следующая в том же номере журнала статья [17] содержит еще несколько теорем об A-множествах, в том числе и теоремы об их измеримости по Лебегу и свойстве Бэра. Доказательства этих свойств A-множеств появились в более обстоятельной работе [18].

Формально эти первые исследования по A-множествам относились только к множествам действительных чисел. Однако несколько позже их удалось перенести (с минимальными изменениями в доказательствах) на множества евклидовых пространств E_n произвольной данной размерности n и, вообще, на множества любого фиксированного полного метрического сепарабельного пространства без изолированных точек. В этом общем случае A-множества определяются действием A-операции на замкнутые множества, а B-множества — повторным счетнократным действием на те же замкнутые множества операций дополнения, счетного объединения и счетного пересечения.

В работах [16, 17, 18] по A-множествам выделен еще один тип точечных множеств — CA-множества, т. е. множества, являющиеся дополнениями к A-множествам (они называются также аналитическими дополнениями). Оказалось, что существуют CA-множества, не являющиеся A-множествами, и обратно.

Анализируя операции проекции и дополнения, с помощью которых из B-множеств (даже множеств G_δ) можно получить сначала A-множества, а затем и CA-множества, Н. Н. Лузин пришел в первой половине 20-х годов к идее проективного множества и проективной иерархии. Первый уровень этой иерархии составляют классы A-, CA-, B-, A-множеств, CA-множеств и B-множеств соответственно, которые обозначаются также через A_1, CA_1, B_1. Проектируя CA-множества, лежащие в евклидовых пространствах E_n, на их подпространства E_m размерности $m < n$ Лузин получает класс A_2-множеств. Дополнения последних составляют класс CA_2-множеств, а общая часть классов A_2 и CA_2 (т. е. все те множества, которые одновременно являются A_2-множествами и CA_2-множествами) обозначается через B_2 (в точной аналогии с первым уровнем).

---

[1] Множество действительных чисел называется совершенным, если оно замкнуто, непусто и не содержит изолированных точек.

[2] Класс G_δ получается действием операции счетного пересечения на открытые множества.

Чтобы теперь получить третий уровень проективной иерархии (классы A_3, CA_3, B_3), нужно проектировать CA_2-множества, брать их дополнения и образовать общую часть полученных двух классов. И так далее.

Проективные классы A_n, CA_n, B_n расширяются с возрастанием индекса n. Кроме того, при любом значении n мы имеем строгое включение $A_n \cup CA_n \subsetneqq \subsetneqq B_{n+1}$. Множество называется проективным, если оно принадлежит хотя бы одному из проективных классов (а тогда, в силу сказанного, оно будет принадлежать и всем классам с большими индексами).

Введенная Лузиным в [19] концепция проективного множества и проективной иерархии в известном смысле значительно опередила известные к тому времени технические средства дескриптивной теории: ведь до выхода в 1935 г. (т. е. через 10 лет после открытия проективных множеств) работы П. С. Новикова [20] о проективных множествах второго и более высоких уровней в сущности ничего не было известно.

Таким, в общих чертах, было состояние дескриптивной теории множеств ко второй половине 20-х годов, когда в центре внимания специалистов оказались исследования по теории неявных B-функций.

1. Исследования по неявным B-функциям

Исследования были начаты Лебегом в этом направлении в уже упоминавшемся выше мемуаре [14]. Анализируя бэровские функции, А. Лебег нашел характеристическое свойство этих функций — свойство B-измеримости, состоящее для функции n действительных переменных в том, что для любой пары действительных чисел $a < b$ множество

$$\{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle : a < f(x_1, \ldots, x_n) < b\}$$

является B-измеримым. Функции, обладающие этим свойством, называются B-измеримыми, или просто B-функциями. Область определения B-функции может быть и собственным подмножеством данного пространства, при этом обязательно B-измеримым. Итак, бэровские функции — это в точности всюду определенные B-функции.

Так вводится понятие явной B-функции. Теперь перейдем к неявным функциям. Пусть задана B-измеримая функция $F(x, y)$ двух действительных переменных, всюду определенная на евклидовой плоскости OXY. Равенство $F(x, y) = 0$ можно понимать (это делает Лебег в [14]) как соотношение, задающее неявную (вообще говоря, неоднозначную) зависимость y от x. Эта зависимость — обозначим ее через f — ставит в соответствие каждому значению аргумента x не одно, а целое множество значений переменной y: а именно множество всех точек вертикального сечения $P_x = \{y: \langle x, y\rangle \in P\}$ плоского множества $P = \{\langle x, y\rangle : F(x, y) = 0\}$ — графика неявной функции f. В область определения f зачисляются все те точки x, которым отвечают непустые сечения P_x.

Функции f, получаемые указанным способом из всюду определенных на OXY B-функций F, называются неявными B-функциями, см. [5]. Данное определение легко распространяется на функции многих действительных переменных.

Исследованиями Лебега [14] и Лузина [21] было установлено, что графики неявной и явной B-функций являются B-множествами. Обратно, каждое B-множество P, расположенное в плоскости OXY, является графиком некоторой неявной B-функции (в качестве порождающей B-функции F можно взять функцию, принимающую значение 1 во всех точках P и значение 0 вне P. При этом если множество P однозначно (т. е. каждое его вертикальное сечение P_x содержит не более одной точки), то это множество будет графиком некоторой явной B-функции, областью определения которой является проекция $\text{Пр}_{OX}P$ ее графика P на ось OX. Таким образом, изучение B-функций (явных или неявных) равносильно изучению плоских B-множеств. Однозначные плоские множества называются также униформными.

Исследования по B-функциям концентрировались вокруг следующих двух проблем, сформулированных Лузиным (см. [21]):

(I) Проблема проекции. *Будет ли B-измеримой проекция данного плоского B-множества?*

(II) Проблема униформизации. *Существует ли для данного плоского B-множества P однозначное B-множество $Q \subseteq P$ такое, что* $\text{Пр}_{OX}Q = \text{Пр}_{OX}P$? (о таком множестве Q говорят, что оно униформизует множество P).

Проблема (I) решается положительно для всех однозначных B-множеств (см. [21]), но отрицательно в общем случае. Последнее следует из результатов Суслина об A-множествах (см. Введение). Проблема (II) для общего случая также решается отрицательно. Соответствующий контрпример доставляет любое плоское B-множество, проекция которого на ось OX не является B-множеством.

В свете этих результатов первоочередную роль стали играть следующие две задачи: получить отрицательное решение проблемы униформизации посредством множества с B-измеримой проекцией и распространить положительное решение обеих проблем на более широкую часть плоских B-множеств. Обе эти задачи были решены П. С. Новиковым вскоре после окончания им Московского университета в 1925 г.

В отношении первой задачи П. С. Новиков строит пример плоского множества, проекция которого равна всей оси OX, такого, что проблема униформизации B-множеством и даже A-множеством решается отрицательно. Дополнительно отметим, что построенное П. С. Новиковым множество является плоским множеством класса G_δ, чем достигается наилучший возможный результат, поскольку, как мы увидим ниже, для F_σ-множеств [1] эта проблема решается положительно.

Работа над второй задачей (значительно более интересной и богатой) привела П. С. Новикова к выделению класса счетнозначных неявных функций, т. е. таких, графики которых имеют не более чем счетные вертикальные сечения P_x. Такие графики называются также счетнозначными множествами. П. С. Новиков показывает, что счетнозначные B-множества в отношении проблем (I) и (II) подобны однозначным, т. е. обе эти проблемы решаются положительно для таких множеств.

Работа Новикова [22], содержащая доказательства приведенных результатов, была опубликована только в 1931 г., хотя сами результаты были получены им гораздо раньше — во всяком случае до 1927 г., о чем свидетельствует их изложение в [21] со ссылкой на «изыскания П. С. Новикова». Отметим, что попутно Новиков получил важные результаты, касающиеся отделимости, и ввел в дескриптивную теорию мощный метод сравнения индексов. Но об этом в следующем разделе.

В конце 30-х годов предметом исследования стали B-множества с замкнуты-

[1] Класс F_σ-множеств получается из замкнутых множеств действием операции счетного объединения.

ми сечениями и B-множества с сечениями класса F_σ, для которых в работах П. С. Новикова [23] (или [7, с. 86—87]), В. Я. Арсенина [24, 25] и Е. А. Щеголькова [26] было установлено, что проблемы (I) и (II) решаются положительно. Другими словами, если плоское B-множество таково, что все его вертикальные сечения имеют класс F_σ, то проекция такого множества на OX B-измерима, и это множество допускает униформизацию B-множеством.

Остановимся на некоторых других задачах в теории неявных B-функций. В том случае, когда не все сечения данного плоского B-множества P обладают интересущим нас свойством, можно ставить вопрос о строении множества X всех точек x из проекции $\text{Пр}_{OX} P$, которым отвечают сечения P_x множества P, обладающие этим свойством. Оказалось, что это множество X будет CA-множеством в случаях, когда рассматриваются одноэлементные сечения (Лузин [3]), не более чем счетные сечения (С. Браун [27]), замкнутые сечения (Новиков [23]) и сечения класса F_σ (Арсенин [24, 25]).

Можно ставить вопрос о расщеплении (т. е. представлении в виде дизъюнктного объединения) счетнозначного B-множества на счетное число однозначных B-множеств. Задача эта была выполнена Н. Н. Лузиным в [3], доказавшим, что такое расщепление всегда возможно. (Довольно сложное доказательство этой теоремы опирается на одну техническую лемму, принадлежащую П. С. Новикову, см., например, [4] или [5]. Возможно, именно это послужило Лузину основанием назвать в [21] именно П. С. Новикова автором теоремы о расщеплении счетнозначных B-множеств. Однако во многих других работах, в частности написанных самим П. С. Новиковым, автором этой теоремы называется Н. Н. Лузин, см. [6, 4, 5] и др.).

Таким образом, к началу 40-х годов исследования одноэлементных, счетных, замкнутых и F_σ сечений плоских B-множеств приняли в работах отечественных математиков в целом законченный вид. В дальнейшем в этом направлении был получен еще один интересный результат: французский математик Сан-Раймон установил, что всякое плоское B-множество с сечениями класса F_σ является объединением счетного числа B-множеств с замкнутыми сечениями, см. [28]. Этот результат позже удалось распространить на множества с сечениями более высоких борелевских классов, см. работы [29, 30].

Заканчивая этот раздел, отметим один существенный момент, связанный с формулировками теорем о замкнутых и F_σ сечениях B-множеств. Мы изложили эти результаты применительно к B-множествам евклидовой плоскости и действительным (однозначным и многозначным) B-функциям одного действительного переменного — именно в таком виде они, кстати, публиковались в оригинальных работах. Со временем, однако, действительная прямая уступила свою роль основного дескриптивного пространства бэровскому пространству I, которое может быть реализовано, скажем, в виде множества всех иррациональных действительных чисел. При переходе к бэровскому пространству приведенные выше теоремы о замкнутых и F_σ сечениях уже перестают быть верными. Это объясняется тем, что любое A-множество бэровского пространства I является проекцией некоторого замкнутого (а не G_δ, как в евклидовом случае) подмножества P в $I \times I$, имеющего, естественно, только замкнутые сечения.

Однако эти теоремы сохраняют силу и в случае бэровских пространств, если вместо замкнутых и F_σ сечений рассматривать соответственно компактные и σ-компактные сечения, причем главные моменты доказательств также сохраняются. Систематическое изложение обсуждаемых теорем в такой форме можно найти, например, в книге [12], а некоторых из них — в статье [4].

2. Отделимость и принцип сравнения индексов на первом проективном уровне

Идея отделимости сыграла очень важную роль в развитии классической дескриптивной теории множеств. В частности, доказательства большинства теорем о неявных функциях и плоских множествах, сформулированных в предыдущем разделе, используют тот или иной вариант отделимости.

Известны следующие два основных принципа отделимости для A-множеств, доказанных Н. Н. Лузиным:

Первая теорема отделимости [21]. *Пару непересекающихся множеств X_1 и X_2 можно отделить одно от другого парой B-множеств, т. е. найти такую пару Y_1, Y_2 B-множеств, что $Y_1 \cap Y_2 = \phi$ и $X_1 \subseteq Y_1$ и $X_2 \subseteq Y_2$.*

Вторая теорема отделимости [3], [31]. *Если из двух* (пересекающихся) *A-множеств удалить их общую часть, то полученные остатки можно будет заключить в попарно непересекающиеся CA-множества.*

В то же время П. С. Новиковым была доказана в [22]

Теорема неотделимости. *Существует пара непересекающихся CA-множеств, неотделимых одно от другого посредством B-множеств.*

Кстати, именно такая пара CA-множеств была использована Новиковым для построения не униформизируемого с помощью B-множества плоского множества G_δ, проекция которого на ось OX накрывает всю эту ось.

В дальнейшем теоремы отделимости были обобщены Новиковым в заметках [32, 33], (см. также [7, с. 33—36 и с. 40—42]) на счетные семейства A-множеств. Эти обобщения выглядят следующим образом:

Первая теорема кратной отделимости. *Если пересечение счетного числа A-множеств X_1, X_2, X_3, . . . пусто, то существует счетное число B-множеств Y_1, Y_2, Y_3, . . ., пересечение которых также пусто, и $X_i \subseteq Y_i$ для каждого индекса i.*

Вторая теорема кратной отделимости. *Пусть задано семейство A-множеств X_1, X_2, X_3, . . . Если удалить из каждого X_i общую часть $X = \bigcap_{i \geqslant 1} X_i$ всех этих множеств, то полученные остатки можно будет заключить в CA-множества Y_1, Y_2, Y_3, . . ., пересечение которых пусто.*

Затем теоремы отделимости были распространены на семейства множеств, более сложных, чем A-множества. Глубокие результаты принадлежат здесь П. С. Новикову [34] (см. также [7, с. 78—85]) и А. А. Ляпунову [35, 36] (см. также [37, с. 31—42 и с. 44—47]). О некоторых из них мы расскажем в п. 4.

Известно несколько способов доказательства теорем отделимости. В частности, Лузин использовал в [21] для доказательства первой теоремы отделимости метод трансфинитной индукции «от вершин к основанию» по возникающему в ходе доказательства дереву с конечными ветвями. Но наиболее естественное доказательство получается с помощью найденного П. С. Новиковым принципа сравнения индексов.

Чтобы сформулировать принцип сравнения индексов, необходимы некоторые сведения из теории решет. Решетом (точнее говоря, прямолинейным решетом) называется всякое плоское множество S, которое можно накрыть счетным числом горизонтальных прямых. Таким образом, S представляется в виде счетного объединения множеств $S_y = \{x\colon \langle x, y\rangle \in S\}$, называемых элементами решета S. Если каждое из множеств S_y открыто как линейное множество, то решето S называется открытым. Таких решет вполне достаточно для большинства приложений, но можно рассматривать и более сложные, в частности B-измеримые решета, элементами которых являются B-множества.

Пусть задано некоторое решето S и точка x оси OX. Если вертикальное сечение $S/x = \{y: \langle x, y\rangle \in S\}$ решета S в точке x вполне упорядочено в смысле естественного порядка оси OX, то порядковый тип этого сечения называется индексом решета S в точке x и обозначается через $\mathrm{Ind}_x S$. Если S/x не является вполне упорядоченным, то индекс $\mathrm{Ind}_x S$ полагается равным Ω — первому несчетному трансфиниту, т. е. порядковому типу такого несчетного множества, все начальные сегменты которого счетны. Множество $E = \{x: \mathrm{Ind}_x S = \Omega\}$ называется внутренним или просеянным с помощью решета S, а его дополнение $\mathscr{E} = \{x: \mathrm{Ind}_x S < \Omega\}$ называется внешним множеством решета S.

Определение решета и доказательство некоторых важных свойств решет и индексов было дано Лузиным [3, 21]. Среди его результатов отметим следующие:

Теорема просеивания. *Класс внутренних и класс внешних множеств открытых решет в точности тождественны классу A-множеств и классу CA-множеств соответственно.*

Теорема B-измеримости конституант. *Если S — открытое решето и $\nu < \Omega$, то множество*

$$\mathscr{E}_\nu = \{x \in \mathscr{E}: \mathrm{Ind}_x S = \nu\}$$

(называемое ν-й конституантой) B-измеримо.

Принцип ограничения. *Пусть $\mathscr{E}$ является внешним множеством открытого решета S. Тогда индексы решета S ограничены на любом A-множестве $X \subseteq \mathscr{E}$. Другими словами, для всякого A-множества $X \subseteq \mathscr{E}$ найдется трансфинит $\nu_0 < \Omega$ такой, что $\mathrm{Ind}_x S$ не превосходит ν_0, какова бы ни была точка $x \in \mathscr{E}$.*

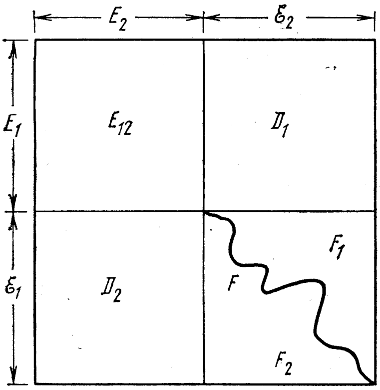
С помощью этих трех утверждений не так уж трудно вывести первую теорему отделимости, однако для доказательства второй теоремы отделимости Н. Н. Лузину понадобилось более мощное средство:

Принцип сравнения индексов. *Для любых двух B-измеримых решет S_1 и S_2 множество тех точек x, в которых $\mathrm{Ind}_x S_1 \leqslant \mathrm{Ind}_x S_2$, является A-множеством.*

Этот принцип, полученный П. С. Новиковым в ходе исследований по неявным B-функциям, пожалуй, в наиболее яркой форме выражает роль трансфинитных чисел в изучении A-множеств и их дополнений. Идея, заключенная в принципе сравнения индексов, привела к разработке в начале 70-х годов теории полного предупорядочения — одного из ключевых понятий в современном построении дескриптивной теории множеств, см. [11, гл. 8, § 3—6].

Чтобы продемонстрировать силу принципа сравнения индексов, покажем, как из него следуют обе теоремы отделимости. Рассмотрим пару A-множеств E_1, E_2, расположенных на оси OX. Эти множества являются внутренними множествами подходящих открытых решет S_1 и S_2. Соответствующие внешние множества (дополнительные к E_1 и E_2) обозначим через $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$. Далее, через E_{12}, D_1, D_2, F обозначим соответственно множества $E_1 \cap E_2$, $E_1 - E_2$, $E_2 - E_1$ и $\mathscr{E}_1 \cap \mathscr{E}_2$. Чтобы с геометрической наглядностью показать взаимоотношение между этими множествами, мы изобразили их на рисунке в квадрате, который, таким образом, символически обозначает ось OX (соображения евклидовой и топологической размерности не играют здесь никакой роли).

Итак, разности $D_1 = \{x: \mathrm{Ind}_x S_2 < \Omega = \mathrm{Ind}_x S_1\}$ и $D_2 = \{x: \mathrm{Ind}_x S_1 < \Omega = \mathrm{Ind}_x S_2\}$ требуется заключить в попарно непересекающиеся CA-множества



U_1 и U_2. Чтобы сделать это, построим разбиение множества F на две части, F_1 и F_2 (волнистая линия в квадрате F) так, что объединения $U_1 = F_1 \cup D_1$ и $U_2 = F_2 \cup D_2$ будут CA-множествами. Этим, кстати, получится доказательство и первой теоремы отделимости, ибо если A-множества E_1 и E_2 не имеют общих точек, то $E_{12} = \phi$ и U_1, U_2 окажутся взаимно дополнительными CA-множествами, т. е. B-множествами по теореме Суслина (см. Введение), причем ясно, что пара U_1, U_2 отделяет множества $E_1 = D_1$ и $E_2 = D_2$. Итак, все сводится к построению указанного разбиения.

Отметим, что $F = \{x\colon \operatorname{Ind}_x S_1 < \Omega$ и $\operatorname{Ind}_x S_2 < \Omega\}$. Отнесем к F_1 те точки $x \in F$, в которых $\operatorname{Ind}_x S_2 < \operatorname{Ind}_x S_1$, а к F_2 — те точки, в которых $\operatorname{Ind}_x S_2 \geqslant \operatorname{Ind}_x S_1$. Сразу видно, что множество $U_1 = F_1 \cup D_1$ удовлетворяет равенству

$$U_1 = \{x\colon \operatorname{Ind}_x S_2 < \operatorname{Ind}_x S_1\}$$

и потому является CA-множеством по принципу сравнения индексов. Несколько сложнее обстоит дело с множеством U_2. По данному решету S_2 мы можем построить новое решето S_3, обладающее тем свойством, что $\operatorname{Ind}_x S_3 = \operatorname{Ind}_x S_2 + 1$ во всех точках $x \in \mathscr{E}_2$, и $\operatorname{Ind}_x S_3 = \Omega$ на множестве E_2. (Например, если решето S_2 целиком расположено в нижней полуплоскости, а мы всегда сумеем «загнать» его туда с помощью сохраняющего порядок взаимно однозначного соответствия между всеми точками оси OY и точками ее нижней полуоси, то S_3 получается из S_2 присоединением всех точек горизонтальной прямой с абсциссой $y = 1$. Имея такое решето S_3, мы заключаем, что множество U_2 также является CA-множеством согласно равенству

$$U_2 = \{x\colon \operatorname{Ind}_x S_1 < \operatorname{Ind}_x S_3\},$$

что и требовалось доказать.

3. Второй уровень проективной иерархии. Минимальные индексы. Теоремы униформизации. Более высокие уровни

К середине 30-х годов исследования по множествам первого проективного уровня (т. е. множествам A, B, CA) привели к многочисленным интересным результатам, группирующимся в таких направлениях, как теория решет, индексов и конституант, теория отделимости, теория неявных B-функций (и плоских B-множеств). В отношении же второго проективного уровня — классов A_2, CA_2, B_2 — не был получен ответ на самые основные вопросы. В частности, не было известно, измеримы ли по Лебегу и обладают ли свойством Бэра все множества этих классов, а также каковы законы отделимости на втором уровне проективной иерархии. Но если проблему измеримости и свойства Бэра не удалось (да и нельзя было, как мы увидим ниже) решить, то проблема отделимости на втором проективном уровне получила исчерпывающее решение в работе П. С. Новикова [20], где доказаны следующие две основные теоремы:

Первая теорема отделимости. *Пару непересекающихся CA_2-множеств можно отделить одно от другого множествами класса B_2.*

Вторая теорема отделимости. *Если из двух* (пересекающихся) *CA_2-множеств удалить их общую часть, то полученные остатки можно будет заключить в попарно непересекающиеся A_2-множества.*

Эти теоремы, как указано в [20], обобщаются на счетное число CA_2-множеств таким же образом, как и теоремы отделимости Лузина для A-множеств из раздела 2. В то же время справедлива и

Теорема неотделимости. *Существует пара непересекающихся A_2-множеств, неотделимых посредством B_2-множества.*

Решение Новиковым проблемы отделимости для второго проективного уровня произвело очень сильное впечатление на специалистов в области дескриптивной теории множеств. В частности, Лузин дал в [1] следующую оценку достижения Новикова:

«Мы уже указали, что результаты этой работы П. С. Новикова, трактующей законы отделимости всех вообще проективных множеств класса 2, представляют исключительную ценность для современного состояния науки. Автор устанавливает в этой работе законы отделимости для проективных множеств второго класса, причем совершенно неожиданным является тот его результат, что отделимость эта совершается в обратном смысле, чем для аналитических множеств и их дополнений. ... Результат этот, совершенно экстраординарный, должен сделать понятной неудачу тех многочисленных попыток, которые делались для проективных множеств второго класса, где искали установления законов отделимости в том же самом смысле, как и для аналитических множеств и их дополнений, а не в обратном».

Ключевым инструментом, позволившим Новикову получить обсуждаемые результаты, стало введенное им понятие минимального индекса. Наряду с плоскими решетами (для просеивания линейных множеств) можно рассматривать и пространственные решета, просеивающие плоские множества. Пространственным решетом называют всякое множество S пространства $OXYZ$, которое можно накрыть счетным числом плоскостей, параллельных плоскости OXY. Понятия, связанные с плоскими решетами, естественным образом переносятся на пространственные решета. При этом в роли оси OX выступает плоскость OXY, а в роли оси OY — ось OZ. В частности, каждой точке $\langle x, y\rangle$ плоскости OXY сопоставляется индекс $\mathrm{Ind}_{x,y}\, S$ решета S в этой точке. При этом сохраняют силу теоремы просеивания и B-измеримости конституант и принципы ограничения и сравнения индексов из п. 2.

П. С. Новиков (см. [20]) определяет в каждой точке x оси OX минимальные индекс $\mathrm{MInd}_x S$ пространственного решета S равным наименьшему из значений индекса $\mathrm{Ind}_{x,y} S$, когда ордината y пробегает всю ось OY, и доказывает следующий принцип сравнения минимальных индексов:

Пусть S_1 и S_2 являются открытыми пространственными решетами. Тогда множество тех точек x, в которых $\mathrm{MInd}_x\, S_1 \leqslant \mathrm{MInd}_x S_2$, является множеством класса CA_2.

Приложения этого принципа к доказательствам теорем отделимости для класса CA_2 основаны на том, что для всякого A_2-множества оси OX существует пространственное открытое решето S такое, что X совпадает с проекцией на ось OX внешнего множества решета S.

В дальнейшем минимальные индексы позволили получить еще несколько важных и интересных результатов, в частности связанных с проблемой эффективного выбора точки в непустом CA-множестве и с проблемой униформизации CA-множеств.

Вопрос эффективного выбора элемента в данном непустом множестве (т. е. выбора определенного, совершенно конкретного, а не «произвольного» элемента) имеет большое философско-математическое значение, в частности, в связи с дискуссиями об аксиоме выбора. Рассматривая этот вопрос, Лузин установил в мемуаре [38] возможность эффективного выбора точки в непустом A-множестве (эта конструкция сводится, грубо говоря, к выбору «самого левого пути» в семействе отрезков, к которым применяется A-операция для построения данного A-множества). Что же касается выбора точки в непустом CA-множестве, то Лузин неоднократно высказывал (в частности, в [3]) сомнения в возможности эффективного осуществления такого выбора.

Однако в данном случае Н. Н. Лузин ошибся. П. С. Новиков нашел основанный на минимальных индексах метод эффективного выбора точки в непустом CA-множестве. Этот метод, изложенный в упрощенной Лузиным форме в совместной заметке Лузина и Новикова [39], позволил японскому математику Кондо доказать [40] следующую теорему для CA-множеств, известную как теорема униформизации Новикова—Кондо—Аддисона (последний уже в 60-е годы получил вариант этой теоремы для так называемой «эффективной» дескриптивной теории множеств, см. [11, гл. 8, § 4]): *всякое плоское CA-множество P может быть униформизовано CA-множеством Q.* Таким образом, проблема униформизации решается положительно для класса CA. Из этого результата довольно легко выводится положительное решение проблемы униформизации и для класса A_2. Другие приложения метода выбора точки в непустом CA-множестве содержатся в [41] (см. также [7, с. 64—77] и в [42]).

Таким образом, проблема униформизации подобно проблеме отделимости решается на втором проективном уровне в противоположном смысле по сравнению с первым уровнем. Аналогично обстоит дело и с теоремами расщепления [43]. Некоторые соображения по поводу этого интересного феномена см. ниже.

Все попытки исследовать более высокие, чем второй, уровни проективной иерархии неизбежно встречались с непреодолимыми трудностями, вызванными недостаточностью традиционных математических средств в исследовании такого сложного и «расплывчатого» образования, как произвольное проективное множество. Эта недостаточность была явно осознана математиками, работавшими в дескриптивной теории, вероятно, к концу 40-х — началу 50-х годов, когда в этой области сложилось такое положение, что все основные «решаемые» проблемы были уже решены, а для оставшихся нерешенными не было видно ни малейшего намека на возможный путь к их решению. Все это заставило искать новые средства в изучении проективных множеств высших классов.

Первым из таких новых средств стала аксиома конструктивности, введенная К. Геделем в 1938 г. Она утверждает, что всякое множество конструктивно, т. е. может быть получено в результате прямого трансфинитного процесса специального вида.

Фундаментальные исследования по приложениям аксиомы конструктивности к проблемам дескриптивной теории были выполнены П. С. Новиковым. Новиков показал в работе [44] (см. также [7, с. 170—202]), что утверждение о существовании множества класса B_2, не измеримого по Лебегу, и утверждение о существовании несчетного CA-множества, не содержащего совершенных подмножеств, являются следствиями аксиомы конструктивности. Гёделем было показано, что если общепринятая в аксиоматической теории множеств система Цермело—Френкеля ZF непротиворечива, то она остается непротиворечивой и после добавления аксиомы конструктивности, из которой вытекает (как также было показано К. Гёделем) аксиома выбора. Таким образом, если ZF непротиворечива, то невозможно обычными, т. е. имеющимися в ZF, средствами даже с использованием аксиомы выбора доказать, что все B_2-множества измеримы, а каждое несчетное CA-множество содержит совершенное подмножество. Тем более невозможно доказать это для всех вообще проективных множеств.

Эти результаты были первыми метаматематическими результатами в дескриптивной теории множеств, остановившейся перед непреодолимыми, трансцендентными проблемами. Такими проблемами были проблема мощности CA-множеств и измеримости по Лебегу A_2-множеств. Особую трансцендентность проблемы существования несчетных CA-множества без совершенного подмножества подчеркивает обнаруженная в конце 60-х годов связь этой проблемы с проблемой существования недостижимого кардинала, возникшей в канторовской теории кардинальных чисел — в том ее разделе, который изучает так называемые большие кардиналы, не имея при этом гарантии их существования. Оказалось, что аксиоматическая система, получаемая добавлением к аксиомам ZFC ($= ZF +$ аксиома выбора) гипотезы существования совершенного подмножества в каждом несчетном CA-множестве равнонепротиворечива системе ZFI, получаемой добавлением к ZFC гипотезы существования недостижимого кардинала. Этот результат можно трактовать в плане невозможности опровержения первой из названных равнонепротиворечивых гипотез без использования дополнительных, т. е. не содержащихся в аксиоматической системе ZFC средств доказательств. Если бы такое доказательство, проведенное только средствами ZFC, было найдено, то это давало бы, в силу отмеченной равнонепротиворечивости, противоречивость системы ZFI, что, по общему мнению специалистов по аксиоматической теории множеств, невероятно. К этому необходимо добавить еще, что использование гипотезы о недостижимом кардинале в вопросе о неопровержимости обсуждаемой дескриптивной гипотезы неустранимо (см. по этому поводу Добавление в [11]). Изложенный здесь метаматематический результат о недоказуемости существования несчетных CA-множеств без совершенных подмножеств принадлежит американскому математику Р. Соловею, получившему также результат в [45], который можно трактовать как невозможность доказать существование неизмеримых множеств (а также несчетных множеств без совершенных подмножеств) хотя бы на одном уровне проективной иерархии. Этим была полностью доказана неразрешимость (с помощью традиционных математических средств) утверждения об измеримости всех проективных множеств и утверждения о том, что каждое несчетное проективное множество содержит совершенное подмножество.

В той же работе [44] Новиков без доказательства приводит теорему о том, что в предположении аксиомы конструктивности для всех достаточно больших n законы отделимости на n-м проективном уровне тождественны классическим теоремам отделимости для второго уровня (т. е. теоремам работы [20], приведенным в начале этого раздела; нужно только заменить индекс 2 в обозначениях проективных классов индексом n). Сам Новиков не опубликовал доказательство этой теоремы, однако такое доказательство позже появилось в статье Аддисона [46], причем Аддисон уточнил, что теорема Новикова справедлива для всех $n \geqslant 3$.

Интересные результаты принес предпринятый П. С. Новиковым и А. А. Ляпуновым поиск разрешимых форм проблем об измеримости и мощности. Новиков ввел в работе [47] (см. также [7, с. 88—91]) понятие эффективно несчетного множества — т. е. несчетного множества, по каждому не более чем счетному подмножеству которого можно эффективно (в точном смысле — с помощью некоторой непрерывной функции, заданной на пространстве счетного числа измерений) построить точку данного множества, не принадлежащую этому подмножеству. Новиков показал, что всякое эффективно несчетное множество включает совершенное подмножество и имеет поэтому мощность континуума.

Ляпунов ввел в [48] (см. также [37, с. 48—51]) аналогичным образом понятие множества эффективно не меры 0 (требуя, чтобы каждому подмножеству меры 0 данного множества эффективно соответствовала точка данного множества, не принадлежащая этому подмножеству) и показал, что всякое множество эффективно не меры 0 содержит подмножество положительной меры. Аналогичная теорема доказана в [48] и для понятия: множество 1-й категории.

В последние 10—15 лет очень большой и все возрастающий интерес у специалистов по дескриптивной теории вызывает другая дополнительная аксиома — аксиома детерминированности, предложенная польскими математиками Мычельским и Штейнгаузом в 1962 г. и особенно ослабленная ее форма — аксиома проективной детерминированности PD. Эти аксиомы связаны с понятием игры $G(X)$ двух лиц I и II, определяемой по каждому множеству X единичного отрезка действительной прямой. Игра $G(X)$ двух лиц, I и II, состоит в том, что игрок I пишет двоичную цифру a_1, т. е. $a_1 = 0$ или $a_1 = 1$, игрок II (зная ход a_1) пишет свою двоичную цифру a_2, снова игрок I (зная a_2) пишет двоичную цифру a_3, и так далее до бесконечности. Результатом партии является двоичная запись $0, a_1a_2a_3\ldots$ некоторого числа x отрезка $[0, 1]$, в котором игроку I принадлежат нечетные знаки, а игроку II — четные. Если число $x = 0, a_1a_2a_3\ldots$ принадлежит данному множеству X, то результат партии считается выигрышем для игрока I в игре $G(X)$. В противном случае — выигрыш игрока II.

Стратегиями в играх такого типа являются всевозможные функции s: $\bigcup\limits_{m\geqslant 0} \{0, 1\}^m \to \{0, 1\}$, определенные на множестве всех кортежей вида $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$ $(m \geqslant 0)$, составленных из цифр $a_i = 0$ или 1 (при $m = 0$ получается «пустой» кортеж Λ), со значениями 0 и 1. Стратегия s называется выигрывающей для игрока I в игре $G(X)$, если, определяя свои ходы a_{2m+1} в соответствии с равенствами

$$a_{2m+1} = s(\langle a_1, a_2, \ldots, a_{2m-1}, a_{2m}\rangle)$$

(в частности, $a_1 = s(\Delta)$), он имеет выигрыш независимо от того, как делает свои ходы $a_2, a_4, a_6, \ldots$ его противник — игрок II. Точно так же вводится понятие выигрывающей стратегии для игрока II. Множество $X \subseteq [0, 1]$ называется детерминированным, если один из игроков имеет выигрывающую стратегию в игре $G(X)$.

Не вдаваясь в подробности, отметим, что все B-множества детерминированы, а аксиома проективной детерминированности PD постулирует детерминированность всех проективных множеств.

Из многочисленных следствий аксиомы PD для теории проективных множеств отметим замечательное явление осцилляции теорем отделимости между классами A_n и CA_n, открытое в начале 70-х годов американским математиком Я. Московакисом (см. [12]). Оказалось, что, приняв аксиому PD, можно доказать теоремы отделимости для классов A_3, CA_4, A_5, CA_6, и т. д., и теорему неотделимости для классов CA_3, A_4, CA_5, A_6, и т. д. Этот результат естественным образом продолжает классические теоремы Н. Н. Лузина и П. С. Новикова об отделимости для классов $A (= A_1)$ и CA_2 и неотделимости для CA и A_2, причем в его доказательстве совершенно явно прослеживаются идеи П. С. Новикова, связанные с принципом сравнения индексов и минимальными индексами. Подобная осцилляция была обнаружена и для результатов, связанных с униформизацией и проекциями однозначных множеств.

В качестве причины такой осцилляции указывается то обстоятельство, что при выполнении PD «отделимые» классы A, CA_2, A_3, CA_4, ... получаются друг из друга последовательным применением специального «гейм-оператора» $\mathfrak{D}$, и то же самое справедливо для «неотделимых» классов CA, A_2, CA_3, A_4, ..., т. е., например, действуя этим оператором на все плоские множества класса A_3, мы получим все линейные множества CA_4, и только такие множества. Об этом операторе мы расскажем в следующем разделе.

4. Исследования по C-множествам и R-множествам

Со второй половины 20-х годов важное место в дескриптивной теории стали занимать исследования по некоторым специальным типам множеств класса B_2. Благодаря особым свойствам операций, с помощью которых строятся эти специальные типы множеств, удалось доказать их измеримость по Лебегу и свойство Бэра.

Интенсивно изучались два типа таких «специальных» B_2-множеств: C-множества и R-множества. Семейство C-множеств, введенных Е. А. Селивановским в [49], определяется так: это есть наименьшее семейство, содержащее все A-множества и замкнутое относительно A-операции и операции дополнения (Лузин указал, что в этом определении A-операцию можно заменить операцией просеивания через решето, см. [1]). C-множества образуют иерархию классов C_α, занумерованных индексами $\alpha < \Omega$. При этом в начальный класс C_0 зачисляются все A-множества, а при $\alpha > 0$ к классу C_α относятся все такие множества, которые можно получить действием A-операции на множества, дополнительные к множествам классов C_β, $\beta < \alpha$. Классы C_α расширяются с возрастанием до Ω индекса α и охватывают все C-множества.

Довольно быстро удалось установить, что все C-множества измеримы по Лебегу и все они обладают свойством Бэра [49] и принадлежат проективному классу B_2 ([50]). Значительно более сложной оказалась задача выяснения законов отделимости для классов C_α. Решение было найдено П. С. Новиковым, доказавшим в [34], что принципы отделимости на каждом уровне α иерархии C-множеств полностью тождественны теоремам отделимости Лузина для класса A-множеств (т. е. класса C_0) и теореме неотделимости для CA-множеств (см. начало раздела 2). Любые два непересекающихся множества класса C_α можно отделить парой множеств этого класса, дополнения которых также принадлежат C_α (т. е. с помощью максимального тела этого класса); если из двух (пересекающихся) C_α-множеств удалить их общую часть, то полученные остатки можно заключить в непересекающиеся множества, дополнительные к множествам класса C_α; наконец, можно построить пару непересекающихся множеств, дополнительных к множествам класса C_α и неотделимых посредством множеств из максимального тела этого класса.

Для доказательства этих теорем Новиков распространяет принцип сравнения индексов на решета, элементами которых являются множества максимального тела данного класса C_α. Оказывается, что для двух таких решет S_1 и S_2 множество тех точек x, в которых выполняется неравенство $\mathrm{Ind}_x S_1 \leqslant \mathrm{Ind}_x S_2$, будет множеством класса C_α.

Значительно более сложное образование представляют собой R-множества А. Н. Колмогорова [51]. Для их построения требуется не одна многократно применяемая операция, как в случае C-множеств, а целая система операций R^α, занумерованных трансфинитными индексами $\alpha < \Omega$. В качестве начальной операции R^0 рассматривается A-операция, а каждая последующая операция R^α, $\alpha > 0$, получается из предшествующих ей операций R^β, $\beta < \alpha$, с помощью введенного Колмогоровым R-преобразования. Сила операций R^α существенно увеличивается с возрастанием индекса α: класс всех множеств, которые получаются однократным применением операции R^α к интервалам действительной прямой, этот класс обозначается через R_α, существенно шире класса множеств, получаемых из интервалов всеми предшествующими операциями и операцией дополнения в любом чередовании (в этом и состоит идея R-преобразования). Таким образом, классы R_α расширяются при стремлении индекса α к значению Ω. Множества, принадлежащие этим классам, получили название R-множеств. Нулевой класс R_0 совпадает с классом всех A-множеств, но уже класс R_1 включает все C-множества и не исчерпывается ими.

Все операции R^α относятся к широкому классу δs-операций, рассмотренному А. Н. Колмогоровым (см. [51]). Более детальное изучение δs-операций, R-операций и R-множеств предприняли Л. В. Канторович и Е. М. Ливенсон [50], доказавшие, в частности, что все R-множества принадлежат проективному классу B_2. Позже для развития теории R-множеств много сделал А. А. Ляпунов. В его фундаментальном исследовании «R-множества» [52] (см. также [37, с. 85—131]) доказано, что все R-множества измеримы по Лебегу и имеют свойство Бэра (сам автор отмечает, что эти результаты были получены Колмогоровым еще в начале 20-х годов, но работа Колмогорова осталась неопубликованной). В той же статье [52] Ляпунов строит теорию сравнения индексов для операций R^α и теорию отделимости для классов R_α, получая результаты, в целом аналогичные тем, которые П. С. Новиков получил ранее для C-множеств (обе теоремы отделимости справедливы для классов R_α, а теорема неотделимости — для классов дополнительных множеств). При этом им были созданы значительно более тонкие технические средства. В своих более поздних работах (см., например, [53, 54] или [37, с. 169—200, 209—223] соответственно) Ляпунов применяет для исследования R-множеств введенные им T-операции и разрабатывает для этих операций теорию индексов.

В последние годы развитие методов, связанных с играми, снова вызвало повышенный интерес к C-множествам и R-множествам в связи с тем, что был найден новый способ построения этих множеств с помощью гейм-оператора, действующего на плоские множества. Опишем действие последнего. Пусть задано множество P евклидовой плоскости OXY. Каждой точке x оси OX соответствует вертикальное сечение $P_x = \{y\colon \langle x, y\rangle \in P\}$. Это множество P_x определяет игру $G(P_x)$ способом, указанным в конце предыдущего раздела. Если игрок I имеет выигрывающую стратегию в этой игре, то точка x относится к множеству $\mathfrak{D}P$, а в противном случае — к его дополнению.

Благодаря тому, что все B-множества детерминированы (т. е. один из игроков имеет выигрывающую стратегию в соответствующей игре, см. раздел 4), исследование действия гейм-оператора на B-множества осуществляется без привлечения каких-либо дополнительных аксиом, выходящих за рамки обычных математических средств. Оказывается (см. [55]), C-множества оси OX — это в точности такие множества, которые можно получить гейм-оператором из плоских множеств, являющихся одновременно множествами F_σ и G_δ (эти последние, заметим, составляют класс K_1 иерархии Валле Пуссена, см. следующий раздел). Аналогично, действуя гейм-оператором на плоские множества класса K_2 иерархии Валле Пуссена, мы получим все линейные R-множества (и только такие множества).

Применяя оператор $\mathfrak{D}$ к более высоким классам K_α, $\alpha > 2$, иерархии

B-множеств, мы будем получать все более и более широкие совокупности линейных множеств, однако при этом никогда не выйдем за рамки проективного класса B_2 (на самом деле даже не исчерпаем этого класса). Отсюда видно, что и C-множества, и даже R-множества составляют лишь незначительную часть класса B_2.

Эти интересные факты заставляют по-новому взглянуть на классическую теорию C-множеств, R-множеств и δs-операций.

5. Исследования по иерархии B-множеств

Идея классифицировать B-множества в соответствии со способом их построения из интервалов (или, если говорить о множествах в произвольном топологическом пространстве, из открытых либо из замкнутых множеств) может быть реализована по-разному: в зависимости от выбора основных операций и их чередования. Это приводит к различным вариантам построения иерархии B-множеств.

Очень популярной в работах 20-х — 40-х годов была иерархия Валле Пуссена, связанная с операцией теоретико-множественного предела (множество X называется пределом последовательности множеств X_1, X_2, X_3, . . ., если

$$X = \bigcup_{n} \bigcap_{m \geqslant n} X_m = \bigcap_{n} \bigcup_{m \geqslant n} X_m.$$

Другими словами, характеристическая функция множества X должна быть поточечным пределом последовательности характеристических функций множеств X_n).

Начальным классом иерархии Валле Пуссена объявляется класс K_1, состоящий из всех множеств, являющихся одновременно множествами F_σ и G_δ (в данном пространстве). Если $1 < \alpha < \Omega$ и все классы K_β, $\beta < \alpha$, уже построены, то в класс K_α зачисляются все множества, являющиеся пределами последовательностей, составленных из множеств этих предшествующих классов. В бэровском пространстве построение начинается с класса K_0 всех открыто-замкнутых множеств, а класс K_1 определяется по указанному общему правилу. Классы K_α расширяются с возрастанием индекса α и замкнуты относительно дополнений, конечных объединений и пересечений.

В 20-е годы наиболее важный вклад в изучение классов B-множества внесли М. А. Лаврентьев и Н. Н. Лузин. Лаврентьев показал в работе [56], что классы K_α топологически инвариантны: *если два множества действительной прямой* (или любого другого евклидова пространства) *гомеоморфны одно другому* (*как пространства с унаследованной топологией*), *и одно из этих множеств принадлежит данному классу K_α, то и другое также принадлежит этому классу*. В аналогичном смысле топологически инвариантны классы F_σ и G_δ, а также все проективные классы, в частности класс A-множеств и класс CA-множеств.

В другой работе Лаврентьева [57] был указан способ более «тонкой» классификации B-множеств, входящих в определенный класс K_α. Даваемые конструкцией Лаврентьева подклассы $K_{\alpha\beta}$ увеличиваются с возрастанием второго индекса β до Ω и дают в объединении весь класс K_α, причем подобно классам K_α подклассы также топологически инвариантны.

Свойства классов и подклассов иерархии Валле Пуссена подробно рассматривались Лузиным (см. [3, 31]). Принципы отделимости для подклассов были исследованы А. А. Ляпуновым [58].

Теорема М. А. Лаврентьева о топологической инвариантности классов стала отправной точкой двух направлений в дескриптивной теории множеств, отчасти примыкающих к топологии. Первое из них состоит в исследовании инвариантности классов B-множеств при непрерывных отображениях, не являющихся гомеоморфизмами. В частности, в этом плане рассматривались открытые и замкнутые отображения. (Непрерывное отображение F: X на Y называется открытым, если F-образ всякого открытого $X_1 \subseteq X$ открыт в Y. Понятие замкнутого отображения вводится аналогично. Обоим этим типам отображений не хватает взаимной однозначности для того, чтобы стать гомеоморфизмами.)

В отношении открытых отображений вопрос разрешился следующим образом: *не только всякое B-множество (любого класса), но и всякое A-множество является открытым образом подходящего множества класса* G_δ. Эта теорема Л. В. Келдыш [59] показала, что классы Валле Пуссена не инвариантны относительно топологических отображений.

Иначе обстоит дело с замкнутыми отображениями, по крайней мере в случае, когда полный прообраз всякой точки является компактным множеством (такие отображения называются компактными). Оказалось [60], что все классы K_α с бесконечными индексами α инвариантны относительно таких отображений, а для классов K_n с конечным индексом n индекс может увеличиться не более чем на единицу: замкнутый компактный образ множества класса K_n будет обязательно множеством класса K_{n+1}.

Очень большое внимание уделялось в исследованиях по B-множествам проблеме наглядного топологического их описания. Н. Н. Лузиным были выделены в каждом классе K_α множества, являющиеся пересечениями счетного числа множества предшествующих классов, и названы им элементами класса K_α. Элементы в иерархии B-множеств играют, как подчеркивал Н. Н. Лузин, роль точек. Так, например, для того чтобы множество E принадлежало классу K_α, необходимо и достаточно, чтобы оно и его дополнение представлялись в виде объединения счетного числа непересекающихся элементов этого класса. Работа М. А. Лаврентьева [57] о подклассах класса K_α сводила вопрос о строении B-множества к вопросу изучения структуры элементов этих классов. Решающие результаты в исследовании структуры элементов принадлежат Л. В. Келдыш. Итог своих исследований [61—66] она подвела в работе [67]. Было известно, что элементами первого класса являются произвольные замкнутые множества, а элементами второго класса — произвольные множества класса G_δ. П. С. Александровым и П. С. Урысоном [68] было доказано, что каждое G_δ-множество является объединением не более чем счетного числа множества не выше первого класса и одного G_δ-множества, всюду плотного, так же как и его дополнение, на своем замыкании. Последнее называется каноническим элементом второго класса. Построение и исследование элементов из высших классов сопряжено с большими трудностями. Так для третьего класса был известен пример Бэра элемента этого класса. Л. В. Келдыш показала [61], что произвольный элемент третьего класса представляется в виде объединения не более чем счетного числа множеств предшествующих классов и одного множества, гомеоморфного бэровскому элементу.

Таким образом, по аналогии со вторым классом иерархии Валле Пуссена бэровский элемент можно назвать каноническим. Н. Н. Лузин предполагал, что в каждом классе можно выделить аналогичные канонические элементы, не давая, однако, общего определения канонического элемента и указывая лишь, что они обладают «достаточно простым свойством». Проблема выделения канонических элементов, их конструктивное построение стали центральной проблемой теории B-множеств. Эта проблема была полностью решена Л. В. Келдыш в работе [67]. Элемент X класса K_α называется универсальным, если всякому другому элементу Y класса K_α найдется совершенное множество P такое, что Y гомеоморфно пересечению $X \cap P$. Элемент класса K_α называется каноническим, если, во-первых, он имеет первую категорию на своем замыкании, и, во-вторых, непустое пересечение его с любым интервалом является универсальным элементом класса K_α. Келдыш установила в [67] (для третьего класса — в более ранней работе [61]), что *во всяком классе* K_α *существуют канонические элементы*, что *все они* (при фиксированном α) *попарно гомеоморфны* и *что всякий элемент класса* K_α *представляет собой сумму одного канонического элемента класса* K_α *и не более чем счетного числа множеств низших классов.* При этом Л. В. Келдыш указала трансфинитный процесс конструктивного получения канонических элементов.

Ранее построение B-множеств все более высоких классов осуществлялось по методу Лебега на основе диагонального рассуждения Кантора. Л. В. Келдыш ввела в дескриптивную теорию новый конструктивный метод получения B-множеств.

Долгое время оставался открытым вопрос о том, какова мощность связных компонент (т. е. максимальных связных частей) B-множеств, даже для случая G_δ-множеств. В работе [69] (см. также [7, с. 92—95]) П. С. Новиков получил следующий важный результат: *мощность множества всех связных компонент любого A-множества в евклидовом пространстве или конечна, или счетна, или равна мощности континуума.* В той же работе он ввел понятие квазикомпоненты и поставил вопрос о мощности квазикомпонент, который впоследствии был решен его учеником А. Д. Таймановым (см. [70] и [71]).

Несколько слов еще об одном направлении исследований по классификации Валле Пуссена. Мы уже отмечали в разделе 2, что всякое плоское решето S определяет последовательность конституант $\mathscr{E}_\alpha$, индексированных порядковыми числами $\alpha < \Omega$, причем если решето S открытое (и даже если оно B-измеримо), то все конституанты $\mathscr{E}_\alpha$ представляют собой B-множества. Н. Н. Лузин нашел формулы, позволяющие явным образом выразить конституанты $\mathscr{E}_\alpha$ через элементы S_y решета S с помощью операций счетного суммирования, счетного пересечения и дополнения, см. [3], и получил с помощью этих формул в [1] грубые верхние оценки для классов конституант с данным номером. Более точные оценки указала Л. В. Келдыш в работе [72]: *Если решето S является открытым и номер конституанты $\mathscr{E}_\alpha$ представлен в виде $\alpha = \omega^\gamma \cdot n + \beta$, где $1 \leqslant n < \omega$ и $\beta < \omega^\gamma$* (такое представление всегда возможно, причем единственным образом), *то при $n > 1$ конституанта $\mathscr{E}_\alpha$ является разностью двух элементов класса $K_{2\gamma+1}$, а при $n = 1$ — элементом класса $K_{2\gamma+1}$ (и в обоих случаях принадлежит классу $K_{2\gamma+1}$)*. Келдыш продолжила свои исследования в этом направлении в работах [63, 73], где получены различные оценки для класса множеств $\bigcup\limits_{\alpha<\alpha_0} \mathscr{E}_\alpha$ в случае, когда все конституанты $\mathscr{E}_\beta$ с индексами, большими или равными α_0, пусты, причем ею были изучены не только открытые, но и B-измеримые решета.

Исследования Н. Н. Лузина и Л. В. Келдыш по оценкам класса конституант были инспирированы важной проблемой построения открытого решета S, последовательность внешних конституант $\mathscr{E}_\alpha$ которого содержит несчетно много непустых множеств и обладает тем свойством, что все конституанты $\mathscr{E}_\alpha$ суть B-множества некоторого одного класса K_γ, $\gamma < \Omega$. Эта проблема, поставленная Лузиным [1, 3], оказалась неразрешимой: невозможно ни доказать существование такого решета, ни доказать, что таких решет нет. Подробнее о современных результатах в этой области сказано в работе [74].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лузин Н. Н.* О некоторых новых результатах дескриптивной теории функции: М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935.
2. *Лузин Н. Н.* Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 2.
3. *Lusin N.* Lecons sur les ensembles analytiques et leurs applications. P.: Gauthiers-Villars, 1930; на рус. яз.: *Лузин Н. Н.* Лекции об аналитических множествах и их приложениях // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. 1958. Т. 2. С. 9—269.
4. *Арсенин В. Я.*, *Ляпунов А. А.* Теория A-множеств // УМН. 1950. Т. 5, № 5 (39). С. 45—108.
5. *Ляпунов А. А.* Обзор по дескриптивной теории множеств // Вопросы теории множеств и теории функций. М.: Наука, 1979. С. 55—82.
6. *Ляпунов А. А.*, *Новиков П. С.* Дескриптивная теория множеств // Математика в СССР за 30 лет. М.; Л.: Гостехиздат, 1948. С. 243—255.
7. *Новиков П. С.* Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра: Избр. тр. М.: Наука, 1979.
8. *Келдыш Л. В.*, *Новиков П. С.* Работы Н. Н. Лузина в области дескриптивной теории множеств // УМН. 1953. Т. 8, № 2(54). С. 93—104.
9. *Келдыш Л. В.* Идеи Н. Н. Лузина в дескриптивной теории множеств // УМН. 1974. Т. 29, № 5. С. 183—196.
10. *Ляпунов А. А.* О работах П. С. Новикова в области дескриптивной теории множеств // Тр. МИАН СССР. 1973. Т. 133. С. 11—22.
11. Справочная книга по математической логике. Ч. 2. Теория множеств. М.: Наука, 1982.
12. *Moschovakis Y. M.* Descriptive set theory. Amsterdam: North Holland, 1980.
13. *Borel E.* Lecons sur la théorie des fonctions. P.: Gauthier-Villars, 1898.
14. *Lebesgue H.* Sur les fonctions représentables analytiquement // J. math. pures et appl. Ser. 6. 1905. Vol. 1, fasc. 2. P. 139—216.
15. *Alexandroff P.* Sur la puissance des ensemble mesurables B // C. r. Acad. sci. 1916. Vol. 162. P. 323—325; На рус. яз.: *Александров П. С.* О мощности множеств, измеримых по Борелю // Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств: Избр. тр. М.: Наука, 1978. С. 35—39.
16. *Souslin M.* Sur une definition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis // C. r. Acad. sci. 1917. Vol. 164. P. 89—91.
17. *Lusin N.* Sur la classification de M. Baire // Ibid. P. 91; На рус. яз.: *Лузин Н. Н.* О классификации Бэра // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1958. С. 270—272.
18. *Lusin N.*, *Sierpinski W.* Sur quelques propriétés des ensembles // Bull. Intern. Acad. sci. Cracowie. Ser. A. 1918. Vol. 4/5. P. 35—48; На рус. яз.: *Лузин Н. Н.* О некоторых свойствах A-множеств // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 2. С. 273—284.
19. *Lusin N.* Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesgue // C. r. Acad. sci. 1925. Vol. 180. P. 1572—1574; На рус. яз.: *Лузин Н. Н.* О проективных множествах Лебега // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 2. С. 304—306.
20. *Novikoff P.* Sur la separabilité des ensembles projectifs de seconde classe // Fund. math. 1935. Vol. 25. P. 459—466; На рус. яз.: *Новиков П. С.* Об отделимости проективных множеств второго класса // Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра: Избр. тр. М.: Наука, 1979. С. 43—48.
21. *Lusin N.* Sur les ensembles analytiques // Fund. math. 1927. Vol. 10. P. 1—95; На рус. яз.: *Лузин Н. Н.* // Об аналитических множествах // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР. 1958. Т. 2. С. 380—459.
22. *Novikoff P.* Sur les fonctions implicites mesurables B // Fund. math. 1931. Vol. 17. P. 8—25; На рус. яз.: *Новиков П. С.* О неявных функциях, измеримых B // Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра: Избр. тр. М.: Наука, 1979. С. 13—25.
23. *Новиков П. С.* О проекциях некоторых B-множеств // ДАН СССР. 1939. Т. 23, № 9. С. 863—864.
24. *Арсенин В. Я.* О проекциях B-множеств // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. Т. 3, № 2. С. 223—242.
25. *Арсенин В. Я.* Природа проекций некоторых B-множеств // Там же. 1940. Т. 4, № 4/5. С. 403—409.
26. *Щегольков Е. А.* Об униформизации некоторых B-множеств // ДАН СССР. 1948. Т. 39, № 6. С. 1065—1068.
27. *Brown S.* Quelques theoremes sur les cribles Borelinnes // Fund. math. 1933. Vol. 20. P. 166—172.
28. *Saint Raymond J.* Boreliens à coupes K_σ // Bull. Soc. math. France. 1976. Vol. 104, N 4. P. 389—400.
29. *Bourgain J.* $F_{\sigma\delta}$ sections of Borel sets // Fund. math. 1980. Vol. 107, N 2. P. 149—159.
30. *Louveau A.* A separation theorem for Σ_1^1 sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 260, N 2. P. 363—378.
31. *Lusin N.* Analogies entre les ensembles mesurables B et les ensembles analytiques // Fund. math. 1930. Vol. 26. P. 48—76; На рус. яз.: *Лузин Н. Н.* Аналогии между множест-

вами, измеримыми B, и аналитическими множествами // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 2. С. 470—493.
32. *Новиков П. С.* О счетнократной отделимости B аналитических множеств // ДАН СССР. 1934. Т. 3, № 3. С. 145—148.
33. *Новиков П. С.* Обобщение второго принципа отделимости // Там же. Т. 4, № 1. С. 8—11.
34. *Новиков П. С.* Отделимость C-множеств // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1937. Т. 1, № 2. С. 253—264.
35. *Ляпунов А. А.* О кратной отделимости для (A)-операции // Там же. 1939. Т. 3, № 5/6. С. 539—552.
36. *Ляпунов А. А.* О кратной отделимости для δs-операций // ДАН СССР. 1946. Т. 53, № 5. С. 399—402.
37. *Ляпунов А. А.* Вопросы теории множеств и теории функций. М.: Наука, 1979.
38. *Lusin N.* Memoire sur les ensembles analytiques et projectifs // Мат. сб. 1926. Т. 33, № 3. С. 237—290; На рус. яз.: *Лузин Н. Н.* Мемуар об аналитических и проективных множествах // Собр. соч. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 2. С. 317—379.
39. *Lusin N., Novikoff P.* Choix effectif d'un point dans un complementaire analytique donne par un crible // Fund. math. 1935. Vol. 25. P. 559—560; На рус. яз.: *Лузин Н. Н., Новиков П. С.* Эффективный выбор точки в произвольном аналитическом дополнении, заданном посредством решета // П. С. Новиков. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра: Избр. тр. М.: Наука, 1979. С. 49—50.
40. *Kondo M.* Sur l'uniformisation des complementaires analytiques et les ensembles projectifs // Jap. J. Math. 1938. Vol. 15. P. 197—230.
41. *Новиков П. С.* О взаимоотношении второго класса проективных множеств и проекций униформных аналитических дополнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1937. Т. 1, № 2. С. 231—252.
42. *Ляпунов А. А.* Некоторые случаи униформизации плоских CA и A_2-множеств // Там же. 1939. Т. 3, № 1. С. 41—52.
43. *Каноеей В. Г.* К проблемам Н. Н. Лузина о вложимости и расщеплении проективных множеств // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 1. С. 23—39.
44. *Новиков П. С.* О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств // Тр. МИАН СССР. 1951. Т. 38. С. 279—316.
45. *Solovay R. M.* A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. math. 1970. Vol. 92, N 1. P. 1—56.
46. *Addison J. W.* Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory // Fund. math. 1959. Vol. 46, N 2. P. 123—135.
47. *Новиков П. С.* О множествах эффективно несчетных // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1939. Т. 3. С. 35—40.
48. *Ляпунов А. А.* Об эффективной измеримости // Там же. 1949. Т. 13. С. 357—362.
49. *Селивановский Е. А.* Об одном классе эффективных множеств (множества C) // Мат. сб. 1928. Т. 35, № 3/4. С. 379—413.
50. *Kantorovich L., Livenson E.* Memoire on the analytique operations and projective sets // Fund. math. 1932. Vol. 18. P. 214—279; 1933. Vol. 20. P. 54—97.
51. *Колмогоров А. Н.* Об операциях над множествами // Мат. сб. 1928. Т. 35, № 3/4. С. 414—422.
52. *Ляпунов А. А.* R-множества // Тр. МИАН СССР. 1953. Т. 40.
53. *Ляпунов А. А.* Об операциях над множествами, допускающих трансфинитные индексы // Тр. Моск. мат. о-ва. 1957. Т. 6. С. 195—230.
54. *Ляпунов А. А.* О методе трансфинитных индексов в теории операций над множествами // Тр. МИАН СССР. 1973. Т. 133. С. 132—148.
55. *Burgess J.* What are R-sets? // Patras Logic Symp. Proc. Log. Symp., Patras, 18—22 Aug. 1980. Amsterdam: North Holland, 1982. P. 307—324.
56. *Lavrentieff M.* Contribution à la théorie, des ensembles homeomorphes // Fund. math. 1924. Vol. 6. P. 149—160.
57. *Lavrentieff M.* Sur les sous-classes et la classification de M. Baire // C. r. Acad. sci. 1925. Vol. 180. P. 111—114.
58. *Ляпунов А. А.* О подклассах B-множеств // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1937. Т. 1, № 3. С. 419—426.
59. *Келдыш Л. В.* Об открытых отображениях A-множеств // ДАН СССР. 1945. Т. 49, № 9. С. 646—648.
60. *Тайманов А. Д.* О замкнутых отображениях. I, II // Мат. сб. 1955. Т. 36(78), № 2. С. 367—386; 1960. Т. 52, № 1. С. 79—88.
61. *Келдыш Л. В.* О гомеоморфности канонических элементов третьего класса // Там же. 1934. Т. 41, № 2. С. 187—220.
62. *Келдыш Л. В.* Об одном свойстве решет, измеримых B // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1938. Т. 2, № 1. С. 125—135.
63. *Келдыш Л. В.* Структура минимальных решет, определяющих множества, измеримые B // Там же. № 2. С. 221—248.
64. *Келдыш Л. В.* Однородные множества, измеримые B // ДАН СССР. 1940. Т. 26, № 6. С. 531—534.
65. *Келдыш Л. В.* Прямое доказательство теоремы о принадлежности канонического элемента E_α к классу и арифметические примеры B-множеств высоких классов // Там же. Т. 28, № 8. С. 675—678.
66. *Келдыш Л. В.* Структура B-множеств // Там же. 1941. Т. 31, № 7. С. 651—653.
67. *Келдыш Л. В.* Структура B-множеств // Тр. МИАН СССР. 1945. Т. 17. С. 1—74.

68. *Alexandroff P. S., Urysohn P. S.* Über nulldimensionalle Punktmengen // Math. Ann. 1927. Bd. 98, N 1. S. 89—106; На рус. яз.: *Александров П. С., Урысон П. С.* О нульмерных множествах // П. С. Урысон. Труды по топологии и другим областям математики. М.; Л.: Гостехтеориздат, 1951. Т. 2. С. 973—992.
69. *Новиков П. С.* О мощности множества связных компонент *A*-множеств // ДАН СССР. 1947. Т. 56, № 8. С. 787—790.
70. *Тайманов А. Д.* О квазикомпонентах несвязных множеств. I, II // Мат. сб. 1949. Т. 25(67), № 3. С. 367—386; 1952. Т. 30(70), № 3. С. 465—482.
71. *Тайманов А. Д.* О некоторых работах, связанных с дескриптивной теорией множеств и топологией // Тр. МИАН СССР. 1973. Т. 133. С. 203—213.
72. *Келдыш Л. В.* Верхние оценки для классов действительных конституант аналитических дополнений // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1937. Т. 1, № 2. С. 265—284.
73. *Келдыш Л. В.* Счетные измеримые *B* решета, определяющие множества, измеримые *B* // Там же. № 3. С. 403—418.
74. *Успенский В. А., Кановей В. Г.* Проблемы Лузина о конституантах и их судьба // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика, механика. 1983. № 6. С. 73—87.