ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2000, т. 231, с. 249–283

УДК 510.225+517.518.2+517.987.1+512.662

Проблема Улама об устойчивости приближенных гомоморфизмов[1,2]

©2000 г. В. Кановей[3], М. Реекен[4]

Поступило в декабре 1999 г.

Работа посвящена в основном проблеме устойчивости приближенных гомоморфизмов по Уламу, т.е. вопросу, когда приближенные гомоморфизмы аппроксимируются точными. Мы рассматриваем ситуацию, когда одна из групп оснащена инвариантной вероятностной мерой, а другая является счетным произведением групп с (псевдо)метрикой, задаваемой некоторой субмерой на индексном множестве. Мы доказываем, что если субмера удовлетворяет одной из форм теоремы Фубини в произведении с вероятностными мерами, то устойчивость имеет место для всех измеримых гомоморфизмов. Мы уделяем особое внимание случаю диадических субмер или, что эквивалентно, приближениям с точностью до идеала на индексном множестве. Идеалы, для которых такие приближенные гомоморфизмы устойчивы по Уламу, недавно получили название: идеалы Радона–Никодима (или RN). Мы доказываем, что к этой категории относятся все идеалы Фату, в частности все неразложимые идеалы и идеалы Вейсса. Также приводятся некоторые контрпримеры. В заключительной части мы обращаемся к исследованию структуры борелевских когомологий некоторых групп, в частности, доказываем, что группа $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(\mathbb{R},G)$ тривиальна для любой не более чем счетной группы G.

ВВЕДЕНИЕ

Приближенные гомоморфизмы являются типичными объектами изучения в некоторых областях математики. Например, если A и B — группы, то можно рассматривать отображения $f\colon A \to B$ такие, что $f(xy)$ может не быть всегда равным $f(x)f(y)$, но, скажем, значение $f(xy)$ всегда “близко” к $f(x)f(y)$. В этом случае вызывает интерес следующая задача: существует ли точный гомоморфизм $g\colon A \to B$, который аппроксимирует f в том смысле, что $f(x)$ всегда “близко” к $g(x)$.

Например, в случае групп с метрикой “близкий” может означать “находящийся на достаточно малом расстоянии”, тогда типичной задачей будет следующая: выяснить, является ли

[1]Главные результаты этой работы докладывались на семинарах университетов Парижа-6 и 7 и Бонна в мае–июне 1999 г., на Европейской конференции по математической логике (LC’99) в Утрехте в августе 1999 г., на семинарах CUNY (Нью-Йорк), Калтеха, UCLA, Университета Торонто и Йоркского (Торонто) университета осенью 1999 г. и на Конференции по теории множеств в Обервольфахе в декабре 1999 г.

[2]Работа выполнена при частичной финансовой поддержке первого автора грантами NSF DMS 96-19880, DFG Wu 101/9-1 и DFG 17/108/99.

[3]Московский центр непрерывного математического образования. E-mail: kanovei@math.uni-wuppertal.de

[4]Университет г. Вупперталь, Германия. E-mail: reeken@math.uni-wuppertal.de

каждый ε-приближенный гомоморфизм $K\varepsilon$-аппроксимируемым посредством точного гомоморфизма, где K — константа, абсолютная для данного класса групп. Улам [36, VI.1] (см. также [37, V.4]) назвал класс приближенных гомоморфизмов *устойчивым*, когда такая аппроксимация точными гомоморфизмами возможна. Простые примеры показывают, что универсальное положительное решение недостижимо[5]; все, на что можно надеяться, это устойчивость для частных классов структур и отображений.

Первый результат в этой области был получен Хаерсом [20]: любой ε-приближенный гомоморфизм $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (т.е. $|f(x) + f(y) - f(x+y)| \le \varepsilon$ для всех x, y) ε-аппроксимируется точным гомоморфизмом $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (т.е. $|f(x) - g(x)| \le \varepsilon$ для всех x), причем если f — измеримое (по Бэру или Лебегу) отображение, то g можно получить в виде $g(x) = cx$, где $c = \mathrm{const}$. Калтон и Робертс [22] получили похожий результат для аддитивных отображений алгебр множеств в $\mathbb{R}^+$ с коэффициентом $K = 45$. Улам и Молдин [37] приводят еще несколько частных примеров.

Используя метод усреднения по мере и последовательного приближения, Гроув и др. [18], Каждан [25], Алексеев и др. [1], Штерн [31, 32] получили некоторые результаты об аппроксимации приближенных гомоморфизмов $f\colon A \to B$, где A — компактная или хотя бы аменабельная группа, а B — группа унитарных линейных преобразований некоторого гильбертова пространства. Особенностью этого метода (см. разд. 2) является использование полноты и кольцевой структуры линейных преобразований гильбертова пространства, а не только групповой структуры его унитарной группы.

Фарах [12–16] недавно обнаружил интересные случаи стабильных приближенных гомоморфизмов в категориях групп, булевых алгебр и решеток, в основном таких, которые являются конечными или счетными произведениями своих подструктур, в особенности для измеримых по Бэру отображений и псевдометрики $\mathrm{d}_\varphi(x,y) = \varphi([x \ne y])$, где φ — субмера на индексном множестве I, а $[x \ne y] = \{i \in I : x(i) \ne y(i)\}$.

Развивая это исследовательское направление, мы исследуем приближенные гомоморфизмы $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}$, где $\mathbb{A}$ — сепарабельная борелевская группа, оснащенная инвариантной σ-аддитивной борелевской вероятностной мерой μ, а $\mathbb{H} = \prod_{n\in\mathbb{N}} H_n$ — счетное произведение борелевских групп H_n с псевдометрикой d_φ, где φ — субмера на $\mathbb{N}$, которая удовлетворяет некоторому следствию теоремы Фубини в произведении с любой борелевской вероятностной мерой μ указанного вида: такие субмеры мы называем F-*субмерами* (см. разд. 3). Мы доказываем в разд. 4, что в этом случае μ-измеримые и измеримые по Бэру ε-приближенные гомоморфизмы $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}$ могут быть $K\varepsilon$-аппроксимированы B-измеримыми гомоморфизмами, где $K \le 6$ для μ-измеримых отображений и $K \le 63$ для измеримых по Бэру.

Здесь уместно отметить, что, поскольку d_φ является, вообще говоря, псевдометрикой[6], пространства вида $\langle \mathbb{H}; \mathrm{d}_\varphi \rangle$ включают широкий класс фактор-структур над “польскими”[7] пространствами, которые сейчас привлекают большое внимание как в контексте дескриптивной теории множеств (см. [3, 19, 28]), так и в более общематематическом плане (“некоммутативная математика”, см. Конн [8]).

[5]Действительно, рассмотрим циклические группы $C_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, n-1\}$ с расстоянием, равным разности в C_n. Если $n = 2m+1$ нечетно, то отображение $f_m\colon C_2 \to C_n$, определенное посредством $f_m(0) = 0$ и $f_m(1) = m$, является 1-приближенным гомоморфизмом. В то же время единственный точный гомоморфизм $C_2 \to C_n$ — это тождественный 0, который только m-аппроксимирует f_m. Таким образом, не зависящей от m константы K здесь не может быть.

[6]Это означает, что $\mathrm{d}_\varphi(x,y) = 0$ не обязательно влечет $x = y$.

[7]“Польскими” называются сепарабельные вполне метризуемые пространства.

Класс F-субмер включает, например, любую меру, сконцентрированную на конечном множестве, все непатологические полунепрерывные снизу субмеры φ на $\mathbb{N}$ (случай, рассмотренный Фарахом) и их "хвостовые субмеры" $\varphi_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x \cap [n, \infty))$, субмеры, ассоциированные с некоторыми важными идеалами, и многие другие и замкнут относительно таких операций, как поточечный предел, счетный супремум. Среди соответствующих пространств $\langle \mathbb{H}; \mathrm{d}_\varphi \rangle$ встречаются неполные (скажем, пространство, ассоциированное с идеалом Вейля, разд. 6) или, например, дискретные пространства несчетной мощности, к которым методы [1, 18, 25], связанные с представлением в унитарных группах, вряд ли применимы. Мы используем другой метод усреднения по мере, по существу введенный Фарахом [16] для частного класса F-субмер и основанный на свойстве Фубини.

В оставшейся части статьи мы уделяем внимание важному частному случаю: когда псевдометрика на группе вида $\mathbb{H} = \prod_{n\in\mathbb{N}} H_n$ задается некоторым идеалом $\mathcal{I}$ над $\mathbb{N}$ в том смысле, что

$$\mathrm{d}_{\mathcal{I}}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{когда } x \approx_{\mathcal{I}} y, \\ 1, & \text{когда } x \not\approx_{\mathcal{I}} y, \end{cases} \qquad \text{для всех} \quad x, y \in \mathbb{H}\,,$$

где $x \approx_{\mathcal{I}} y$ означает, что множество $[x \neq y] = \{n : x(n) \neq y(n)\}$ принадлежит идеалу $\mathcal{I}$. В этом случае уместно говорить об *$\mathcal{I}$-приближенных гомоморфизмах*, называя так всякое отображение $f : \mathbb{A} \to \mathbb{H}$ (где $\mathbb{A}$ — какая-то группа) такое, что $f(a)f(b) \approx_{\mathcal{I}} f(ab)$ для всех $a, b \in \mathbb{A}$, а также об *$\mathcal{I}$-аппроксимации* в аналогичном смысле. Следуя Фараху [12, 13], мы называем идеал $\mathcal{I}$ на $\mathbb{N}$ *идеалом Радона–Никодима* (кратко: RN), если любой измеримый $\mathcal{I}$-приближенный гомоморфизм $f : \mathbb{A} \to \mathbb{H}$ $\mathcal{I}$-аппроксимируется борелевским "строгим" гомоморфизмом.

Мы доказываем в разд. 5, что, какова бы ни была F-субмера φ на $\mathbb{N}$, идеалы $\mathrm{Null}(\varphi)$ и $\mathrm{Fin}(\varphi)$ являются RN-идеалами. Это существенно усиливает результаты Фараха [12, 13], где свойство RN установлено посредством весьма сложного рассуждения для идеалов вида $\mathrm{Exh}(\varphi) = \{x : \varphi_\infty(x) = 0\}$, где φ — непатологическая полунепрерывная снизу субмера, и только в отношении Fin-инвариантных измеримых по Бэру отображений $2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$, где $2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ обозначает двухэлементную группу, как обычно. Наш результат относится к значительно более широкому классу идеалов: в частности, мы доказываем в разд. 7, решая проблемы Фараха [14], что все *неразложимые идеалы* и все *идеалы Вейсса* (или *мультипликативно неразложимые идеалы*) суть RN-идеалы[8].

Этот вариант проблемы Улама также допускает формулировку в терминах теории поднятий[9]: действительно, $\mathcal{I}$-приближенные гомоморфизмы $f : \mathbb{A} \to \mathbb{H}$ являются поднятиями точных гомоморфизмов $F(a) = \{y \in \mathbb{H} : y \approx_{\mathcal{I}} f(a)\}$, отображающих $\mathbb{A}$ в фактор-группу $\mathbb{H}/\mathcal{I}$. Более того, любой точный гомоморфизм $g : \mathbb{A} \to \mathbb{H}$, который $\mathcal{I}$-аппроксимирует f, также является поднятием F. Отметим, что проблема поднятий, которые сами — гомоморфизмы[10], естественно возникает в контексте дескриптивной теории множеств в текущем активном процессе исследования фактор-структур над "польскими" пространствами (о чем мы говорили выше), в частности структур вида $(\prod_{n\in\mathbb{N}} H_n)/\mathcal{I}$.

[8] Определения этих идеалов даются в разд. 7. Уместно отметить, что свойство RN идеала Fin всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$ было фактически установлено Величковичем [38]. Сходный результат был получен авторами [23] для аддитивной группы $\mathbb{R}$: если $G \subseteq \mathbb{R}$ — счетная подгруппа, то любой измеримый G-приближенный гомоморфизм $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ G-аппроксимируется отображением вида $y = cx$, где $c = \mathrm{const}$.

[9] Мы ссылаемся на [21] относительно теории поднятий. Отметим, что в отличие от принятого в анализе здесь не требуется, чтобы поднятие само было гомоморфизмом по определению.

[10] Впервые явно сформулированная в этом контексте, по-видимому, Тодорчевичем [35] для случая гомоморфизмов булевых алгебр. Фарах [13] указывает на дискуссии с А.С. Кекрисом в отношении этой проблемы для групповых гомоморфизмов. О других свойствах фактор-структур вида $2^{\mathbb{N}}/\mathcal{I}$ см. Кекрис [27].

В этой работе рассматриваются в основном гомоморфизмы групп, в частности группы $2^{\mathbb{N}}$, или, что то же самое, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{X : X \subseteq \mathbb{N}\}$ с симметрической разностью в качестве групповой операции, однако несложное рассуждение в разд. 9 переносит главные результаты на (более богатую) структуру $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ как булевой алгебры.

Методы, разработанные для доказательства теорем о стабильности, оказываются полезными и в некоторых вопросах гомологической алгебры, в частности для работы с группами *борелевских когомологий*. Эта концепция (см. Мур [29], Дю Пре [10], где даются ссылки на более ранние работы, или, например, [2] или [5] из более поздних работ) в общем может быть пересмотрена в свете развития теории борелевских множеств и борелевских групп (см., например, монографии Кекриса и Беккера [3] и Кекриса [26]), а также, возможно, теории ограниченных когомологий (см. Григорчук [17]). Однако нашей целью здесь является доказательство двух частных результатов. Именно, мы показываем в разд. 13, что группа $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$ изоморфна группе $\mathsf{Hom}_{\mathrm{C}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$ всех непрерывных гомоморфизмов $h\colon 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$, в то время как для любой счетной группы G группа $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(\mathbb{R}, G)$ тривиальна, т.е. все борелевские коциклы являются борелевскими кограницами (разд. 14). (Группа $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(A, B)$ равна группе всех борелевских коциклов $C\colon A^2 \to B$ по модулю подгруппы всех борелевских кограниц.)

1. БАЗОВЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Как обычно, $\mathcal{P}(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$ — множество всех подмножеств X.

Борелевские множества пространства $\mathcal{X}$ образуют наименьшее семейство $\mathbb{B}(\mathcal{X})$ подмножеств $\mathcal{X}$, содержащее все открытые множества и замкнутое относительно операций счетного объединения и дополнения. Счетная сумма нигде не плотных множеств полного пространства $\mathcal{X}$ называется “*тощим*” (или 1-й категории) множеством в $\mathcal{X}$. *Множество со свойством Бэра* — это множество, совпадающее с некоторым борелевским множеством с точностью до “тощего” множества.

Любая σ-аддитивная мера μ, определенная на борелевской алгебре $\mathbb{B}(\mathcal{X})$ полного пространства $\mathcal{X}$, называется *борелевской мерой* (на $\mathcal{X}$). В этом случае множество $X \subseteq \mathcal{X}$ *μ-измеримо*, если имеются борелевские множества $U, B \subseteq \mathcal{X}$ такие, что $X \bigtriangleup U \subseteq B$ и $\mu(B) = 0$, а (продолженная) мера $\mu(X)$ полагается равной $\mu(U)$.[11] Борелевская мера на $\mathcal{X}$, удовлетворяющая $\mu(\mathcal{X}) = 1$, называется *вероятностной*.

Подчеркнем, что борелевские меры по определению σ-аддитивны.

Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — два полных пространства. Отображение $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$

1) *борелевское* (т.е. B-*измеримо*, или *измеримо по Борелю*), <u>или</u>
2) *измеримо по Бэру*, <u>или</u>
3) *μ-измеримо* (где μ — фиксированная борелевская мера на $\mathcal{X}$),

если прообраз $F^{-1}(U)$ любого открытого множества $U \subseteq \mathcal{Y}$ является соответственно борелевским множеством, <u>или</u> множеством со свойством Бэра, <u>или</u> μ-измеримым множеством в $\mathcal{X}$.

Предложение 1 (см. Кекрис [26, §18])**.** *Пусть $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ — “польские” пространства, а $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ — борелевское множество, причем выполнено по крайней мере одно из двух условий*: 1) *для любого $x \in \mathcal{X}$ сечение $P_x = \{y : \langle x, y \rangle \in P\}$ не “тощее” в $\mathcal{Y}$ или* 2) *найдется такая борелевская мера μ на $\mathcal{Y}$, что $\mu(P_x) > 0$ для любого $x \in \mathcal{X}$. Тогда существует борелевская функция $F\colon \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ такая, что $F(x) \in P_x$ для всех x.* $\square$

[11] Напомним, что $X \bigtriangleup Y = (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X)$ — симметрическая разность.

Предложение 2 (теорема Фубини, см. Кекрис [26, §17.A]). *Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — "польские" пространства с борелевскими мерами соответственно μ, ν, а множество $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ $(\mu \times \nu)$-измеримо. Тогда функция $m(x) = \nu(P_x)$ (где $P_x = \{y\colon \langle x, y\rangle \in P\}$) определена для μ-почти всех $x \in \mathcal{X}$ и μ-измерима и выполнено $(\mu \times \nu)(P) = \int_{x\in\mathcal{X}} m(x)\,d\mu(x)$.* $\square$

Борелевской группой мы будем называть любую группу $\langle A; \cdot\rangle$, чье базовое множество A есть "польское" пространство, а групповая операция есть борелевское отображение $A^2 \to A$. В этом случае борелевская мера μ на A называется *инвариантной*, если $\mu(X) = \mu(aX) = \mu(Xa)$ для любого борелевского $X \subseteq A$ и любого элемента $a \in A$, и *унимодулярной*, если $\mu(X) = \mu(X^{-1})$ для любого борелевского $X \subseteq A$.

2. АППРОКСИМАЦИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ В УНИТАРНЫЕ ГРУППЫ

Следующий несложный результат вводит в методику использования инвариантных вероятностных мер для аппроксимации измеримых приближенных гомоморфизмов. Пусть $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$ — группа с операцией произведения комплексных чисел, т.е. то же самое, что $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, и с расстоянием $\rho(x, y) = |x - y|$ (имеются в виду разность и модуль в $\mathbb{C}$), не равным естественному расстоянию в $\mathbb{T}$.

Теорема 3. *Пусть μ — борелевская вероятностная инвариантная мера на борелевской группе A и $\varepsilon < 0.01$. Тогда каждый μ-измеримый ε-приближенный гомоморфизм $f\colon A \to \mathbb{U}$ 2ε-аппроксимируется μ-измеримым (точным) гомоморфизмом $f'\colon A \to \mathbb{C}$.*

Доказательство [1, 25]. Интеграл $\int(\ldots)\,d\mu(x)$ будет все время обозначать интеграл по области A в смысле меры μ. Положим[12]

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a)\exp\Bigl(\int \ln(f(a)^{-1}f(x)^{-1}f(xa))\,d\mu(x)\Bigr), \\ h(a) &= \int f(x)^{-1}f(xa)\,d\mu(x) \end{aligned} \tag{1}$$

для каждого $a \in A$. Мы утверждаем, что

$$|g(a) - f(a)| \le 1.1\,\varepsilon \quad \text{и} \quad |g(a)g(b) - g(ab)| \le 8\varepsilon^2 \qquad \text{для всех} \quad a, b \in A. \tag{2}$$

Если это доказано, то мы полагаем $\varepsilon_1 = 8\varepsilon^2$ и $f_1 = g$; тогда $f_1\colon A \to \mathbb{U}$ будет ε_1-приближенным измеримым гомоморфизмом. Теперь мы можем применить ту же конструкцию (1) к f_1 и ε_1 и получить $8\varepsilon_1^2$-приближенный гомоморфизм g_1, который $1.1\varepsilon_1$-приближает f_1, и т.д. Поточечный предел $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ доказывает теорему.

Для доказательства (2) отметим для начала, что по выбору f для всех a и x выполнено $|f(a)^{-1}f(x)^{-1}f(xa) - 1| \le \varepsilon$, откуда легко следует

$$|g(a) - h(a)| \le 2\,\varepsilon^2. \tag{3}$$

Теперь мы доказываем

$$|h(a) - f(a)| \le \varepsilon \quad \text{и} \quad |h(a)h(b) - h(ab)| \le 2\varepsilon^2 \qquad \text{для всех} \quad a, b \in A. \tag{4}$$

[12] Любопытно, что метод усреднения, используемый для определения h в (1), имеет параллели в доказательстве леммы 11 в нашем главном результате ниже.

Действительно, во-первых, $h(a) - f(a) = \int (f(x)^{-1} f(xa) - f(a))\, d\mu(x)$, где $|f(x)^{-1} f(xa) - - f(a)| = |f(xa) - f(x) f(a)| \le \varepsilon$, что влечет первое неравенство (4), поскольку μ — вероятностная мера. Для доказательства второго неравенства заметим, что $h(a)h(b) - h(ab) = I_1 + I_2 - I_3$, где

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iint \Big(f(x)^{-1} f(xa) - f(a)\Big)\Big(f(y)^{-1} f(yb) - f(b)\Big)\, d\mu(x)\, d\mu(y),\\
I_2 &= \int f(x)^{-1} \left(f(xa) f(b) - f(xab)\right) d\mu(x),\\
I_3 &= \int f(a) f(y)^{-1} \left(f(y) f(b) - f(yb)\right) d\mu(y).
\end{aligned}
$$

Подстановка xa вместо y в I_3 дает

$$
I_2 - I_3 = \int \Big(f(x)^{-1} - f(a) f(xa)^{-1}\Big)(f(xa) f(b) - f(xab))\, d\mu(x).
$$

Теперь элементарные преобразования приносят $|I_1| \le \varepsilon^2$ и $|I_2 - I_3| \le \varepsilon^2$, что завершает доказательство (4). Отсюда с учетом (3) мы имеем (2). $\square$

На самом деле Алексеев и др. [1, теорема 5.13] получают более общий результат для отображений $f\colon A \to G$, где A — компактная группа, а G — конечномерная группа Ли, однако существенным моментом является представление G как подгруппы конечномерной унитарной группы $\mathbb{U}(n)$, а сам метод аппроксимации в точности тот же, как в доказательстве теоремы 3. Очевидно, что метод использует не только групповую структуру $\mathbb{U}$ (или в более общем случае $\mathbb{U}(n)$), но и кольцевую структуру $\mathbb{C}$ (соответственно кольца матриц размерности n), а также усреднение по инвариантной мере. Разумеется, играет роль и топологическая полнота групп $\mathbb{U}$ или $\mathbb{U}(n)$, поскольку аппроксимирующий гомоморфизм получается как поточечный предел последовательности все более точных приближенных гомоморфизмов.

Остается добавить, что этот метод аппроксимации был введен Кажданом [25] для отображений вида $A \to G$, где A — аменабельная группа, а G — группа унитарных преобразований некоторого гильбертова пространства. В этой версии Каждана вероятностная мера заменяется *средним* (т.е. линейным отображением, существование которого вытекает в данном случае из аменабельности). Мы ссылаемся на работы Штерна [31, 32] относительно самых последних результатов в этом направлении.

3. СУБМЕРЫ СО СВОЙСТВОМ ФУБИНИ

В этом разделе мы даем определение и краткую характеристику тех субмер, которые участвуют в определении (псевдо)метрических групп, рассматриваемых в нашей работе.

Субмерой называется любая функция $\varphi\colon \mathcal{A} \to [0, +\infty]$, определенная на алгебре множеств $\mathcal{A}$ и удовлетворяющая $\varphi(\varnothing) = 0$, $\varphi(x) < +\infty$ для всех *конечных* x, и $\varphi(x) \le \varphi(x \cup y) \le \varphi(x) + \varphi(y)$. (Однако не требуется, чтобы $\varphi(x \cup y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для любых дизъюнктных $x, y \in \mathcal{A}$.)

Для простоты субмера, определенная на алгебре $\mathcal{P}(I)$ всех подмножеств некоторого множества I, будет называться *субмерой на* I. Следующее определение вводит важный класс субмер, характеризуемый тем, что они удовлетворяют некоторой форме теоремы Фубини в произведении с борелевскими вероятностными мерами.

Определение 4. Допустим, что μ — борелевская вероятностная мера на “польском” пространстве $\mathcal{X}$. Субмера φ на счетном множестве I будет называться μ-F-*субмерой* (подробнее: субмерой со свойством Фубини по отношению к μ), если

1) φ является борелевским отображением $\mathcal{P}(I) \to [0, +\infty]$ и
2) каковы бы ни были вещественные $c, p \geq 0$, множество $B \subseteq I$, удовлетворяющее $\varphi(B) \geq c$, и семейство μ-измеримых множеств $X_i \subseteq \mathcal{X}$, $i \in B$, удовлетворяющих $\mu(X_i) \geq p$, мы имеем неравенство $\int_{x \in \mathcal{X}} \varphi(B_x)\, d\mu(x) \geq c \cdot p$, где $B_x = \{i \in B \colon x \in X_i\}$ для любого $x \in \mathcal{X}$.

Субмера φ, которая является μ-F-субмерой, какова бы ни была мера μ указанного вида, будет называться F-*субмерой*. □

Хотя определение выглядит громоздким, его идея очень проста. В самом деле, в рассматриваемой ситуации единственно разумным способом определить значения $\varphi \times \mu$ и $\mu \times \varphi$ хотя бы для борелевских множеств $W \subseteq \mathcal{X} \times I$ будет

$$(\mu \times \varphi)(W) = \int\limits_{\mathcal{X}} \varphi(W_x)\, d\mu(x) \qquad \text{и} \qquad (\varphi \times \mu)(W) = \sup_{B \subseteq I} \varphi(B) \inf_{i \in B} \mu(W_i),$$

где $W_x = \{i \in I \colon \langle x, i \rangle \in W\}$ и $W_i = \{x \in \mathcal{X} \colon \langle x, i \rangle \in W\}$ и предполагается, что все W_i μ-измеримы. В этих обозначениях часть 2) определения равносильна тому, что мы всегда имеем $(\varphi \times \mu)(W) \leq (\mu \times \varphi)(W)$.

Согласно обычной теореме Фубини (предложение 2) справедлива

Лемма 5. *Любая мера на конечном множестве есть* F-*субмера.* □

Лемма 6. *Если ψ является* F-*субмерой на счетном множестве I и $M > 0$, то $\varphi(x) = \min\{\psi(x), M\}$ — также* F-*субмера.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{X}$, μ, $B \subseteq I$, X_i, c, p, B_x таковы, как в определении 4. Чтобы доказать, что $\int_{x \in \mathcal{X}} \varphi(B_x)\, d\mu(x) \geq c \cdot p$, положим

$$X' = \{x \in \mathcal{X} \colon \psi(B_x) < M\} \qquad \text{и} \qquad X'' = \{x \in \mathcal{X} \colon \psi(B_x) \geq M\},$$

а также $m'' = \mu(X'')$. (То, что множества X' и X'' μ-измеримы, легко следует из борелевости ψ.) Понятно, что $\int_{x \in X''} \varphi(B_x)\, d\mu(x) = m''M$, т.е. если $m'' \geq p$, то все доказано. Если же $m'' < p$, то остается проверить, что $v = \int_{x \in X'} \psi(B_x)\, d\mu(x) \geq c \cdot (p - m'')$. Для этого положим $X_i' = X_i \cap X'$ для всех $i \in B$, так что $\mu(X_i') \geq p - m''$. Теперь мы имеем $v \geq c \cdot (p - m'')$, поскольку ψ является F-субмерой. □

Лемма 7. *Если φ_1 и φ_2 —* F-*субмеры на счетных непересекающихся множествах I_1 и I_2, то функции*

$$\varphi(x) = \varphi_1(x \cap I_1) + \varphi_2(x \cap I_2) \qquad \text{и} \qquad \varphi'(x) = \max\{\varphi_1(x \cap I_1), \varphi_2(x \cap I_2)\}$$

являются F-*субмерами на $I = I_1 \cup I_2$.*

Доказательство. Простая проверка. □

Лемма 8. *Если $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — поточечно сходящаяся (включая сходимость к $+\infty$!) последовательность* F-*субмер на счетном множестве I, то $\varphi = \lim_{n \to \infty} \varphi_n$ является* F-*субмерой.*

Доказательство. Для того чтобы φ была F-субмерой, очевидно, достаточно, чтобы $\varphi^M(x) = \min\{\varphi(x), M\}$ являлась F-субмерой для каждого $M > 0$. Фиксируем $M > 0$. Согласно лемме 6 можно предполагать, что $\varphi_n(x) \leq M$ для всех x и n. В этом случае из борелевости функций φ и φ_n и поточечной сходимости следует сходимость по мере, т.е. последовательность интегралов $\int_{x \in \mathcal{X}} \varphi_n(B_x)\, d\mu(x)$ сходится к $\int_{x \in \mathcal{X}} \varphi(B_x)\, d\mu(x)$ при $n \to \infty$.

Кроме того, $\varphi_n(B) \to \varphi(B)$ также ввиду поточечной сходимости. Остается вспомнить, что каждая φ_n является F-субмерой. $\square$

Следствие 9. *Если φ_n есть* F-*субмера при любом n, то функции $\varphi(x) = \sup_n \varphi_n(x)$ и $\varphi(x) = \limsup_{n\to\infty} \varphi_n(x)$ также являются* F-*субмерами.* $\square$

Этих простых фактов достаточно, чтобы показать, что многие практически интересные субмеры суть F-субмеры (см. ниже разд. 6). Простейший, пожалуй, пример не F-субмеры определяется на трехэлементном множестве X посредством $\varphi(X_1) = 2$ для всех одноэлементных множеств $X_1 \subseteq X$, $\varphi(X_2) = 3$ для всех двухэлементных $X_2 \subseteq X$ и $\varphi(X) = 5$. Математически более осмысленный пример не F-субмеры см. в п. 8.1.

4. АППРОКСИМАЦИЯ ИЗМЕРИМЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЯ ГРУПП

В этом разделе мы фиксируем группы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{H}$ такие, что

(∗) $\mathbb{A}$ — борелевская группа, оснащенная инвариантной борелевской вероятностной (σ-аддитивной) мерой μ, а группа $\mathbb{H}$ имеет вид $\mathbb{H} = \prod_{i\in\mathbb{N}} H_i$, где все H_i — борелевские группы.

Таким образом, $\mathbb{H}$ состоит из всевозможных функций h, определенных на $\mathbb{N}$ и таких, что $h(i) \in H_i$ для всех i, с покомпонентной операцией и с нейтральным элементом 1, заданным посредством $1(i) = 1_i$ для всех i, где 1_i — нейтральный элемент H_i. Положим $|s| = \{i\colon s(i) \neq 1_i\}$ и $[s \neq t] = \{i\colon s(i) \neq t(i)\} = |st^{-1}|$ для $s, t \in \mathbb{H}$.

Наконец, фиксируем субмеру φ на $\mathbb{N}$ и определим $\mathbb{H}_\varphi$ как группу $\mathbb{H}$, оснащенную псевдометрикой $\mathsf{d}_\varphi(s,t) = \varphi([s \neq t]) = \varphi(|st^{-1}|)$. Нам необходимы следующие определения. Пусть $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}$.

- Если $x \in \mathbb{A}$, $i \in \mathbb{N}$, то пусть $f_i(x) = f(x)(i)$, так что $f_i\colon \mathbb{A} \to H_i$.
- $\mathsf{D}^f_{xy} \overset{\text{def}}{=} [f(x)f(y) \neq f(xy)] = \{i\colon f_i(x)f_i(y) \neq f_i(xy)\}$ для $x, y \in \mathbb{A}$.
- Отображение f есть *ε-приближенный гомоморфизм*, если $\varphi(\mathsf{D}^f_{xy}) \le \varepsilon$ для всех $x, y \in \mathbb{A}$. Далее, f есть *почти везде (п.в.) ε-приближенный гомоморфизм*, если $\mu\{x\colon \varphi(\mathsf{D}^f_{ax}) > \varepsilon\} = 0$ для всех $a \in \mathbb{A}$.
- Отображение $g\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}_\varphi$ *δ-аппроксимирует* f, если мы имеем $\varphi([f(a) \neq g(a)]) \le \delta$ для всех $a \in \mathbb{A}$.

Теорема 10. *Допустим, что выполнено (∗), φ является* F-*субмерой на $\mathbb{N}$ и $\varepsilon \ge 0$. Тогда любой μ-измеримый п.в. ε-приближенный гомоморфизм $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}_\varphi$ 6ε-аппроксимируется борелевским гомоморфизмом $\mathbb{A} \to \mathbb{H}$.*

Доказательство[13]**.** Через a, b, x, y будем обозначать элементы группы $\mathbb{A}$. Назовем индекс $i \in \mathbb{N}$ “*хорошим*”, если $\mu^2\{\langle x, y\rangle\colon i \in \mathsf{D}^f_{xy}\} < \frac{2}{9}$. Мы утверждаем, что $\varphi\{i\colon i$ “плохое”$\} \le$

[13]Излагаемое доказательство использует некоторые идеи из доказательства теорем 2.1 и 2.2 в работе Фараха [16], где рассмотрен случай, в общем соответствующий конечным группам $\mathbb{A}$ с однородной мерой μ. Определенное техническое усовершенствование позволило нам снизить коэффициент 24 в [16, теорема 2.1] до 6, ослабить определение ε-приближенного гомоморфизма, которое включает в [16] еще и требование, чтобы $\varphi([f(x^{-1}) \neq f(x)^{-1}]) \le \varepsilon$ для всех x, а также избавиться от требования унимодулярности μ, т.е. $\mu(X) = \mu(X^{-1})$ для всех борелевских X.

$\leq \frac{9}{2} \cdot \varepsilon$. Допустим, что неравенство не выполнено. Благодаря тому что φ является F-субмерой, мы имеем

$$\int\limits_{\langle x,y\rangle\in\mathbb{A}^2} \varphi(\mathsf{D}^f_{xy})\, d\mu^2(x,y) > \varepsilon,$$

поэтому множество $P = \{\langle x,y\rangle\colon \varphi(\mathsf{D}^f_{xy}) > \varepsilon\}$ имеет положительную μ^2-меру, что противоречит выбору f.

Отвлекаясь от доказательства теоремы, можно заметить, что для каждого “хорошего” i функция $f_i(x) = f(x)(i)\colon \mathbb{A} \to H_i$ также может рассматриваться как приближенный гомоморфизм, но не в смысле малости расстояний между $f_i(x)f_i(y)$ и $f_i(xy)$, а в том смысле, что равенство $f_i(x)f_i(y) = f_i(xy)$ выполнено для значительного большинства значений x, y.

Лемма 11. *Если $i \in \mathbb{N}$ “хорошее”, то для любого элемента $a \in \mathbb{A}$ существует (очевидно, единственный) элемент $g_i(a) \in H_i$ такой, что $\mu\{x\colon f_i(ax)f_i(x)^{-1} \neq g_i(a)\} \leq 1/3$.*[14]

Доказательство. В противном случае понятно, что множество

$$P_a = \{\langle x,y\rangle\colon f_i(ax)f_i(x)^{-1} \neq f_i(ay)f_i(y)^{-1}\}$$

удовлетворяет $\mu^2(P_a) \geq 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$. Однако мы видим посредством домножения на $f_i(x)$ справа, что если $\langle x,y\rangle \in P_a$, то выполнено по крайней мере одно из двух:

1) $f_i(y)^{-1}f_i(x) \neq f_i(y^{-1}x)$, т.е. $f_i(x) \neq f_i(y)f_i(y^{-1}x)$, т.е. $i \in \mathsf{D}^f_{y,\,y^{-1}x}$;

2) $f_i(ax) \neq f_i(ay)f_i(y^{-1}x)$, т.е. $i \in \mathsf{D}^f_{ay,\,y^{-1}x}$.

Но $\mu^2\{\langle x,y\rangle\colon i \in \mathsf{D}^f_{y,\,y^{-1}x}\} < 2/9$, поскольку i “хорошее”, а отображение $\langle x,y\rangle \mapsto \langle y, y^{-1}x\rangle$ сохраняет μ^2-меру из-за инвариантности μ. (Это легко проверить посредством теоремы Фубини[15] для произведения $\mu^2 = \mu \times \mu$: в самом деле, вертикальные сечения образа суть сдвиги горизонтальных сечений прообраза.) Аналогично $\mu^2\{\langle x,y\rangle\colon i \in \mathsf{D}^f_{ay,\,y^{-1}x}\} < 2/9$. Это дает противоречие с тем, что $\mu^2(P_a) \geq 4/9$. $\square$

Лемма 12. *Если i “хорошее”, то $g_i\colon \mathbb{A} \to H_i$ является μ-измеримым гомоморфизмом.*

Доказательство. Чтобы доказать $g_i(ab) = g_i(a)g_i(b)$, заметим, что любое из следующих трех множеств имеет μ-меру $\leq 1/3$:

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x\colon g_i(a) \neq f_i(abx)f_i(bx)^{-1}\},\\ X_2 &= \{x\colon g_i(b) \neq f_i(bx)f_i(x)^{-1}\},\\ X_3 &= \{x\colon g_i(ab) \neq f_i(abx)f_i(x)^{-1}\}. \end{aligned}$$

Для X_2 и X_3 это следует из определения g_i. Чтобы получить результат для X_1, заменим b на a в результате для X_2, а затем заменим x на bx; напомним, что мера μ инвариантна. Следовательно, найдется $x \notin X_1 \cap X_2 \cap X_3$, откуда $g_i(ab) = g_i(a)g_i(b)$, что и требовалось.

Наконец, μ-измеримость g_i легко следует из теоремы Фубини (см. предложение 2). $\square$

Для “плохих” i пусть $g_i(a) = 1_i$ для всех $a \in \mathbb{A}$. Определим гомоморфизм $g\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}$ посредством $g(x)(i) = g_i(x)$ для $x \in \mathbb{A}$. Проверим, что $\varphi([f(x) \neq g(x)]) < 6\varepsilon$, каково бы ни

[14] Фарах [16] определяет $g_i(a)$ посредством равенства $f_i(ax)f_i(x^{-1}) = g_i(a)$, что, однако, оказывается менее удобным (см. примеч. 13). Вообще идея доказательства леммы 11 может быть прослежена по крайней мере до работы де Брауна [9], где, однако, рассматриваются лишь абелевы группы. См. также примеч. 12 выше.

[15] Это применение теоремы Фубини не дает возможности прямо распространить рассуждение на случай аменабельных групп $\mathbb{A}$.

было $x \in \mathbb{A}$. Пусть, напротив, $\varphi([f(a) \neq g(a)]) \geq 6\varepsilon$ для некоторого $a \in \mathbb{A}$. По доказанному выше мы имеем $\varphi(S) \geq \frac{3}{2} \cdot \varepsilon$, где S есть множество всех "хороших" индексов $i \in [f(a) \neq g(a)]$. Однако если $i \in S$, то $f_i(a) \neq g_i(a)$, следовательно,

$$\mu\{x \colon f_i(ax) f_i(x)^{-1} = g_i(a) \neq f_i(a)\} = \mu\{x \colon i \in \mathsf{D}^f_{ax}\} > 2/3$$

по определению g_i. Значит, поскольку φ есть F-субмера, мы имеем

$$\int\limits_{x \in \mathbb{A}} \varphi(\mathsf{D}^f_{ax}) \, d\mu(x) > \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

значит, $X = \{x \colon \varphi(\mathsf{D}^f_{ax}) > \varepsilon\}$ — множество положительной μ-меры, что противоречит выбору f. Итак, $\varphi([f(a) \neq g(a)]) < 6\varepsilon$, что и требовалось.

Гомоморфизм g μ-измерим по лемме 12. Покажем, что на самом деле g даже борелевский. Благодаря μ-измеримости по крайней мере найдется такое борелевское множество $D \subseteq \mathbb{A}$ меры $\mu(x) = 1$, что функция $g' = g \restriction D$ будет борелевской. В силу инвариантности μ множество $A_x = D \cap (x^{-1} D)$ имеет меру $\mu(A_x) = 1$ при любом $x \in \mathbb{A}$, т.е. $P = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{A}^2 \colon y \in A_x\}$ — борелевское подмножество $\mathbb{A}^2$, все сечения A_x которого имеют μ-меру 1. По предложению 1 найдется борелевское отображение $x \mapsto a_x$ такое, что $a_x \in A_x$ для каждого $x \in \mathbb{A}$. Но тогда при любом x выполнено $a_x \in D$ и $xa_x \in D$, таким образом, $g(x) = g'(xa_x)\, g'(a_x)^{-1}$ для всех x, откуда следует борелевость g.[16] Теорема 10 доказана. $\square$

Замечание 13. Определение п.в. ε-приближенного гомоморфизма для теоремы 10 не может быть (если $\mathbb{A}$ не дискретна) ослаблено до

(†) $\lambda^2\{\langle x, y\rangle \colon \varphi(\mathsf{D}^f_{xy}) > \varepsilon\} = 0;$

чтобы это увидеть, достаточно рассмотреть функцию $f(x) = x$ при $x \neq 1_{\mathbb{A}}$ и $f(1_{\mathbb{A}}) = s$, где $s \in \mathbb{H}$ таково, что $\varphi([s \neq 1_{\mathbb{H}}]) > 0$. Однако можно показать, что (†) влечет существование борелевского (непрерывного в случае, указанном в примеч. 16) гомоморфизма g, который 6ε-приближает f на множестве полной μ-меры.

Замечание 14. Множитель 6 в теореме 10 вызывает интерес, но у нас нет какой-либо простой идеи, как либо уменьшить его, либо доказать невозможность уменьшения посредством подходящих примеров.

Замечание 15. "Объем" свойства Фубини, который используется в доказательстве теоремы 10, состоит в том, что φ должна быть μ-F-субмерой и μ^2-F-субмерой.

Замечание 16. Два направления обобщения теоремы 10, которые мы не смогли осуществить, представляют интерес. Во-первых, доказательство теоремы требует, чтобы μ была если и не вероятностной, то по крайней мере конечной (инвариантной) борелевской мерой, поэтому было бы весьма интересно доказать теорему в случае, когда μ — борелевская, скажем, σ-конечная мера, например мера Лебега на $\mathbb{R}$. В этом случае сама концепция F-субмеры может потребовать пересмотра. Во-вторых, верна ли теорема для аменабельных групп $\mathbb{A}$, т.е. когда μ — конечная, инвариантная, но не обязательно σ-аддитивная мера, определенная на всех (не только борелевских) подмножествах $\mathbb{A}$.

Замечание 17. Доказательство теоремы существенно использует μ-измеримость f, и не видно, как перенести его на не обязательно измеримые f (с тем, конечно, чтобы и g было не обязательно измеримо).

[16] Если $\mathbb{A}$ — топологическая группа, т.е. групповая операция непрерывна, то по теореме Петтиса [26, 9.10] g будет непрерывным, а не только борелевским.

Измеримые по Бэру отображения. Результаты о мере и категории часто допускают похожие доказательства, однако в нашем случае теорема для измеримых по Бэру отображений достаточно элементарно следует из теоремы 10.

Подобно данным выше определениям скажем, что

- Отображение $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}_\varphi$ есть *почти везде в смысле категории* (*п.в.К.*) ε-приближенный гомоморфизм, если при любом $a \in \mathbb{A}$ множество $\{x\colon \varphi(\mathsf{D}^f_{ax}) > \varepsilon\}$ является "тощим" (1-й категории).

Теорема 18. *Пусть ε и φ таковы, как в теореме* 10, *а $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}_\varphi$ есть измеримый по Бэру п.в.К. ε-приближенный гомоморфизм. Тогда f 63ε-аппроксимируется борелевским гомоморфизмом.*

Конечно, множитель 63 здесь вряд ли оптимален.

Доказательство теоремы 18. Прежде всего покажем, что f является везде 3ε-приближенным гомоморфизмом, т.е. $\varphi(\mathsf{D}^f_{xy}) \le 3\varepsilon$ для всех $x, y \in \mathbb{A}$. Для этого заметим (оставив проверку читателю), что выполнено

$$\mathsf{D}^f_{xy} \subseteq \mathsf{D}^f_{xz} \cup \mathsf{D}^f_{y,\,y^{-1}z} \cup \mathsf{D}^f_{xy,\,y^{-1}z}\,,$$

каково бы ни было $z \in \mathbb{A}$, и каждое из трех множеств справа принимает φ-значение $< \varepsilon$ для ко-"тощего" множества элементов $z \in \mathbb{A}$.

Найдется ко-"тощее" борелевское $D \subseteq \mathbb{A}$ такое, что функция $f' = f \restriction D$ является борелевской. Для каждого x борелевское множество $A_x = D \cap (x^{-1}D)$ все еще ко-"тощее" и $a \in A_x \Rightarrow xa \in D$. Предложение 1 дает нам борелевское отображение $x \mapsto a_x$ такое, что $a_x \in A_x$ для каждого $x \in \mathbb{A}$. Тогда борелевская функция $\bar f(x) = f'(xa_x)\, f'(a_x)^{-1}$ 3ε-аппроксимирует f согласно показанному выше. Значит, $\bar f$ есть 10ε-приближенный гомоморфизм. Остается применить теорему 10 к $\bar f$. $\square$

5. ИДЕАЛЫ ФУБИНИ И РАДОНА–НИКОДИМА

В этом разделе мы рассматриваем специальный, но весьма важный случай в теореме 10, характеризующийся тем, что (псевдо)метрика задается диадической (т.е. со значениями $0, 1$) субмерой. Чтобы представить этот случай в более удобных терминах, напомним, что каждый идеал $\mathcal{I}$ на $\mathbb{N}$ порождает диадическую субмеру $\varphi_{\mathcal{I}}$ на $\mathbb{N}$, именно:

$$\varphi_{\mathcal{I}}(x) = \begin{cases} 1, & \text{когда } x \notin \mathcal{I}, \\ 0, & \text{когда } x \in \mathcal{I}, \end{cases} \qquad \text{для всех} \ \ x \subseteq \mathbb{N}\,.$$

Это рассмотрение приводит нас к определению.

Определение 19. Идеал $\mathcal{I}$ на $\mathbb{N}$ называется *идеалом Фубини* (кратко: F-идеалом), если $\varphi_{\mathcal{I}}$ есть F-субмера. $\square$

Таким образом, по определению F-идеалы — это идеалы нулевых множеств для диадических F-субмер φ. Однако этот класс идеалов охватывает и более общие определения. Напомним, что каждая субмера φ определяет свою "хвостовую субмеру"

$$\varphi_\infty(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x \setminus [0, n)).$$

Лемма 20. *Какова бы ни была* F*-субмера* φ *на* $\mathbb{N}$, *идеалы*

$$\mathrm{Fin}(\varphi) = \{x\colon \varphi(x) < +\infty\}, \qquad \mathrm{Null}(\varphi) = \{x\colon \varphi(x) = 0\}, \qquad \mathrm{Exh}(\varphi) = \mathrm{Null}(\varphi_\infty)$$

являются F*-идеалами.*

Доказательство. Для идеала $\mathrm{Null}(\varphi)$ понятно, что $\varphi_n(x) = n\varphi(x)$ будет F-субмерой вместе с φ при любом n. Тогда $\psi(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$ будет F-субмерой по лемме 8. Заметим, что ψ принимает значения только 0 и $+\infty$. Поэтому если заменить все значения $+\infty$ на 1, то результирующая субмера, назовем ее ψ', все еще будет F-субмерой. Однако $\psi' = \varphi_{\mathrm{Null}(\varphi)}$. Случай идеала $\mathrm{Fin}(\varphi)$ рассматривается аналогично, только следует определить $\varphi_n(x) = n^{-1}\varphi(x)$. Наконец, φ_∞ будет F-субмерой вместе с φ, что легко следует из леммы 8. $\square$

Чтобы получить приложение понятия F-идеала, рассмотрим опять группы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{H} = \prod_{i\in\mathbb{N}} H_i$ такие, как в $(*)$ из разд. 4. Пусть $\mathcal{I}$ — идеал на $\mathbb{N}$.

- Для любых $s, t \in \mathbb{H}$ отношение $s \approx_{\mathcal{I}} t$ означает, что множество $\mathsf{D}^f_{xy} = \{n\colon f_n(x)f_n(y) \neq f_n(xy)\}$ принадлежит $\mathcal{I}$.
- Отображение $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}$ называется *$\mathcal{I}$-приближенным гомоморфизмом*, если $f(x)f(y) \approx_{\mathcal{I}} f(xy)$ для всех $x, y \in \mathbb{A}$.
- Отображение $g\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}$ *$\mathcal{I}$-аппроксимирует* f, если мы имеем $f(a) \approx_{\mathcal{I}} g(a)$ для каждого $a \in \mathbb{A}$.

Определение 21 (Фарах)**.** Идеал $\mathcal{I}$ есть *идеал Радона–Никодима* (кратко: RN-идеал), если, каковы бы ни были группы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{H}$ вида $(*)$ из разд. 4, любой μ-измеримый $\mathcal{I}$-приближенный гомоморфизм $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}$ $\mathcal{I}$-аппроксимируется измеримым гомоморфизмом $g\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}$. $\square$

Следуя подходу разд. 4, мы могли бы определить понятия *п.в.* $\mathcal{I}$-приближенного гомоморфизма f (т.е. множество $\{y\colon f(x)f(y) \not\approx_{\mathcal{I}} f(xy)\}$ имеет меру 0 при любом x), а также добавить аналогичное требование относительно отображений, измеримых по Бэру (случай, рассмотренный Фарахом), однако рассуждение в начале доказательства теоремы 18 показывает, что такое расширение вряд ли дало бы что-либо новое.

Следствие 22. (Применяем теорему 10 к субмере $\varphi_{\mathcal{I}}$.) *Всякий* F*-идеал* $\mathcal{I}$ *над* $\mathbb{N}$ *есть* RN*-идеал. В частности, если* φ *есть* F*-субмера на* $\mathbb{N}$, *то идеалы* $\mathrm{Null}(\varphi)$, $\mathrm{Fin}(\varphi)$ *и* $\mathrm{Exh}(\varphi)$ *являются* RN*-идеалами*[17]. $\square$

F-идеалы допускают альтернативное определение. Рассмотрим индексированную систему множеств $\mathbf{y} = \{Y_a\}_{a\in I}$ и идеал $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(I)$. Пусть $\mathcal{I}^{\mathsf{C}} = \{I \setminus B\colon B \in \mathcal{I}\}$ (двойственный фильтр) и $\mathcal{I}^+ = \mathcal{P}(I) \setminus \mathcal{I}$ (семейство всех *$\mathcal{I}$-позитивных* множеств, т.е. не принадлежащих $\mathcal{I}$). Положим

$$\mathbf{\Lambda}^{\mathcal{I}}_{a\in I} Y_a = \limsup_{(\mathcal{I}^{\mathsf{C}})}\{Y_a\} = \bigcup_{B\in\mathcal{I}^+}\ \bigcap_{a\in B} Y_a.$$

Иными словами, $x \in \mathbf{\Lambda}^{\mathcal{I}}_{a\in I} Y_a$, если множество $Y(x) = \{a \in I\colon x \in Y_a\}$ принадлежит $\mathcal{I}^+$. Таким образом, $\mathbf{\Lambda}$ — это операция $\limsup_{(\mathcal{I}^{\mathsf{C}})}$ в смысле фильтра $\mathcal{I}^{\mathsf{C}}$, а также, конечно, частный случай δs-операции Хаусдорфа.

Определение 23. Борелевский идеал $\mathcal{I}$ на счетном множестве I есть *идеал Фату*, если всякий раз, когда $\mathcal{X}$ — "польское" пространство, оснащенное борелевской вероятностной

[17] Результат для идеалов вида $\mathrm{Exh}(\varphi) = \mathrm{Null}(\varphi_\infty)$, где φ — непатологическая l.s.c. субмера (см. ниже), доказан Фарахом [12, 13] для измеримых по Бэру $\mathtt{Fin}$-инвариантных отображений $f\colon 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$. Результат для $\mathrm{Fin}(\varphi)$ был сообщен Фарахом без доказательства одному из авторов в феврале 1999 г.

мерой μ, $p > 0$, множество $Y_a \subseteq \mathcal{X}$ μ-измеримо при любом $a \in I$ и $\{a\colon \mu(Y_a) \geq p\} \in \mathcal{I}^+$, множество $X = \mathbf{\Lambda}^{\mathcal{I}}_{a\in I} Y_a$ будет μ-измеримым с $\mu(X) \geq p$. $\square$

Чтобы прокомментировать это определение, положим

$$\mathbf{\Lambda}^{\mathcal{I}}_{a\in I} r_a = \limsup_{(\mathcal{I}^{\complement})}\{r_a\} = \sup_{B\in\mathcal{I}^+} \inf_{a\in B} r_a$$

для любой системы вещественных чисел r_a. Тогда, чтобы борелевский идеал $\mathcal{I}$ был идеалом Фату, необходимо и достаточно, чтобы для любой системы $\{Y_a\}_{a\in I}$ измеримых множеств $Y_a \subseteq \mathcal{X}$ (любого заданного “польского” пространства $\mathcal{X}$ с вероятностной мерой μ, как выше)

$$\mu(\mathbf{\Lambda}^{\mathcal{Z}}_{a\in I} Y_a) \geq \mathbf{\Lambda}^{\mathcal{Z}}_{a\in I}\ \mu(Y_a).$$

Это является, очевидно, формой леммы Фату для характеристических функций множеств.

С другой стороны, мы имеем следующий элементарный факт.

Предложение 24. *Понятия* F*-идеала и идеала Фату эквивалентны.* $\square$

6. ПРИМЕРЫ: F-СУБМЕРЫ И F-ИДЕАЛЫ

Для начала покажем, что F-субмеры включают достаточно известный класс субмер. Субмера φ на $\mathbb{N}$ называется *полунепрерывной снизу* (для краткости: l.s.c., от *lower semicontinuous*), если $\varphi(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi(x \cap [1,n))$ для всех $x \subseteq \mathbb{N}$. Субмера φ на $\mathbb{N}$ называется *непатологической*[18], если $\varphi(x) = \sup_{\nu\leq\varphi}\nu(x)$, где супремум ограничен всеми (не обязательно σ-аддитивными) мерами $\nu \leq \varphi$ на $\mathbb{N}$, а неравенство $\nu \leq \varphi$ означает, что ($\nu(x)$ определено и) $\nu(x) \leq \varphi(x)$ для любого $x \subseteq \mathbb{N}$. Чтобы субмера φ была одновременно l.s.c. и непатологической, необходимо и достаточно, чтобы $\varphi(x) = \sup_{\nu\leq\varphi}\nu(x)$, где супремум ограничен всеми мерами $\nu \leq \varphi$ на $\mathbb{N}$ с конечной областью, т.е. $\nu([m,\infty)) = 0$ для некоторого m.

Следствие 25. *Все непатологические* l.s.c. *субмеры суть* F*-субмеры.*

Доказательство. (Идея принадлежит Кристенсену [6].) По определению такая субмера φ есть супремум последовательности мер ν с конечными областями, которые являются F-субмерами по лемме 5. $\square$

Отсюда следует, что все субмеры вида $\varphi_\infty(x) = \lim_{n\to\infty}\varphi(x\setminus[0,n))$, где φ — непатологическая l.s.c. субмера на $\mathbb{N}$, являются F-субмерами. Заметим, что φ_∞ не будет l.s.c. субмерой, даже если φ является таковой; в самом деле, все конечные множества имеют φ_∞-значения 0. Поэтому $\mathrm{d}^\infty_\varphi(a,b) = \min\{1, \varphi_\infty(a \bigtriangleup b)\}$ вводит псевдометрику на $2^{\mathbb{N}}$, которая не является метрикой: например, $\mathrm{d}^\infty_\varphi(a,b) = 0$ для любой пары конечных $a, b \subseteq \mathbb{N}$. (Операция $\min\{1,\cdot\}$ позволяет избежать возможных бесконечных значений расстояния.)

Как установлено Солецким [33], идеалы вида $\mathrm{Exh}(\varphi) = \mathrm{Null}(\varphi_\infty)$, где φ — l.s.c. субмера, являются в точности аналитическими (на самом деле борелевскими) P-идеалами на $\mathbb{N}$, где для $\mathcal{I}$ быть P-*идеалом* означает, что для любой счетной последовательности множеств из $\mathcal{I}$ существует множество в $\mathcal{I}$, включающее каждое множество из данной последовательности, кроме, быть может, конечного числа элементов.

Простое доказательство следующего результата см. в [14].

Предложение 26. *Если φ есть* l.s.c. *субмера на $\mathbb{N}$, то псевдометрика $\mathrm{d}^\infty_\varphi$ индуцирует полную метрику на $2^{\mathbb{N}}/\,\mathrm{Exh}(\varphi)$.* $\square$

[18] Следуя Фараху, мы определяем это понятие несколько иначе, чем это принято в теории меры.

Например, пространство $2^{\mathbb{N}}/\mathtt{Fin}$ полно, более того, дискретно: все расстояния равны 1. (На самом деле, дискретность следует из того, что $\mathtt{Fin}$ есть множество класса $\mathbf{F}_\sigma$ [19] в отличие, скажем, от идеалов, рассматриваемых ниже в примерах 1 и 2.)

Мы продолжаем двумя примерами F-идеалов из анализа.

Пример 1. Идеал $\mathscr{Z}_0$ *множеств плотности* 0, состоящий из всех множеств $x \subseteq \mathbb{N}$, удовлетворяющих $\lim_{n\to\infty} \frac{\#(x\cap[0,n))}{n} = 0$. Понятно, что $\mathscr{Z}_0 = \mathrm{Exh}(\psi)$, где $\psi(x) = \sup_n \frac{\#(x\cap[0,n))}{n}$ есть l.s.c. субмера. Более аккуратное рассмотрение показывает, что ψ — непатологическая l.s.c. субмера, так что $\mathscr{Z}_0$ есть RN-идеал по следствию 25. Имеется и более простой аргумент: по определению $\mathscr{Z}_0 = \mathrm{Null}(\varphi)$, где

$$\varphi(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\#(x\cap[0,n))}{n},$$

и каждая $\varphi_n(x) = \frac{\#(x\cap[0,n))}{n}$ есть мера. Следовательно, φ есть F-субмера согласно результатам разд. 3 (но, конечно, не l.s.c. субмера). $\square$

Пример 2. Заметим, что хотя множества, принадлежащие $\mathscr{Z}_0$, достаточно разрежены, на самом деле они могут включать произвольно длинные блоки последовательных единиц — при условии, что они расположены достаточно далеко от 0. Чтобы устранить эту возможность, определяется *идеал Вейля* $\mathscr{Z}_{\mathrm{W}}$, состоящий из всех множеств $x \subseteq \mathbb{N}$ таких, что $\lim_{l\to\infty} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\#(x\cap[k,k+l))}{l} = 0$.

Несмотря на сходство с $\mathscr{Z}_0$, идеал $\mathscr{Z}_{\mathrm{W}}$ имеет несколько иные свойства. Например, пространство $2^{\mathbb{N}}/\mathscr{Z}_{\mathrm{W}}$ не является вполне метризуемым [11], следовательно, $\mathscr{Z}_{\mathrm{W}}$ не является P-идеалом. Однако $\mathscr{Z}_{\mathrm{W}}$ есть RN-идеал: в самом деле, $\mathscr{Z}_{\mathrm{W}} = \mathrm{Null}(\varphi)$, где

$$\varphi(x) = \limsup_{l\to\infty} \sup_k \frac{\#(x\cap[k,k+l))}{l}$$

есть F-субмера. $\square$

Замечательным свойством F-идеалов является их замкнутость относительно некоторых типичных операций над идеалами.

Рассмотрим наименьшее семейство $\mathbb{F}$ идеалов на счетных и конечных множествах, которое содержит идеал $\{\varnothing\}$ на пустом множестве $\varnothing$ и замкнуто относительно операций (F1)–(F4).

(F1) Расширения базовых множеств: если $\mathscr{I} \in \mathbb{F}$ — идеал на множестве $I \subsetneq J$, а J счетно, то идеал $\{Y \subseteq J : Y \cap I \in \mathscr{I}\}$ принадлежит $\mathbb{F}$.

(F2) Счетные пересечения и сходящиеся поточечные пределы, применяемые к сходящимся последовательностям идеалов на одном и том же (счетном) множестве.

Идеал $\mathscr{I}$ на I есть поточечный предел последовательности идеалов $\mathscr{I}_n$, если любое $y \in \mathscr{I}$ принадлежит почти всем $\mathscr{I}_n$, а любое $y \notin \mathscr{I}$ удовлетворяет $y \notin \mathscr{I}_n$ для почти всех n, где “почти все” означает: все, кроме конечного числа.

(F3) *Произведение Фубини*: если $\mathscr{I}, \mathscr{J} \in \mathbb{F}$ — идеалы на множествах I, J, то идеал $\mathscr{I} \otimes \mathscr{J}$ всех множеств $Z \subseteq I \times J$ таких, что выполнено $\{i \in I : (Z)_i \notin \mathscr{J}\} \in \mathscr{I}$, принадлежит $\mathbb{F}$.

Здесь $(Z)_i = \{j : \langle i,j\rangle \in Z\}$ для каждого $Z \subseteq I \times J$ — *сечение*. Последняя операция допускает обобщение.

[19] Класс $\mathbf{F}_\sigma$ образуют счетные объединения замкнутых множеств.

(F4) Если $\mathcal{I} \in \mathbb{F}$ — идеал на (счетном) множестве I и для каждого $i \in I$ $\mathcal{J}_i \in \mathbb{F}$ — идеал на J_i, то идеал $\mathcal{J} = \mathcal{I} \bigotimes_{i \in I} \mathcal{J}_i$ всех множеств $Z \subseteq J = \{\langle i, j\rangle : i \in I \;\&\; j \in J_i\}$ таких, что $\{i \in I : (Z)_i \notin \mathcal{J}_i\} \in \mathcal{I}$, принадлежит $\mathbb{F}$.

Ясно, что $\mathcal{I} \bigotimes_{i \in I} \mathcal{J}_i = \mathcal{I} \otimes \mathcal{J}$ в случае, когда $\mathcal{J}_i = \mathcal{J}$ для всех i.

Нетрудно проверить, что все идеалы из $\mathbb{F}$ борелевские (как подмножества соответствующих пространств 2^I).

Пример 3. $\mathbb{F}$ содержит, в частности, следующие идеалы:

- идеал $\mathcal{P}(I)$ для любого не более чем счетного I;
- идеал Fin всех конечных подмножеств $\mathbb{N}$ (действительно, $\mathsf{Fin} = \bigcup_n \mathcal{P}([0,n))$, так что можно использовать (F2)) и следующие производные идеалы, где 0 традиционно обозначает идеал $\{\varnothing\}$, а "почти все" означает "все, за исключением конечного числа":

$$\begin{aligned} \mathsf{Fin} \otimes 0 &= \{x \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{почти все сечения } (x)_n \text{ пусты}\}, \\ 0 \otimes \mathsf{Fin} &= \{x \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{все } (x)_n \text{ конечны}\}, \\ \mathsf{Fin} \otimes \mathsf{Fin} &= \{x \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{почти все } (x)_n \text{ конечны}\}. \quad \Box \end{aligned}$$

Теорема 27. *Все идеалы $\mathcal{I} \in \mathbb{F}$ являются борелевскими* F-*идеалами, следовательно, идеалами Радона–Никодима.*

Доказательство. Поскольку $\{\varnothing\}$ является, конечно, F-идеалом, достаточно провести индукцию по определению (F1)–(F4). Это рутинное упражнение для (F1) и следует из результатов разд. 3 для (F2), так что можно сосредоточиться на (F4).

Предположим, что I, $\mathcal{I}$, J_i, $\mathcal{J}_i$, J и $\mathcal{J} = \mathcal{I} \bigotimes_{i \in I} \mathcal{J}_i$ таковы, как в (F4), и, вдобавок, $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}_i$ являются борелевскими F-идеалами. Чтобы доказать, что $\mathcal{J}$ — также F-идеал, рассмотрим борелевскую вероятностную меру μ на "польском" пространстве $\mathcal{X}$, число $0 < p \le 1$, множество $B \notin \mathcal{J}$ и семейство μ-измеримых множеств $X_{ij} \subseteq \mathcal{X}$, удовлетворяющее $\mu(X_{ij}) \ge p$ для всех $\langle i, j\rangle \in B$. Требуется доказать, что множество $X = \{x \in \mathcal{X} : B_x \notin \mathcal{J}\}$ удовлетворяет неравенству $\mu(X) \ge p$, где $B_x = \{\langle i, j\rangle \in B : x \in X_{ij}\}$ для каждого $x \in \mathcal{X}$.

Пусть $B' = \{i \in I : (B)_i \notin \mathcal{J}_i\}$, так что $B' \notin \mathcal{I}$. Поскольку все ψ_i суть F-субмеры, для каждого $i \in U$ имеется множество $X_i \subseteq \mathcal{X}$ такое, что $\mu(X_i) \ge p$ и $(B_x)_i \notin \mathcal{J}_i$ для всех $x \in X_i$. Так как $\varphi = \varphi_{\mathcal{I}}$ сама есть F-субмера, существует множество $Y \subseteq \mathcal{X}$ такое, что $\mu(Y) \ge p$ и $B'_x = \{i \in U : x \in X_i\} \notin \mathcal{I}$ для каждого $x \in Y$.

Остается проверить, что $Y \subseteq X$. Пусть $x \in Y$. Тогда $B'_x \notin \mathcal{I}$. Если теперь $i \in B'_x$, то $x \in X_i$ и $(B_x)_i \notin \mathcal{J}_i$. Поэтому множество

$$C = \{\langle i, j\rangle : i \in B'_x \;\&\; j \in (B_x)_i\} \subseteq B_x$$

не принадлежит $\mathcal{J}$, так что $x \in X$, что и требовалось. $\Box$

Следствие 28. *Идеалы* Fin, $\mathsf{Fin} \otimes 0$, $0 \otimes \mathsf{Fin}$, $\mathsf{Fin} \otimes \mathsf{Fin}$ (*пример* 3) *суть* F-*идеалы и* RN-*идеалы.* $\Box$

Впрочем F-свойство Fin можно доказать и непосредственно. Требуется проверить, что если $p > 0$ и $Y_a \subseteq \mathcal{X}$ удовлетворяет $\mu(Y_a) \ge p$ для всех $a \in \mathbb{N}$, то множество X всех точек $x \in \mathcal{X}$ таких, что $Y(x) = \{a \in \mathbb{N} : x \in Y_a\}$ бесконечно, также удовлетворяет $\mu(X) \ge p$. Однако

$$X = \limsup_{a \to \infty} Y_a = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \le a} Y_a\,,$$

откуда результат очевиден.

Следующая наша теорема достаточно интересна, однако ее доказательство слишком специально, чтобы привести его в этой работе.

Теорема 29. *Идеалы $\mathcal{Z}_0$ и $\mathcal{Z}_{\mathrm{W}}$ не принадлежат семейству $\mathbb{F}$.* $\square$

7. НЕРАЗЛОЖИМЫЕ ИДЕАЛЫ И ИДЕАЛЫ ВЕЙССА

Эти два семейства идеалов из $\mathbb{F}$ заслуживают отдельного рассмотрения. Наше изложение в этом разделе предполагает некоторое знакомство читателя с ординалами (трансфинитными порядковыми числами). Для любого ординала $\vartheta < \omega_1$ положим

$$\mathcal{I}_\vartheta = \{x \subseteq \vartheta\colon\ \operatorname{otp} x < \vartheta\} \qquad (\operatorname{otp} x \text{ есть порядковый тип } x \subseteq \mathrm{Ord}),$$
$$\mathcal{W}_\vartheta = \{x \subseteq \vartheta\colon |x|_{\mathrm{CB}} < |\vartheta|_{\mathrm{CB}}\}$$

($|x|_{\mathrm{CB}}$, *ранг Кантора–Бендиксона*, равен наименьшему ординалу α такому, что $x^{(\alpha)} = \varnothing$. Здесь $x^{(\alpha)}$ определяется индукцией по α: $x^{(0)} = x$, $x^{(\alpha+1)} = (x^{(\alpha)})'$ и $x^{(\lambda)} = \bigcap_{\alpha<\lambda} x^{(\alpha)}$ на предельных шагах λ, наконец, x', производная Кантора–Бендиксона, равна множеству всех предельных точек множества $x \subseteq \mathrm{Ord}$ в интервальной топологии).

Легко видеть, что $\mathcal{I}_\vartheta$ является идеалом тогда и только тогда, когда ϑ — *неразложимый* ординал, т.е. равенство $\vartheta = \alpha + \beta$ невозможно при $\alpha, \beta < \vartheta$, а для этого необходимо и достаточно, чтобы $\vartheta = \omega^\xi$ для некоторого $\xi < \omega_1$. Можно показать, что каждый идеал $\mathcal{I}_{\omega^{\xi+1}}$ изоморфен произведению Фубини $\mathtt{Fin} \otimes \mathcal{I}_{\omega^\xi}$, например, $\mathcal{I}_{\omega^2} \cong \mathtt{Fin} \otimes \mathtt{Fin}$, так что мы можем рассматривать *неразложимые идеалы* $\mathcal{I}_{\omega^\xi}$ как трансфинитные итерации идеала Фреше $\mathtt{Fin}$ и обозначать, например, $\mathcal{I}_{\omega^\xi} = \mathtt{Fin}^\xi$, хотя рекурсия на предельных шагах не так проста.

Менее очевидно, что $\mathcal{W}_\vartheta$ есть идеал тогда и только тогда, когда $\vartheta = \omega^{\omega^\xi}$ для некоторого ξ (Вейсс, см. Фарах [14, 1.14]), т.е. когда ординал ϑ *мультипликативно неразложим*, т.е. $\vartheta \le \alpha\beta$ невозможно при $\alpha, \beta < \vartheta$. Отметим, что $|\omega^{\omega^\xi}|_{\mathrm{CB}} = \omega^\xi$ и вообще $|\omega^\alpha|_{\mathrm{CB}} = \alpha$.

Следующая теорема отвечает на два вопроса, поставленных Фарахом в предварительных вариантах монографии [14]. Окончательный вариант [14] приводит результат со ссылкой на наш препринт[20].

Теорема 30. *Если $\vartheta = \omega^\xi$, где $\xi < \omega_1$, то $\mathcal{I}_\vartheta$ есть* F*-идеал, следовательно,* RN*-идеал. Если $\vartheta = \omega^{\omega^\xi}$, где $\xi < \omega_1$, то $\mathcal{W}_\vartheta$ есть* F*-идеал, следовательно,* RN*-идеал.*

Доказательству теоремы предпошлем рассмотрение еще одного семейства идеалов, доказательство F-свойства которых несложно.

Лемма 31. *Для любого счетного предельного ординала λ идеал $\mathcal{B}_\lambda$ всех ограниченных множеств $x \subseteq \lambda$ есть* F*-идеал.*

Доказательство. Пусть $B \subseteq \lambda$ не принадлежит $\mathcal{B}_\lambda$, т.е. B не ограничено в λ. Рассмотрим систему $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in B}$ множеств $Y_\alpha \subseteq \mathcal{X}$, удовлетворяющих $\mu(Y_\alpha) \ge p$. Фиксируем строго возрастающую последовательность ординалов $\gamma_n \in B$, $n \in \mathbb{N}$, не ограниченную в λ. Остается применить лемму 28 к системе множеств $U_n = Y_{\gamma_n}$. $\square$

Определение 32. Следуя обычной практике, положим $\limsup_{\alpha\to\lambda} Y_\alpha = \mathbf{\Lambda}^{\mathcal{B}_\lambda}_{\alpha<\lambda} Y_\alpha$ для любого предельного λ. $\square$

Тогда $\limsup_{\alpha\to\lambda} Y_\alpha = \bigcap_{\beta<\lambda} \bigcup_{\beta\le\alpha<\lambda} Y_\alpha$ и по лемме 31 если $\mu(Y_\alpha) \ge p$ для каждого $\alpha < \lambda$, то $\mu(\limsup_{\alpha\to\lambda} Y_\alpha) \ge p$.

[20] Предварительный вариант настоящей работы.

Доказательство теоремы 30. Можно было бы доказать, что все эти идеалы принадлежат классу $\mathbb{F}$. Это, однако, свелось бы к довольно длинным выкладкам, так как предельные шаги довольно трудоемки. Мы приводим более прямое, хотя также достаточно длинное в отношении идеалов $\mathcal{W}_\vartheta$ рассуждение.

Фиксируем борелевскую вероятностную меру μ на "польском" пространстве $\mathcal{X}$. Для уменьшения громоздкости обозначений положим

$$\mathbf{I}^\vartheta(\mathbf{y}) = \mathbf{I}^\vartheta_{\alpha<\vartheta} Y_\alpha \overset{\text{def}}{=} \mathbf{\Lambda}^{\mathcal{I}_\vartheta}_{\alpha<\vartheta} Y_\alpha \qquad \text{и} \qquad \mathbf{W}^\vartheta(\mathbf{y}) = \mathbf{W}^\vartheta_{\alpha<\vartheta} Y_\alpha \overset{\text{def}}{=} \mathbf{\Lambda}^{\mathcal{W}_\vartheta}_{\alpha<\vartheta} Y_\alpha$$

для любой системы $\mathbf{y} = \{Y_\alpha\}_{\alpha<\vartheta}$ множеств $Y_\alpha \subseteq \mathcal{X}$.

Вначале рассмотрим идеалы $\mathcal{I}_\vartheta$, $\vartheta = \omega^\xi$. Доказываем теорему индукцией по ξ. Если $\xi = 1$, то $\mathcal{I}_\omega = \mathtt{Fin} \in \mathbb{F}$, так что можно сослаться на следствие 28. Допустим, что $\xi > 1$ и теорема доказана для всех $\gamma < \xi$. Пусть $p > 0$ и для каждого $\alpha < \vartheta$ мы имеем μ-измеримое множество $Y_\alpha \subseteq \mathcal{X}$, причем $K = \{\alpha\colon \mu(Y_\alpha) \geq p\} \notin \mathcal{I}_\vartheta$, так что $\operatorname{otp} K = \vartheta$. Требуется доказать, что множество $Y = \mathbf{I}^\vartheta_{\alpha<\vartheta} Y_\alpha$ удовлетворяет $\mu(Y) \geq p$.

Очевидно, можно предполагать, что $K = \vartheta$ $(= \omega^\xi)$.

Если $\xi = \gamma + 1$ — непредельный ординал, то положим $\eta(n) = \omega^\gamma \cdot n$ для всех n. Если ξ — предельный ординал, то фиксируем строго возрастающую последовательность ординалов $\gamma_n < \xi$ с $\xi = \sup_n \gamma_n$ и полагаем $\eta(n) = \omega^{\gamma_n}$ для всех n. В обоих случаях $\omega^\xi = \sup_n \eta(n) = \bigcup_n D_n$, где $D_n = [\eta(n-1), \eta(n))$ удовлетворяет $\operatorname{otp} D_n = \eta(n) = \omega^{\gamma_n}$. По индуктивному предположению для каждого n множество $X_n = \mathbf{I}^{\eta(n)}_{\alpha<\eta(n)} Y_{\eta_{n-1}+\alpha}$ удовлетворяет $\mu(X_n) \geq p$. С другой стороны, ясно, что $\mathbf{\Lambda}^{\mathtt{Fin}}_{n\in\mathbb{N}} X_n \subseteq Y$, поэтому $\mu(Y) \geq p$, поскольку $\mathtt{Fin}$ есть F-идеал (следствие 28).

Теперь рассмотрим идеалы $\mathcal{W}_\vartheta$, $\vartheta = \omega^{\omega^\xi}$. Понятно, что $\omega^{\omega^0} = \omega$ и $\mathcal{W}_\omega = \{\varnothing\}$, так что результат для $\xi = 0$ тривиален. Предельный индуктивный шаг рассматривается, как выше. Рассмотрим переход к следующему ординалу: $\kappa = \omega^{\omega^\xi} \to \vartheta = \omega^{\omega^{\xi+1}}$. При этом $\vartheta = \kappa^\omega = \sup_n \kappa^n$.

Если $p > 0$, то *p-системой* будем называть семейство $\mathbf{y} = \{Y_\alpha\}_{\alpha<\vartheta}$ μ-измеримых множеств $Y_\alpha \subseteq \mathcal{X}$ такое, что $\{\alpha\colon \mu(Y_\alpha) \geq p\} \notin \mathcal{W}_\vartheta$. Для каждой такой системы множество $\mathbf{W}^\vartheta(\mathbf{y})$ будет, как легко проверить, борелевским с точностью до множества μ-меры 0, значит, μ-измеримым. Нужно доказать, что $\mu(\mathbf{W}^\vartheta(\mathbf{y})) \geq p$ для любой p-системы $\mathbf{y}$.

Рассмотрим систему $\mathbf{y} = \{Y_\alpha\}_{\alpha<\vartheta}$ μ-измеримых множеств $Y_\alpha \subseteq \mathcal{X}$. Пусть $A(x) = \{\alpha < \vartheta\colon x \in Y_\alpha\}$ для любого $x \in \mathcal{X}$. Для $\alpha < \vartheta$ определим Y^*_α как множество всех $x \in Y_\alpha$ таких, что α принадлежит ω^ξ-й производной Кантора–Бендиксона множества $A(x)$. Как и выше, все множества Y^*_α борелевские с точностью до μ-меры 0, значит, μ-измеримы. Определим *редуцированную систему* $\mathbf{y}^* = \{Y^*_\alpha\}_{\alpha<\vartheta}$.

По определению для любого $x \in \mathcal{X}$ множество $A^*(x) = \{\alpha\colon x \in Y^*_\alpha\}$ есть в точности ω^ξ-я производная Кантора–Бендиксона от $A(x)$, значит, x принадлежит $\mathbf{W}^\vartheta(\mathbf{y}^*)$, если и только если x принадлежит $\bigcup \mathbf{y}^{n*}$ при любом n, где $\mathbf{y}^{n*}$ есть n-я редуцированная система. Поэтому следующее утверждение влечет $\mu(\mathbf{W}^\vartheta(\mathbf{y})) \geq p$ для любой p-системы $\mathbf{y}$.

1°. Для любой p-системы $\mathbf{y} = \{Y_\alpha\}_{\alpha<\vartheta}$ редуцированная система $\mathbf{y}^*$ является q-системой для каждого $q < p$.

Если $\mathbf{y}^*$ <u>не</u> является q-системой для некоторого $q < p$, то множество $A = \{\alpha\colon \mu(Y^*_\alpha) \geq q\}$ принадлежит $\mathcal{W}_\vartheta$, значит, определив $U_\alpha = \varnothing$ для $\alpha \in A$ и $U_\alpha = Y_\alpha$ для $\alpha \notin A$, мы получим все еще p-систему $\mathbf{u} = \{U_\alpha\}_{\alpha<\vartheta}$, но ее редуцированная система $\mathbf{u}^*$ удовлетворяет $\mu(U^*_\alpha) < q$ для всех α. Таким образом, требуется доказать следующее.

2°. Для любой p-системы $\mathbf{y} = \{Y_\alpha\}_{\alpha<\vartheta}$ если $q < p$, то существует ординал $\alpha < \vartheta$ такой, что $\mu(Y^*_\alpha) \geq q$.

Предположим, что это не имеет места для какого-то $q < p$. Тогда система $\mathbf{u} = \{U_\alpha\}$ множеств $U_\alpha = Y_\alpha \setminus Y^*_\alpha$ есть $(p-q)$-система, чья редуцированная система $\mathbf{u}^*$ вообще пуста, т.е. $U^*_\alpha = \varnothing$ для всех α. Это наблюдение сводит нашу задачу к следующему утверждению.

3°. Для любой p-системы $\mathbf{y} = \{Y_\alpha\}_{\alpha<\vartheta}$ редуцированная система $\mathbf{y}^* = \{Y^*_\alpha\}_{\alpha<\vartheta}$ непуста, т.е. $Y^*_\alpha \neq \varnothing$ по крайней мере для одного $\alpha < \vartheta$.

Чтобы доказать 3°, предположим, что, напротив, существует p-система $\mathbf{y} = \{Y_\alpha\}_{\alpha<\vartheta}$ такая, что $\mathbf{y}^*$ — пустая система. По определению множество $A = \{\alpha\colon \mu(Y_\alpha) \geq p\}$ не принадлежит $\mathcal{W}_\vartheta$, т.е. $|A|_{\mathrm{CB}} \geq \omega^{\xi+1}$, так что A включает замкнутое (в интервальной топологии $[0,\vartheta)$) подмножество порядкового типа $\vartheta = \omega^{\omega^{\xi+1}}$; значит, можно предполагать, что $A = \vartheta = \omega^{\omega^{\xi+1}}$, т.е. $\mu(Y_\alpha) \geq p$ для всех $\alpha < \vartheta$. Назовем *сингулярной* p-системой любую такую $\mathbf{y}$; точнее, требуется, чтобы $\mu(Y_\alpha) \geq p$ и $Y^*_\alpha = \varnothing$ для всех $\alpha < \vartheta$. Таким образом, предположение противного влечет существование сингулярной p-системы.

Система $\mathbf{u} = \{U_\alpha\}_{\alpha<\vartheta}$ будет называться *комплементарной q-системой* к p-системе $\mathbf{y}$, если

i) $\mathbf{u}$ полунепрерывна в том смысле, что $\limsup_{\alpha\to\lambda} U_\alpha \subseteq U_\lambda$ для всех предельных ординалов $\lambda < \vartheta$, где $\limsup_{\alpha\to\lambda} U_\alpha = \bigcap_{\alpha<\lambda}\bigcup_{\alpha\leq\beta<\lambda} U_\beta$;

ii) $\mu(U_\alpha) \geq q$ для всех $\alpha < \vartheta$;

iii) $U_\alpha \cap Y_\alpha = \varnothing$ для всех $\alpha < \vartheta$.

Лемма 33. *Если существует сингулярная p-система с комплементарной q-системой, то существует сингулярная p-система с комплементарной $(p+q)$-системой.*

Пустая система $U_\alpha = \varnothing$ для всех α, очевидно, 0-комплементарна к любой p-системе, поэтому лемма приводит к противоречию после достаточно большого числа шагов, так как μ — вероятностная мера.

Доказательство леммы 33. Пусть $\mathbf{u}$ — комплементарная q-система к сингулярной p-системе $\mathbf{y}$. Положим $Z_\nu = Y_{\kappa\nu}$; тогда p-система $\mathbf{z} = \{Z_\nu\}_{\nu<\vartheta}$ также сингулярна, как подсистема сингулярной системы. Для построения комплементарной $(q+p)$-системы $\mathbf{v}$ для $\mathbf{z}$ положим $P_\gamma = \mathbf{W}^\kappa_{\alpha<\kappa} Y_{\kappa\gamma+\alpha}$ для каждого непредельного ординала $\gamma = \eta + 1 < \vartheta$.

Тогда $\mu(P_\sigma) \geq p$ по индуктивному предположению. Более того, мы имеем $P_\gamma \cap Y_{\kappa\gamma} = \varnothing$ из-за сингулярности $\mathbf{y}$. (В самом деле, если $x \in P_\gamma \cap Y_{\kappa\gamma}$, то $Y(x)$ содержит ординал $\kappa\gamma$ и включает множество $A \subseteq Y(x) \cap [\kappa\eta, \kappa\gamma)$, удовлетворяющее $|A|_{\mathrm{CB}} = \kappa$, следовательно, γ принадлежит $Y^*(x)$, откуда $Y^*_\gamma \neq \varnothing$, противоречие с сингулярностью $\mathbf{y}$.) Положим $P_\lambda = \limsup_{\gamma=\eta+1<\lambda} P_\gamma$ для предельных $\lambda < \vartheta$. Тогда $\mu(P_\lambda) \geq p$ по лемме 31 и $P_\lambda \cap Y_{\kappa\lambda} = \varnothing$ (по той же причине, что и выше).

Итак, определены множества P_ν, удовлетворяющие $P_\nu \cap Y_{\kappa\nu} = \varnothing$ и $\mu(P_\nu) \geq p$ для всех $\nu < \vartheta$, и $P_\lambda = \limsup_{\eta<\lambda} P_\eta$ для всех предельных $\lambda < \vartheta$. Теперь рассмотрим взаимоотношения P_ν с множествами $U_{\kappa\nu}$.

Пусть сначала $\gamma = \eta + 1$, т.е. $P_\gamma = \mathbf{W}^\kappa_{\alpha<\kappa} Y_{\kappa\eta+\alpha}$, в то время как $U_{\kappa\gamma} \supseteq \limsup_{\alpha\to\kappa} U_{\kappa\eta+\alpha}$. Не утверждая, что P_γ и $U_{\kappa\gamma}$ дизъюнктны, докажем, однако, что $\mu(P_\gamma \cup U_{\kappa\gamma}) \geq q + p$. Пусть $\mu(U_{\kappa\gamma}) = q + p - h$, где $h < p$, и пусть $0 < \varepsilon < h$. Тогда, поскольку $\limsup_{\alpha\to\kappa} U_{\kappa\eta+\alpha} \subseteq U_{\kappa\gamma}$, существует ординал $\alpha_0 < \kappa$ такой, что $\mu(U) \leq q + (p-h) + \varepsilon$, где $U = \bigcup_{\alpha_0\leq\alpha<\kappa} U_{\kappa\eta+\alpha}$.

Положим $Q_\alpha = P_{\kappa\eta+\alpha} \setminus U$ для $\alpha_0 \le \alpha < \kappa$, так что $\mu(Q_\alpha) \ge p - (p-h+\varepsilon) = h - \varepsilon$, поскольку $P_{\kappa\eta+\alpha} \cap U_{\kappa\eta+\alpha} = \varnothing$ и $U_{\kappa\eta+\alpha} \subseteq U$. Тогда по индуктивному предположению множество $Q = \mathbf{W}^{\kappa}_{\alpha<\kappa} Q_\alpha$ удовлетворяет $\mu(Q) \ge h - \varepsilon$. С другой стороны, $Q \cap U = \varnothing$, откуда $Q \cap U_{\kappa\gamma} = \varnothing$, затем $Q \subseteq P_\gamma$ по определению и, наконец, $\mu(P_\gamma \cup U_{\kappa\gamma}) \ge q + p - \varepsilon$. Таким образом, мы имеем $\mu(P_\gamma \cup U_{\kappa\gamma}) \ge q + p$ при $\gamma = \eta + 1 < \vartheta$.

Теперь рассмотрим предельный ординал $\lambda < \vartheta$ и докажем, что $\mu(P_\lambda \cup U_{\kappa\lambda}) \ge q + p$. Заметим, что $P_\lambda = \limsup_{\eta\to\lambda} P_{\eta+1}$. С другой стороны, $U_{\kappa\lambda} \supseteq \limsup_{\eta\to\lambda} U_{\kappa(\eta+1)}$. Поэтому

$$P_\lambda \cup U_{\kappa\lambda} \supseteq \limsup_{\eta\to\lambda} (P_{\eta+1} \cup U_{\kappa(\eta+1)}),$$

так что $\mu(P_\lambda \cup U_{\kappa\lambda}) \ge q + p$ по доказанному выше и лемме 31.

Для завершения доказательства положим $V_\nu = P_\nu \cup U_{\kappa\nu}$ для всех $\nu < \vartheta$. Тогда по доказанному выше $\mathbf{v} = \{V_\nu\}_{\nu<\vartheta}$ есть комплементарная $(q+p)$-система к сингулярной p-системе $\mathbf{z}$. $\square$

Таким образом теорема 30 доказана. $\square$

8. НЕКОТОРЫЕ КОНТРПРИМЕРЫ

Предшествующие рассмотрения показывают, что среди борелевских идеалов мы имеем довольно много таких, которые являются F-идеалами, а тогда согласно следствию 22 и RN-идеалами. Построение контрпримеров, т.е. 1) борелевских идеалов, не являющихся RN-идеалами, или 2) RN-идеалов, не являющихся F-идеалами, представляет трудную проблему, по-видимому открытую во второй ее части. Что же касается не RN-идеалов, их первые и достаточно сложные примеры были даны Фарахом [12, 13]: это некоторые идеалы вида $\mathrm{Exh}(\varphi)$, где φ — *патологическая* l.s.c. субмера. Поэтому представляет интерес поиск математически более значимых контрпримеров, один из которых приведен ниже. Еще один контрпример, связанный с теорией клеточных автоматов, показывает, что полезные свойства F-идеалов могут уже не работать в ситуации, когда гомоморфизмы связываются требованием коммутирования со сдвигом.

8.1. Борелевский не F-идеал. Мы начнем с более простого примера борелевского не F-идеала, взятого из препринта Солецкого [34]. В качестве базового множества рассматривается множество A всех конечных объединений $a = S_1 \cup \ldots \cup S_m$ дизъюнктных открытых интервалов $S_j \subseteq [0,1]$ с рациональными концами, имеющих суммарную меру Лебега $\frac{1}{2}$. Множество A, разумеется, счетно и потому может быть идентифицировано с $\mathbb{N}$. Наконец, определим $\mathcal{I}_0$ как совокупность всех множеств $X \subseteq A$ таких, что имеется конечное множество $u \subseteq [0,1]$, удовлетворяющее $u \not\subseteq a$ для любого $a \in X$. Иными словами, требуется, чтобы X было конечным объединением $X = X_1 \cup \ldots \cup X_n$ множеств $X_i \subseteq A$ таких, что $\bigcup X_i \subsetneqq [0,1]$ для всех i.

Лемма 34 (Солецки [34]). *$\mathcal{I}_0$ — борелевский (точнее, класса $\mathbf{F}_\sigma$) собственный (т.е. $A \notin \mathcal{I}_0$) и свободный (т.е. содержащий все конечные подмножества A) идеал, но не F-идеал*[21].

Доказательство. Чтобы доказать, что $\mathcal{I}_0$ имеет класс $\mathbf{F}_\sigma$, отметим, что по определению $X \in \mathcal{I}_0$ тогда и только тогда, когда существуют натуральное n и разбиение $X = \bigcup_{k<n} X_k$, где каждое из множеств $X_k \subseteq A$ удовлетворяет $\bigcup X_k \subsetneqq [0,1]$. Благодаря компактности последняя

[21] Кроме того, Солецки доказывает, что $\mathcal{I}_0$ в определенном смысле минимальный из всех борелевских идеалов, не являющихся F-идеалами.

часть этого свойства равносильна тому, что $\bigcup X'_k \subsetneqq [0,1]$ для любого конечного $X'_k \subseteq X_k$. Зафиксируем перечисление $A = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ и положим $A \restriction m = \{a_j : j < m\}$. По лемме Кёнига мы заключаем, что для того, чтобы $X \in \mathcal{I}_0$, необходимо и достаточно следующее: существует натуральное n такое, что для всех m имеется разбиение $X \cap (A \restriction m) = \bigcup_{k<n} X_k$, где $\bigcup X_k \subsetneqq [0,1]$ для каждого k. Этот критерий показывает, что $\mathcal{I}_0$ действительно принадлежит $\mathbf{F}_\sigma$.

Чтобы доказать, что $\mathcal{I}_0$ не является F-идеалом, рассмотрим, следуя "диагональному процессу" Кантора, систему множеств $Y_a = [0,1] \setminus a$, $a \in A$. Каждое Y_a имеет меру $\frac{1}{2}$, однако для любого $0 \le x \le 1$ множество $A_x = \{a\colon x \in Y_a\}$ принадлежит $\mathcal{I}_0$ (чтобы это увидеть, можно взять, например, $u = \{x\}$), откуда следует, что $\limsup \{Y_a\}$ в смысле $\mathcal{I}_0$ — пустое множество, т.е. $\mathcal{I}_0$ не идеал Фату. □

8.2. Модификация: борелевский не RN-идеал. Мы не знаем, является ли $\mathcal{I}_0$ RN-идеалом (хотя предполагаем, что нет), однако, несколько изменив конструкцию, мы можем получить действительно борелевский идеал, не являющийся RN-идеалом.

Прежде всего пусть $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, мы будем отождествлять элементы $\mathbb{T}$ с точками полуинтервала $[0,1)$ и обозначать групповую операцию $\mathbb{T}$ через $\oplus$. Положим $X \oplus Y = \{x \oplus y\colon x \in X \wedge \wedge y \in Y\}$ для $X, Y \subseteq \mathbb{T}$.

Базовым множеством теперь будет множество A всех конечных объединений $a = S_1 \cup \ldots \cup S_m$ дизъюнктных открытых интервалов $S_i \subseteq \mathbb{T}$ с рациональными концами таких, что можно выбрать точки $s_i \in S_i$ так, чтобы для всех пар $i, j = 1, 2, \ldots, n$ (включая возможность $i = j$) было выполнено одно из двух (очевидно, несовместимых) требований:

i) $s_i \oplus s_j$ есть s_k для некоторого k и $(S_i \oplus S_j) \cap a \subseteq S_k$;

ii) $(S_i \oplus S_j) \cap a = \varnothing$.

Заметим, что тогда выполнено следующее: если $0 \in S_i$, то $s_i = 0$. Рутинное, хотя и довольно громоздкое доказательство следующей леммы мы оставим читателю.

Лемма 35. *Если $a = S_1 \cup \ldots \cup S_m \in A$, то можно подобрать рациональные точки $s_i \in S_i$, удовлетворяющие требованию из определения A.* □

Рассмотрим идеал $\mathcal{Z}$ всех множеств $X \subseteq A$ таких, что существует конечное множество $u \subseteq \mathbb{T}$, удовлетворяющее $u \not\subseteq a$ для каждого $a \in X$. Как и в предыдущем примере, базовое множество A счетно, а $\mathcal{Z}$ — несобственный идеал, содержащий все конечные подмножества A и принадлежащий классу $\mathbf{F}_\sigma$.

Теорема 36. *$\mathcal{Z}$ не является RN-идеалом.*

Доказательство. Положим $\mathbb{H} = \mathbb{T}^A$, т.е. группа $\mathbb{H}$ является произведением счетного числа "копий" $\mathbb{T}$, индексированных элементами A. Для доказательства теоремы мы определим борелевский $\mathcal{Z}$-приближенный гомоморфизм $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{H}$, который не $\mathcal{Z}$-аппроксимируется никаким измеримым гомоморфизмом.

Пусть $x \in \mathbb{T}$ и $a = S_1 \cup \ldots \cup S_n \in A$, что может быть засвидетельствовано согласно лемме 35 выбором рациональных точек $s_i \in S_i$. Зафиксируем раз и навсегда такой набор точек s_i для каждого $a \in A$. Теперь если $x \in X_i$, то положим $f_a(x) = x \ominus s_i$, если же $x \notin a$, то пусть просто $f_a(x) = 0$. Наконец, определим $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{H}$ таким образом, что $f(x)(a) = f_a(x)$ для всех $x \in \mathbb{T}$ и $a \in A$.

Лемма 37. *$f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{H}$ является $\mathcal{Z}$-приближенным гомоморфизмом.*

Доказательство. Пусть $x, y \in \mathbb{T}$ и $z = x \oplus y$. Нужно доказать, что множество $C_{xy} = \{a\colon f_a(x) \oplus f_a(y) \ne f_a(z)\}$ принадлежит $\mathcal{Z}$. Достаточно проверить, что никакое $a = S_1 \cup \ldots \cup S_n \in C_{xy}$

не содержит сразу все три точки x, y, z, или, что равносильно, если x, y, z принадлежат a, то $f_a(x) \oplus f_a(y) = f_a(z)$. В самом деле, пусть $x \in S_i$, $y \in S_j$, $z \in S_k$. Тогда ii) невозможно для данных i, j, т.е. мы имеем i), откуда следует $s_i \oplus s_j = s_k$, так что $f_a(x) \oplus f_a(y) = f_a(z)$ выполнено по определению. $\square$

Продолжая доказательство теоремы 36, предположим, что, напротив, $g\colon \mathbb{T} \to \mathbb{H}$ — измеримый гомоморфизм, который $\mathcal{Z}$-аппроксимирует f, т.е. для любого $x \in \mathbb{T}$ множество $D_x = \{a\colon f_a(x) \neq g_a(x)\}$ принадлежит $\mathcal{Z}$, где, как обычно, $g_a(x) = g(x)(a)$. Отметим, что все $g_a\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ суть измеримые гомоморфизмы, откуда легко следует, что существуют целые константы m_a такие, что $g_a(x) = m_a \cdot x$ для каждого x, где $m \cdot x$ есть $\oplus$-сумма m слагаемых x.

Возьмем любую иррациональную точку $x \in \mathbb{T}$. Тогда множество $D_x = \{a\colon f_a(x) \neq m_a \cdot x\}$ принадлежит $\mathcal{Z}$, так что имеется конечное множество $u = u_x \subseteq \mathbb{T}$, удовлетворяющее $u \not\subseteq a$ для каждого $a \in D_x$. Другими словами, мы имеем $f_a(x) = m_a \cdot x$ всякий раз, когда $a \in A$ и $u \subseteq a$. Теперь возьмем любое $a \in A$ такое, что $u \subseteq a$ и $x \in a$. По определению $f_a(x) = x \ominus s$, где s рационально, что несовместимо с $f_a(x) = m_a \cdot x$, поскольку x иррационально. $\square$

Данное доказательство использует весьма специфические свойства группы $\mathbb{T}$, в частности то, что все измеримые гомоморфизмы $\mathbb{T} \to \mathbb{T}$ задаются умножением на целую константу. Поэтому следующий открытый вопрос представляет большой интерес: найти простой борелевский идеал $\mathcal{Z}$, который не является RN-идеалом в отношении измеримых отображений $2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$, как в оригинальных рассмотрениях Фараха.

8.3. Контрпример: отображения, коммутирующие со сдвигом. Здесь мы будем рассматривать в качестве индексного множества не $\mathbb{N}$, а $\mathbb{Z}$, а в качестве основного пространства $2^{\mathbb{Z}}$ — множество всех диадических $\mathbb{Z}$-индексированных последовательностей (с топологией канторова дисконтинуума). Идентифицируя $2^{\mathbb{Z}}$ с $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, мы обозначим групповую операцию на $2^{\mathbb{Z}}$ через $\triangle$, т.е. если $x, y \in 2^{\mathbb{Z}}$, то для любого $a \in \mathbb{Z}$ $(x \triangle y)(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $x(a) = y(a)$. Дополнительным элементом здесь является действие $\mathbb{Z}$ на $2^{\mathbb{Z}}$ посредством сдвига: именно если $a \in \mathbb{Z}$ и $x \in 2^{\mathbb{Z}}$, то $a \cdot x \in 2^{\mathbb{Z}}$ определяется равенством $(a \cdot x)(b) = x(a + b)$ для всех $b \in \mathbb{Z}$. В частности, можно определить *сдвиг* $\mathfrak{s} \cdot x = 1 \cdot x$, т.е. $(\mathfrak{s} \cdot x)(b) = x(b + 1)$ для всех b.

Мы будем рассматривать те отображения $F\colon 2^{\mathbb{Z}} \to 2^{\mathbb{Z}}$, которые коммутируют с $\mathfrak{s}$ или хотя бы $\mathcal{I}$-приближенно коммутируют с $\mathfrak{s}$ в том смысле, что $\mathfrak{s} \cdot F(x) \triangle F(\mathfrak{s} \cdot x) \in \mathcal{I}$ для всех $x \in 2^{\mathbb{Z}}$, где $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{Z})$ — данный идеал. Например, $\mathfrak{s}$-коммутирующие непрерывные $F\colon 2^{\mathbb{Z}} \to 2^{\mathbb{Z}}$ называются *клеточными автоматами*, или КА. Известно[22] и легко проверяется, что для каждого КА F найдутся число $r \in \mathbb{N}$ и множество $u \subseteq 2^{[-r,r]}$ такие, что для всех $x \in 2^{\mathbb{Z}}$ и $a \in \mathbb{Z}$ $F(x)(a) = 0$, когда $(\mathfrak{s}^a \cdot x) \restriction [-r, r] \in u$; другими словами, каждое значение $F(x)(a)$ полностью определено ограничением $x \restriction [a - r, a + r]$, причем определение фактически не зависит от a. Обозначим этот КА F через F_{ru}.

Те КА, которые являются гомоморфизмами в смысле $\triangle$, называются *аддитивными* КА. По теореме Петтиса любой измеримый гомоморфизм $F\colon 2^{\mathbb{Z}} \to 2^{\mathbb{Z}}$ непрерывен, следовательно, если он коммутирует с $\mathfrak{s}$, то является (аддитивным) КА.

Можно спросить: если $\mathcal{I}$ есть F-идеал на $\mathbb{Z}$,[23] верно ли, что любой $\mathcal{I}$-приближенный гомоморфизм $F\colon 2^{\mathbb{Z}} \to 2^{\mathbb{Z}}$, который $\mathcal{I}$-приближенно коммутирует с $\mathfrak{s}$, $\mathcal{I}$-аппроксимируется

[22] Мы ссылаемся на [39] относительно теории клеточных автоматов.

[23] Понятие F-идеала и другие родственные определения, данные выше для $\mathbb{N}$, в частности определение идеала $\mathcal{Z}_0$, распространяются на идеалы на $\mathbb{Z}$ посредством биекции $\mathbb{N}$ на $\mathbb{Z}$, которая отображает каждое $2n$ в n и каждое $2n + 1$ в $-n$.

некоторым КА? Следующий пример показывает, что ответ, вообще говоря, отрицателен.

Для каждого $x \in 2^{\mathbb{Z}}$ определим $y = F(x) \in 2^{\mathbb{Z}}$ следующим образом:

1) $y(a) = x(a)$ при $a = -1, 0, 1$;
2) для каждого $i \geq 0$ $y \restriction [2^i + i, 2^{i+1} + i)$ есть сдвиг $x \restriction [2^i, 2^{i+1})$ на i позиций направо, а $y \restriction (-2^{i+1} - i, -2^i - i]$ есть сдвиг $x \restriction (-2^{i+1}, -2^i]$ на i позиций налево;
3) для любого $a \in \mathbb{Z}$ такого, что $y(a)$ не определено через 1) и 2), положим $y(a) = 0$.

В качестве идеала $\mathcal{I}$ возьмем идеал $\mathcal{Z}_0$ всех множеств $w \subseteq \mathbb{Z}$ плотности 0.

Теорема 38. *F — непрерывный гомоморфизм и $\mathcal{Z}_0$-приближенно коммутирует с $\mathfrak{s}$, однако не $\mathcal{Z}_0$-аппроксимируется никаким КА.*

Доказательство. Функция F $\mathcal{Z}_0$-приближенно коммутирует с $\mathfrak{s}$ потому, что для любого x последовательности $\mathfrak{s} \cdot F(x)$ и $F(\mathfrak{s} \cdot x)$ отличаются только в “клетках” $j \in \mathbb{Z}$ вида $2^i + i - 1$ и $2^i + i$ и вида $-2^i - i + 2$ и $-2^i - i + 1$, где $i \geq 1$, а множество всех таких “клеток” принадлежит $\mathcal{Z}_0$. Чтобы доказать, что никакой КА G не может $\mathcal{Z}_0$-аппроксимировать F, определим $x \in 2^{\mathbb{Z}}$ через $x(n) = 0$ для всех четных целых чисел n и $x(n) = 1$ для нечетных n. Тогда $y = G(x)$ должно быть периодическим с периодом ≤ 2, так что y — или константа 0, или 1, или одно из x, $\mathfrak{s} \cdot x$. Но ни одна из этих четырех последовательностей y не может удовлетворять $y \bigtriangleup F(x) \in \mathcal{Z}_0$. $\square$

9. ГОМОМОРФИЗМЫ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

В случае, когда $\mathbb{A} = \mathbb{H} = 2^{\mathbb{N}}$, полученные выше результаты допускают соответствующие варианты для рассмотрения $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ как булевой алгебры. Уместно напомнить, что группа $2^{\mathbb{N}}$ может быть реализована как $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{x \colon x \subseteq \mathbb{N}\}$ с групповой операцией симметрической разности $\bigtriangleup$ и нейтральным элементом $\varnothing$ (пустое множество).

Ниже ВА-*гомоморфизм* будет означать: функция $f \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, являющаяся гомоморфизмом в смысле булевой алгебры, т.е. $f(x \cup y) = f(x) \cup f(y)$ и $f(x^{\complement}) = f(x)^{\complement}$. Понятно, что каждый ВА-гомоморфизм есть и гомоморфизм $\langle \mathcal{P}(\mathbb{N}); \bigtriangleup \rangle$ как группы, но обратное неверно. Однако существует довольно простая редукция случая ВА-гомоморфизмов к уже рассмотренному случаю групповых гомоморфизмов, которую мы продемонстрируем на нижеследующем доказательстве ВА-варианта следствия 22.

Начнем с нескольких определений. Пусть $\mathcal{I}$ — идеал на $\mathbb{N}$.

- Отображение $f \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ есть *$\mathcal{I}$-приближенный* ВА-*гомоморфизм*, если множества $(f(x) \cup f(y)) \bigtriangleup f(x \cup y)$ и $f(x^{\complement}) \bigtriangleup (f(x)^{\complement})$ принадлежат $\mathcal{I}$ для всех $x, y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- λ есть обычная однородная вероятностная мера Лебега на $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.
- $\mathcal{I}$ есть *идеал Радона–Никодима в* ВА-*смысле* (или, для краткости, ВА-RN-идеал), если каждый λ-измеримый $\mathcal{I}$-приближенный ВА-гомоморфизм $f \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\mathcal{I}$-аппроксимируется непрерывным ВА-гомоморфизмом $g \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Легко видеть, что непрерывными ВА-гомоморфизмами $g \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ являются в точности отображения вида $g(x) = \{n \colon h(n) \in x\}$, где $h \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Непрерывные *групповые* гомоморфизмы имеют несколько более сложную структуру.

Предложение 39 (см., например, Фарах [13]). *Пусть $g \colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ — непрерывный групповой гомоморфизм. Тогда для каждого n найдется конечное множество $u_n \subseteq \mathbb{N}$ такое, что при любом $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $n \in g(x)$ равносильно тому, что $\#(x \cap u_n)$ — нечетное число.* $\square$

Теорема 40. *Каждый борелевский* F-*идеал* $\mathcal{I}$ *является* BA-RN-*идеалом.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный λ-измеримый $\mathcal{I}$-приближенный BA-гомоморфизм $f\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Согласно следствию 22 для $\mathbb{A} = \mathbb{H} = 2^{\mathbb{N}}$ можно предполагать, что f — уже групповой гомоморфизм (тогда и непрерывный), так что (предложение 39) для каждого n имеется конечное множество $u_n \subseteq \mathbb{N}$ такое, что при любом $x \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ $\;n \in g(x)$ равносильно тому, что $\#(x \cap u_n)$ — нечетное число.

Заметим, что множество $U_0 = \{n\colon u_n = \varnothing\}$ принадлежит $\mathcal{I}$; в самом деле, иначе f не может быть $\mathcal{I}$-приближенным в BA-смысле, поскольку ясно, что $U_0 \cap f(x) = \varnothing$ для всех x. Таким образом, можно предполагать, что $U_0 = \varnothing$, т.е. $u_n \neq \varnothing$ для всех n, ибо, если это не имеет места, мы просто переопределяем $u_n = \{n\}$ для каждого $n \in U_0$.

Мы также утверждаем, что $U = \{n\colon \#(u_n) \geq 2\}$ принадлежит идеалу $\mathcal{I}$. Пусть, напротив, $U \notin \mathcal{I}$. Заметим, что для любого $n \in U$ множество P_n всех пар $\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ таких, что оба числа $\#(x \cap u_n)$ и $\#(y \cap u_n)$ нечетны, а $\#((x \cup y) \cap u_n)$ четно, непусто и, более того, имеет меру $\lambda^2 P_n > \frac{1}{20}$ (грубая оценка). Теперь, поскольку $\mathcal{I}$ есть F-идеал, существует пара $\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N})$ такая, что множество $U_x = \{n \in U\colon \langle x, y\rangle \in P_n\}$ не принадлежит $\mathcal{I}$, т.е. x и y свидетельствуют, что f не может быть $\mathcal{I}$-приближенным в BA-смысле, противоречие.

Итак, действительно $U \in \mathcal{I}$. Поэтому мы можем предполагать, что $U = \varnothing$; если это не так, то переопределим $u_n = \{n\}$ для всех $n \in U$. Но тогда каждое множество u_n содержит ровно один элемент, скажем, $u_n = \{h(n)\}$, так что $f(x) = \{n\colon h(n) \in x\}$, что и требовалось. $\square$

10. ПОДГРУППЫ РАДОНА–НИКОДИМА

Подобно случаю идеалов можно ввести понятия *$\mathcal{G}$-приближенного гомоморфизма* и *$\mathcal{G}$-аппроксимации* для любой подгруппы $\mathcal{G} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ группы $\langle 2^{\mathbb{N}}; \triangle\rangle$ и определить свойство Радона–Никодима для таких групп $\mathcal{G}$ и понятие RN-группы. Рассмотрим следующий класс групп.

(‡) Борелевские группы вида $\mathcal{G} = H[\mathcal{I}] = \{H(x)\colon x \in \mathcal{I}\}$, где H есть λ-измеримый или измеримый по Бэру (тогда и непрерывный) 1–1 гомоморфизм $2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} 2^{\mathbb{N}}$, а $\mathcal{I} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ — борелевский RN-идеал.

Следствие 41. *Любая группа* $\mathcal{G} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ *вида* (‡) *есть* RN-*группа.* $\square$

Довольно интересный случай в области действия этого следствия образован *счетными* группами $\mathcal{G} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$, содержащими все конечные множества. (Требование о конечных множествах на самом деле может быть отброшено, чего мы не будем делать.) Чтобы увидеть, что каждая такая группа $\mathcal{G}$ принадлежит классу (‡), отметим прежде всего, что найдется последовательность множеств $\varnothing \neq G_n \in \mathcal{G}$ такая, что $\min G_n = n$ и каждое $G \in \mathcal{G}$ равно $\bigtriangleup_{k\in u} G_k$ для некоторого конечного $u \subseteq \mathbb{N}$ (при этом считается, что $\bigtriangleup \varnothing = \varnothing$). Теперь функция $H(x) = \bigtriangleup_{k\in x} G_k$ есть непрерывный 1–1 гомоморфизм $2^{\mathbb{N}} \xrightarrow{\text{на}} 2^{\mathbb{N}}$ такой, что образ $H[\mathsf{Fin}]$ равен $\mathcal{G}$, так что $\mathcal{G}$ — группа вида (‡), так как Fin есть RN-идеал.

Оставшаяся часть этого раздела содержит довольно простой пример борелевской (даже $\mathbf{F}_\sigma$) подгруппы $2^{\mathbb{N}}$, которая не является RN-группой. Этот пример основан на конструкции Хъёрта, уже использованной нами с аналогичной целью для других групп в [7, 23].

Пусть $\mathbb{S} = 2^{<\mathbb{N}}$ — все конечные диадические последовательности. Для $x \in 2^{\mathbb{N}}$ положим $f(x) = \{c_x \restriction m\colon m \in \mathbb{N}\}$ — это, очевидно, является ветвью в $\mathbb{S}$. Через W обозначим множество всех пар $\langle x, S\rangle \in 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{S}}$ таких, что

$$x = x_1 \triangle x_2 \triangle \ldots \triangle x_n \qquad \text{и} \qquad S = f(x_1) \triangle f(x_2) \triangle \ldots \triangle f(x_n),$$

где $x_i \in 2^{\mathbb{N}}$ для всех i. Ясно, что W — подгруппа $2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{S}}$, где $2^{\mathbb{N}}$ и $2^{\mathbb{S}}$ рассматриваются как группы с операцией симметрической разности.

Для $x \in 2^{\mathbb{N}}$ определим $W_x = \{S \in \mathcal{P}(\mathbb{S}) \colon \langle x, S\rangle \in W\}$. Понятно, что $\mathcal{G} = W_\varnothing$ является подгруппой группы $2^{\mathbb{N}}$ класса $\mathbf{F}_\sigma$ (конечно, не идеалом), в то время как каждое W_x является "сдвигом" $\mathcal{G}$: $W_x = \{S \bigtriangleup S' \colon S' \in \mathcal{G}\}$ для каждого $S \in W_x$. Кроме того, по определению $f(x) \in W_x$, так что f — борелевский $\mathcal{G}$-приближенный гомоморфизм.

Лемма 42. *Нет непрерывных гомоморфизмов $g \colon 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{S}}$, которые $\mathcal{G}$-аппроксимируют f. Следовательно, $\mathcal{G}$ не является* RN*-группой.*

Доказательство. Пусть, напротив, g — такой гомоморфизм. Тогда согласно предложению 39 имеется семейство конечных множеств $u_s \subseteq \mathbb{N}$ (где $s \in \mathbb{S}$) таких, что, каковы бы ни были $x \in 2^{\mathbb{N}}$ и $s \in \mathbb{S}$, для $g(x)(s) = 1$ необходимо и достаточно, чтобы $\#(u_s \cap x)$ было нечетным числом ($x \in 2^{\mathbb{N}}$ отождествляется с множеством $\{n \colon x(n) = 1\}$).

Поскольку g принимает значения в каждом из множеств W_x, множество $U = \{s \in \mathbb{S} \colon u_s \neq \varnothing\}$ не может быть накрыто конечным числом ветвей в $\mathbb{S}$. Значит, найдется бесконечное множество $A \subseteq U$, являющееся антицепью в $\mathbb{S}$. Как известно, в этом случае найдутся бесконечное подмножество $A' \subseteq A$ и конечное множество v такие, что $u_s \cap u_{s'} = v$ для любой пары различных $s, s' \in A'$.

В этом случае, очевидно, существует $x \in 2^{\mathbb{N}}$ такое, что $\#(u_s \cap x)$ нечетно для любого $s \in A'$, откуда следует $A' \subseteq g(x)$, а это противоречит тому, что A' — бесконечная антицепь. □

11. ИЗМЕРИМЫЕ КОЦИКЛЫ И КОГОМОЛОГИИ

Если A, H — абелевы аддитивные группы, то любое отображение $C \colon A^2 \to H$, удовлетворяющее

1*. $C(x,y) = C(y,x)$ и $C(x,y) + C(x+y,z) = C(x,z) + C(x+z,y)$,

называется (абелевым) *коциклом* (точнее, 2-коциклом) группы A над H.[24] Например, для любого отображения $\eta \colon A \to H$ функция $C_\eta(x,y) = \eta(x) + \eta(y) - \eta(x+y)$ есть коцикл, коциклы этого вида называются *кограницами*. Коциклы образуют абелеву группу $Z^2(A,H)$ с операцией $(C_1 + C_2)(x,y) = C_1(x,y) + C_2(x,y)$ (для всех $x, y \in A$), а кограницы — ее подгруппу $B^2(A,H)$. Фактор-группа $\mathrm{H}^2(A,H) = Z^2(A,H)/B^2(A,H)$ есть *вторая группа когомологий* группы A над H.

Здесь удобно сделать паузу для нескольких простых определений и замечаний, которые будут использованы ниже. Начнем со следующего.

2*. $C(0,y) = C(0,z)$; в самом деле, положим $x = 0$ в 1*.

Для любого коцикла $C \colon A^2 \to H$ можно определить значение $C(x_1,\ldots,x_n) \in H$ для $x_1,\ldots,x_n \in A$ индукцией по $n \geq 2$ следующим образом:

3*. $C(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1}) = C(x_1,\ldots,x_n) + C(x_1 + \ldots + x_n, x_{n+1})$.

Положим дополнительно $C(x) = 0$ для всех $x \in A$. Тогда мы имеем

4*. $C(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m) = C(x_1,\ldots,x_n) + C(y_1,\ldots,y_m) + C(x,y)$, где $x = x_1 + \ldots + x_n$ и $y = y_1 + \ldots + y_m$.

[24] Мы рассматриваем только этот специальный вид коциклов.

(Пусть, для краткости, $\mathbf{x}$ есть строка $x_1, \ldots, x_n$ и $s = x_1 + \ldots + x_n$. Рассуждая индукцией по m, применяем 1^* при $m = 1$. Чтобы провести индуктивный шаг, предполагаем, что

$$C(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_{m-1}) = C(\mathbf{x}) + C(y_1, \ldots, y_{m-1}) + C(s, y_1 + \ldots + y_{m-1}).$$

Добавив $C(s + y_1 + \ldots + y_{m-1}, y_m)$, мы имеем $C(\mathbf{x}, y_1, \ldots, y_m)$ слева и

$$C(\mathbf{x}) + C(y_1, \ldots, y_{m-1}) + C(y_m, y_1 + \ldots + y_{m-1}) + C(s, y_1 + \ldots + y_m)$$

справа по 1^*, что равно правой части 4^* по 1^*.)

Коциклы (в том числе и значительно более общего вида, чем мы здесь рассматриваем) относятся к числу наиболее важных алгебраических объектов. (Мы сошлемся на книги Картана и Ейленберга [4, XIV] и Серра [30, VII].) В частности, они используются в теории расширений групп. Действительно, если A, H — абелевы группы, а $C\colon A^2 \to H$ — коцикл, то может быть определена абелева группа, скажем P_C, с базовым множеством $A \times H$ и операцией

$$\langle a, h \rangle +_C \langle a', h' \rangle = \langle a + a', h + h' + C(a, a') \rangle,$$

ассоциативность которой следует из 1^*. При этом 1) H — подгруппа P_C (через вложение $k \mapsto \langle 0, k + C(0,0) \rangle$) и 2) группа A изоморфна P_C/H (через отображение $a \mapsto \{a\} \times H$), т.е. P_C есть *расширение A с ядром H*. Обратно, каждая абелева группа P, удовлетворяющая 1) и 2), может быть представлена как P_C для некоторой функции $C\colon A^2 \to H$, причем из ассоциативности операции следует, что C — коцикл. Далее, два расширения, скажем P_C и $P_{C'}$, *когомологичны*, когда $\langle A \times H; +_C \rangle$ переводится в $\langle A \times H; +_{C'} \rangle$ простым сдвигом $\langle a, h \rangle \mapsto \langle a, h + \eta(a) \rangle$, где $\eta\colon A \to H$, что равносильно тому, что разность $C - C'$ есть кограница C_η: это собственно и приводит к группе когомологий $\mathsf{H}^2(A, H)$.

Предположим, что рассматриваемые группы A, H являются борелевскими (см. разд. 1). Коцикл $C\colon A^2 \to H$ называется *борелевским*, если он является таковым как отображение. Соответственно *борелевской кограницей* называется любая кограница вида C_η, где функция $\eta\colon A \to H$ борелевская. Аналогичные определения предполагаются и для других видов измеримости: по Бэру и в смысле некоторой меры μ.

Целью следующей части нашей статьи является исследование измеримых, в частности борелевских, коциклов и кограниц. Мы доказываем в разд. 12 теорему о связи "малых" измеримых коциклов и кограниц, в определенном смысле обобщающую абелев случай в теореме 10. Во-вторых, мы изучаем группу $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(A, H)$ *борелевских*[25] когомологий, т.е. фактор-группу группы всех борелевских коциклов $C\colon A^2 \to H$ по подгруппе всех борелевских кограниц: эта группа отражает структуру *борелевских* расширений группы A с ядром H. Мы докажем, что группа $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(\mathbb{R}, G)$ тривиальна, какова бы ни была счетная подгруппа G аддитивной группы $\mathbb{R}$, в то время как группа $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$ имеет значительно более сложное строение.

12. О "МАЛЫХ" КОЦИКЛАХ И КОГРАНИЦАХ

В этом разделе мы возвращаемся к рассмотрениям разд. 4. Пусть $\mathbb{A}$, μ, $\mathbb{H} = \prod_{n \in \mathbb{N}} H_n$ таковы, как в $(*)$ из разд. 4, а φ является F-субмерой на $\mathbb{N}$. Дополнительно группы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{H}$ (тогда и все H_n) предполагаются абелевыми.

Ясно, что кограница C_f, задаваемая любым гомоморфизмом $f\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}$, тождественно равна $0_{\mathbb{H}}$, а если f — приближенный гомоморфизм, то соответственно C_f может принимать

[25] См. Мур [29] или Дю Пре [10].

только “малые”, т.е. $\mathbf{d}_\varphi$-близкие к $0_{\mathbb{H}}$, значения в $\mathbb{H}$; в этом случае C_f можно назвать *“малым” коциклом.* Саму же теорему аппроксимации (теорема 10) можно неформально выразить так: всякая измеримая кограница $C = C_f$, являющаяся “малым” коциклом, имеет вид C_g для подходящей измеримой $g\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H}$, принимающей только “малые” значения, т.е. является “малой” кограницей. Простые примеры показывают, что этот результат не распространяется на “малые” коциклы C, не являющиеся кограницами. Однако мы можем доказать, что каждый “малый” (измеримый) коцикл есть сумма “малой” кограницы и коцикла в подгруппу “малого” диаметра.

Напомним, что $|s| = \{n\colon s(n) \neq 0\}$ для $s \in \mathbb{H}$. Если $s \in \mathbb{H}$ и $E \subseteq \mathbb{N}$, то $s \restriction E$ обозначает ограничение s на E, продолженное нулями 0_n групп H_n, $n \notin E$. Соответственно множество $\mathbb{H} \restriction E = \{s \restriction E\colon s \in \mathbb{H}\}$ есть подгруппа группы $\mathbb{H}$. Положим $X^{\complement} = \mathbb{N} \setminus X$ для $X \subseteq \mathbb{N}$.

Теорема 43. *Предположим, что φ является* F*-субмерой, $\varepsilon \geq 0$, а $C\colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{H}$ есть μ^2-измеримый коцикл и $\varphi(|C(x,y)|) \leq \varepsilon$ для всех $x, y \in \mathbb{A}$. Тогда найдутся множество $E \subseteq \mathbb{N}$ и μ-измеримая функция $\eta\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H} \restriction E$ такие, что $\varphi(E^{\complement}) \leq 16\varepsilon$, $\varphi(|\eta(x)|) \leq 4\varepsilon$ для всех $x \in \mathbb{A}$ и коцикл $C'(x,y) = C(x,y) \restriction E$ совпадает с C_η. То же для борелевских C, η.*

Доказательство. Положим $C_n(x,y) = C(x,y)(n)$, таким образом, $C_n\colon \mathbb{A} \to H_n$. Из того что φ есть F-субмера, следует, что множество E всех индексов $n \in \mathbb{N}$ таких, что $\mu^2\{\langle x,y\rangle\colon C_n(x,y) \neq 0_n\} \leq 1/16$, удовлетворяет $\varphi(E^{\complement}) \leq 16\varepsilon$.

Пусть $n \in E$.

Множество G'_n всех $a \in \mathbb{A}$ таких, что $\mu\{x\colon C_n(a,x) = 0_n\} > 5/6$, μ-измеримо и удовлетворяет $\mu(G'_n) > 5/8$ по теореме Фубини. Найдется борелевское множество $G_n \subseteq G'_n$ той же меры, что и G'_n, т.е. $\mu(G_n) > 5/8$. Тогда для любого $x \in \mathbb{A}$ множество $A^x_n = x + G_n$ удовлетворяет $\mu(A^x_n) > 1/4$. Согласно предложению 1 найдется борелевская функция $x \mapsto a^x_n$ такая, что $a^x_n \in A^x_n$ для всех x, т.е. $a^x_n \in G'_n$ и $x + a^x_n \in G'_n$ для любого x, и дополнительно либо $C_n(x, a^x_n) = 0_n$, либо $C_n(x,a) \neq 0_n$ для μ-почти всех $a \in A^x_n$.

Функция $\eta_n(x) = C_n(x, a^x_n)$ является μ-измеримой и борелевской вместе с C. Мы утверждаем, что C_n совпадает с кограницей C_{η_n}. В самом деле, во-первых,

$$C_{\eta_n}(x,y) = C_n(x, a^x_n) + C_n(y, a^y_n) - C_n(x+y, a^{x+y}_n),$$

а, во-вторых, поскольку C_n — коцикл, то

$$C_n(x,y) = C_n(x,z) + C_n(x+z,y) - C_n(x+y,z)$$

для каждого $z \in \mathbb{A}$. Отметим далее, что по 1*

$$\begin{gathered}
C_n(x, a^x_n) - C_n(x,z) = C_n(a^x_n, x+z) - C_n(x + a^x_n, z),\\
C_n(y, a^y_n) - C_n(y, x+z) = C_n(y + a^y_n, x+z) - C_n(a^y_n, x+y+z),\\
C_n(x+y, a^{x+y}_n) - C_n(x+y, z) = C_n(a^{x+y}_n, x+y+z) - C_n(x+y+a^{x+y}_n, z).
\end{gathered}$$

Здесь первый аргумент каждого из шести применений C_n в правых частях принадлежит G_n. Поэтому существует $z \in \mathbb{A}$, которое обращает в 0_n все шесть членов в правых частях. Следовательно, $C_n = C_{\eta_n}$.

Если $n \notin E$, то положим $\eta_n(x) = 0_n$ для всех $x \in \mathbb{A}$. Этим определено отображение $\eta\colon \mathbb{A} \to \mathbb{H} \restriction E$.

Остается проверить, что $\varphi(|\eta(x)|) \leq 4\varepsilon$ для всех $x \in \mathbb{A}$. Пусть, напротив, $\varphi(|\eta(x)|) > 4\varepsilon$. По выбору η_n мы имеем: если $n \in |\eta(x)|$, т.е. $\eta_n(x) \neq 0_n$, то $\mu\{a\colon C_n(x,a) \neq 0_n\} > 1/4$. Поскольку φ есть F-субмера, отсюда следует существование $a \in \mathbb{A}$ такого, что $\varphi(|C(x,a)|) > \frac{1}{4} \cdot 4\varepsilon = \varepsilon$, что противоречит выбору C. $\square$

13. БОРЕЛЕВСКАЯ КОГОМОЛОГИЯ ГРУППЫ $2^{\mathbb{N}}$ НАД $2^{\mathbb{N}}$

Этот раздел посвящен вычислению группы борелевских когомологий $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$. Нам будет технически удобнее рассматривать реализацию $2^{\mathbb{N}}$ в виде $\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{x \colon x \subseteq \mathbb{N}\}$, т.е. принимается следующее соглашение.

- $2^{\mathbb{N}}$ состоит из всех подмножеств $\mathbb{N}$ и рассматривается как (абелева и нильпотентная) группа с операцией $\triangle$ (симметрическая разность) и нейтральным элементом $0 = \varnothing$ (пустое множество).

Мы собираемся доказать, что группа $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$ изоморфна

1) идеалу $0 \otimes \mathsf{Fin}$, который, напомним, состоит из всех множеств $X \subseteq \mathbb{N}^2$ таких, что каждое сечение $(X)_n = \{k \colon \langle n, k\rangle \in X\}$ конечно, с симметрической разностью $\triangle$ в качестве групповой операции и
2) группе $\mathsf{Hom}_{\mathrm{C}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$ всех непрерывных гомоморфизмов $h \colon 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$ с операцией $(h \triangle h')(x) = h(x) \triangle h'(x)$.

Если множество X принадлежит идеалу $0 \otimes \mathsf{Fin}$, то определим $h[X] \in \mathsf{Hom}_{\mathrm{C}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$ посредством $h[X](x) = \{n \colon x \cap (X)_n \text{ нечетно}\}$ для всех $x \in 2^{\mathbb{N}}$. Используя предложение 39, мы немедленно получаем следующее.

Лемма 44. *Отображение $X \mapsto h[X]$ является изоморфизмом $0 \otimes \mathsf{Fin}$ на $\mathsf{Hom}_{\mathrm{C}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$.* □

В свою очередь взаимоотношения между группами $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$ и $\mathsf{Hom}_{\mathrm{C}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$ регулируются следующим отображением:

- если $C \colon (2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}) \to 2^{\mathbb{N}}$, то $\tau_C(x) \stackrel{\mathrm{def}}{=} C(x,x) \triangle C(0,0)$ для $x \in 2^{\mathbb{N}}$.

Если C — борелевский коцикл, то τ_C будет борелевским, следовательно, и непрерывным по теореме Петтиса гомоморфизмом $2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$; чтобы доказать $\tau_C(x \triangle y) = \tau_C(x) \triangle \tau_C(y)$, заметим, что

$$\begin{aligned} C(x,x,y,y) &= C(x,x) \triangle C(y,y) \triangle C(0,0) = \\ &= C(x,y) \triangle C(x,y) \triangle C(x \triangle y, x \triangle y) \end{aligned}$$

согласно 4^* (см. разд. 11), откуда следует

$$\begin{aligned} \tau_C(x \triangle y) &= C(x \triangle y, x \triangle y) \triangle C(0,0) = \\ &= C(x,x) \triangle C(y,y) = \tau_C(x) \triangle \tau_C(y), \end{aligned}$$

что и требовалось. Итак, в этом случае $\tau_C \in \mathsf{Hom}_{\mathrm{C}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$.

Обозначим для каждого борелевского коцикла $C \colon (2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}) \to 2^{\mathbb{N}}$ через $\overline{C}$ его класс в фактор-группе $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$ (он состоит из всех коциклов, отличающихся от C на борелевскую кограницу).

Теорема 45. *Отображение $C \mapsto \tau_C$ индуцирует изоморфизм группы $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$ на $\mathsf{Hom}_{\mathrm{C}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$ в том смысле, что для любой пары борелевских коциклов $A, B \colon (2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}) \to 2^{\mathbb{N}}$*

i) *$\tau_{A \triangle B}$ тождественно $\tau_A \triangle \tau_B$;*
ii) *$\overline{A} = \overline{B}$ тогда и только тогда, когда $\tau_A = \tau_B$,*

и дополнительно для каждого $h \in \mathsf{Hom}_{\mathrm{C}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$ найдется борелевский коцикл $C \colon (2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}) \to$ $\to 2^{\mathbb{N}}$ такой, что $h = \tau_C$.

Доказательство. Утверждение i) следует непосредственно из определения. Далее, если C — кограница, т.е. $C(x,y) = g(x) \triangle g(y) \triangle g(x \triangle y)$ для некоторого отображения $g\colon 2^{\mathbb{N}} \to 2^{\mathbb{N}}$, то, очевидно, $\tau_C = 0$. Отсюда следует утверждение "только тогда" в ii). Для доказательства последнего утверждения теоремы пусть $h \in \mathsf{Hom}_{\mathrm{C}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$. Положим

- $C[h](x,y) = h(x) \cap h(y)$ для всех $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$;

тогда $C[h]$ — борелевский коцикл: в самом деле,

$$C[h](x,y) \triangle C[h](x \triangle y, z) = (h(x) \cap h(y)) \cup (h(x) \cap h(z)) \cup (h(y) \cap h(z))$$

и правая часть не зависит от перестановок внутри $\{x, y, z\}$. Наконец, непосредственная проверка показывает, что $h = \tau_{C[h]}$.

Главную часть доказательства занимает утверждение "тогда" в ii). Достаточно проверить, что любой борелевский коцикл $C\colon (2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}) \to 2^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющий $\tau_C(x) = 0$ для всех x, есть борелевская кограница. Можно предполагать следующее:

1) $C(0,x) = 0$ для всех $x \in 2^{\mathbb{N}}$.

(Если это не имеет места, то, вспомнив, что $C(0,x) = c = \mathrm{const}$ по 2^* из разд. 11, мы положим $f(x) = c$ для всех x. Тогда $C_f(x,y) = c$ для всех x, y, поэтому коцикл $C'(x,y) = C(x,y) \triangle C_f(x,y)$ удовлетворяет 1).) Итак, наша задача сводится к следующему: показать, что любой борелевский коцикл $C\colon (2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}) \to 2^{\mathbb{N}}$, удовлетворяющий 1) и

2) $C(x,x) = 0$ для всех $x \in 2^{\mathbb{N}}$,

есть борелевская кограница. Эту задачу можно решать по отдельности для каждого "координатного" коцикла

$$C^{(m)}(x,y) = C(x,y)(m)\colon (2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}}) \to \{0,1\},$$

так что можно предполагать, что

3) $C(x,y) \in 2 = \{0,1\}$ $(= \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ для всех $x, y \in 2^{\mathbb{N}}$.

Итак, мы фиксируем борелевский коцикл C, удовлетворяющий 1), 2), 3), и докажем, что он является борелевской кограницей.

Для начала мы найдем окрестность 0 в $2^{\mathbb{N}}$, на которой C — кограница, затем это свойство будет продолжено на все $2^{\mathbb{N}}$.

Начнем с нескольких определений. Фиксируем счетную транзитивную модель (с.т.м.) $\mathfrak{M}$ достаточно большого конечного фрагмента **ZFC**[26], которая содержит "код" C, т.е. некоторую точку $c \in 2^{\mathbb{N}}$, эффективно кодирующую борелевское построение всех C-прообразов базовых открыто-замкнутых подмножеств $2^{\mathbb{N}}$. Если $x, y, \ldots \in 2^{\mathbb{N}}$, то через $\mathfrak{M}[x, y, \ldots]$ мы будем обозначать какую-нибудь с.т.м. того же фрагмента **ZFC**, содержащую все множества из $\mathfrak{M}$, а также x, $y, \ldots$ Эта модель $\mathfrak{M}[x, y, \ldots]$ может содержать больше ординалов, чем $\mathfrak{M}$. *Генерическое* ниже будет означать: элемент $x \in 2^{\mathbb{N}}$ или конечная последовательность таких x, генерические по Коэну над $\mathfrak{M}$.[27] Соответственно $\{x, y, \ldots\}$-*генерическое* означает: генерическое по Коэну над $\mathfrak{M}[x, y, \ldots]$.

[26] Например, содержащего первый миллион аксиом **ZFC** и схемы для Σ_{100} формул. Напомним, что **ZFC** — это аксиоматическая теория множеств Цермело–Френкеля. Предполагается некоторое знакомство читателя с аксиоматикой теории множеств.

[27] Это означает, что x не принадлежит никакому "тощему" борелевскому множеству, имеющему коды в $\mathfrak{M}$. Мы могли бы избежать использования этого понятия, посредством аккуратного учета всех действительно относящихся к делу "тощих" борелевских множеств, что, однако, значительно удлинило бы рассуждения.

Положим $I_u^m = \{x \in 2^{\mathbb{N}} \colon x \cap m = u\}$ для всех $m \in \mathbb{N}$ и $u \subseteq [0, m)$. Из 3) следует существование числа m, пары множеств $u, v \subseteq [0, m)$ и некоторого $\gamma \in \{0, 1\}$ таких, что $C(x, y) = \gamma$ для каждой генерической пары $\langle x, y\rangle \in I_u^m \times I_v^m$. Мы собираемся показать для начала, что C является борелевской кограницей на $I_\varnothing^m$.

Лемма 46. *Предположим, что генерические* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in I_u^m$ *удовлетворяют* $x_1 \triangle \ldots \triangle x_n = y_1 \triangle \ldots \triangle y_n$. *Тогда* $C(x_1, \ldots, x_n) = C(y_1, \ldots, y_n)$.

Доказательство. Рассуждаем индукцией по n. Пусть $n = 2$. Возьмем $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$-генерическое $a \in I_v^m$. Тогда $b = a \triangle x_1 \triangle y_1 = a \triangle x_2 \triangle y_2 \in I_v^m$ также является $\{x_1, x_2, y_1, y_2\}$-генерическим, так что пары $\langle x_1, b\rangle$, $\langle x_2, a\rangle$, $\langle y_1, a\rangle$, $\langle y_2, b\rangle$ генерические по теореме о произведении в теории форсинга. Из 4^* (см. разд. 11) следует

$$C(x_1, x_2, a, b) = C(x_1, b) \triangle C(x_2, a) \triangle C(x_1 \triangle b, x_2 \triangle a),$$
$$C(y_1, y_2, a, b) = C(y_1, a) \triangle C(y_2, b) \triangle C(y_1 \triangle a, y_2 \triangle b).$$

Поэтому $C(x_1, x_2, a, b) = C(y_1, y_2, a, b)$, ибо по определению $x_1 \triangle b = y_1 \triangle a$ и $y_2 \triangle b = x_2 \triangle a$, а $C(x_1, b) = C(y_1, a) = C(x_2, a) = C(y_2, b) = \gamma$. Однако

$$C(x_1, x_2, a, b) = C(x_1, x_2) \triangle C(a, b) \triangle C(x_1 \triangle x_2, a \triangle b),$$
$$C(y_1, y_2, a, b) = C(y_1, y_2) \triangle C(a, b) \triangle C(y_1 \triangle y_2, a \triangle b),$$

так что $C(x_1, x_2) = C(y_1, y_2)$, поскольку $x_1 \triangle x_2 = y_1 \triangle y_2$.

Теперь индуктивный шаг. Пусть $x_1 \triangle \ldots \triangle x_{n+1} = y_1 \triangle \ldots \triangle y_{n+1}$. Если дополнительно $x_{n+1} = y_{n+1}$, т.е. $x_1 \triangle \ldots \triangle x_n = y_1 \triangle \ldots \triangle y_n$, то

$$C(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = C(x_1, \ldots, x_n) \triangle C(x_1 \triangle \ldots \triangle x_n, x_{n+1}),$$
$$C(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}) = C(y_1, \ldots, y_n) \triangle C(y_1 \triangle \ldots \triangle y_n, y_{n+1})$$

по 4^* из разд. 11 и можно применить индуктивное предположение.

Теперь рассмотрим общий случай. Возьмем $\{x_1, \ldots, x_{n+1}, y_1, \ldots, y_{n+1}\}$-генерическое $z \in I_u^m$. Определим $x'_{n+1} = y'_{n+1} = z$, $x'_1 = x_1 \triangle x_{n+1} \triangle z$, $y'_1 = y_1 \triangle y_{n+1} \triangle z$, оставляя $x'_i = x_i$ и $y'_i = y_i$ при $2 \le i \le n$. Тогда

$$C(x_1, \ldots, x_{n+1}) = C(x'_1, \ldots, x'_{n+1}) = C(y'_1, \ldots, y'_{n+1}) = C(y_1, \ldots, y_{n+1})$$

по рассмотренному выше частному случаю. $\square$

Продолжая доказательство теоремы 45, определим функцию $f \colon 2^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}$ следующим образом. Если $a \in I_\varnothing^m$, то $f(a) = C(x, y)$, где $x, y \in I_u^m$ генерические и удовлетворяют $a = x \triangle y$; это не зависит от выбора x, y по лемме 46. Если $a \in 2^{\mathbb{N}} \setminus I_\varnothing^m$, то $f(a) = 0$.

Предложение 47. *Функция* f *борелевская.*

Доказательство. Каково бы ни было $a \in I_\varnothing^m$, множество X_a всех генерических $x \in I_u^m$ таких, что $x \triangle a$ также генерическое, является, очевидно, ко-“тощим”. Поэтому (предложение 1) имеется борелевская функция $h \colon I_\varnothing^m \to 2^{\mathbb{N}}$ такая, что $h(a) \in X_a$ для всех a. Однако теперь мы имеем $f(a) = C(h(a), a \triangle h(a))$ для $a \in I_\varnothing^m$. $\square$

Лемма 48. $C = C_f$ *на* $I_\varnothing^m$.

Доказательство. Нужно показать, что $C(a, b) = C_f(a, b)$ всякий раз, когда $a, b \in I_\varnothing^m$. Существуют генерические $x, x', y, y', z, z' \in I_u^m$ такие, что $a = x \triangle x'$, $b = y \triangle y'$, $a \triangle b = z \triangle z'$, тогда и $x \triangle x' \triangle y \triangle y' = z \triangle z'$, что влечет $C(x, x', y, y') = C(z, z', z, z)$ по лемме 46. Однако

$$C(z, z', z, z) = C(z, z') \triangle C(z, z) \triangle C(z \triangle z', z \triangle z) = C(z, z')$$

по 4^* из разд. 11 и предположениям 1) и 2), так что на самом деле мы имеем $C(x,x',y,y') = C(z,z')$. Отметим, что $f(a) = C(x,x')$, $f(b) = C(y,y')$, $f(a \triangle b) = C(z,z')$ по лемме 46. Таким образом,

$$C_f(a,b) = C(x,x') \triangle C(y,y') \triangle C(z,z') = \\ = C(x,x') \triangle C(y,y') \triangle C(x,x',y,y') = C(x \triangle x', y \triangle y')$$

по 4^* из разд. 11, так что $C(a,b) = C_f(a,b)$, что и требовалось. $\square$

Мы определяем борелевский коцикл $C'(x,y) = C(x,y) \triangle C_f(x,y)$. Тогда $C'(x,y) = 0$ для всех $x, y \in I^m_\varnothing$ по лемме 48. Проверим, что C' — борелевская кограница. Положим $\widetilde{s} = \{\{l\} : l \in s\}$ для каждого $s \subseteq [0,m)$, так что $\widetilde{s} \subseteq \mathcal{P}([0,m))$. Любое $y \in 2^{\mathbb{N}}$ имеет вид $y = s \triangle x$, где $s = y \cap [0,m)$ и $x = y \setminus [0,m)$. Определим $g(y) = C'(\widetilde{s}) \triangle C'(s,x)$. Здесь $\widetilde{s}$ — конечная последовательность элементов $\mathcal{P}([0,m))$ (фактически одноэлементных множеств), так что $C'(\widetilde{s})$ здесь понимается в смысле индуктивного определения 3^* из разд. 11. Докажем, что $C' = C_g$.

Фиксируем $s, t \subseteq [0,m)$ и $x, y \subseteq [m, \infty)$ и покажем, что выполнено $C'(s \triangle x, t \triangle y) = C_g(s \triangle x, t \triangle y)$. Во-первых, по определению

$$C_g(s \triangle x, t \triangle y) = C'(\widetilde{s}) \triangle C'(s,x) \triangle C'(\widetilde{t}) \triangle C'(t,y) \triangle C'(\widetilde{w}) \triangle C'(w, x \triangle y),$$

где $w = s \triangle t$. Во-вторых, по 4^* из разд. 11

$$C'(s,t,x,y) = C'(s,t) \triangle C'(x,y) \triangle C'(w, x \triangle y) = \\ = C'(s,x) \triangle C'(t,y) \triangle C'(s \triangle x, t \triangle y),$$

так что $C'(s \triangle x, t \triangle y) = C'(s,t) \triangle C'(w, x \triangle y) \triangle C'(s,x) \triangle C'(t,y)$, поскольку $C'(x,y) = \varnothing$ для всех $x, y \in I^m_\varnothing$. Остается проверить, что

$$C'(s,t) = C'(\widetilde{s}) \triangle C'(\widetilde{t}) \triangle C'(\widetilde{w}),$$

где, напомним, $w = s \triangle t$. Однако $C'(\widetilde{s}, \widetilde{t}) = C'(\widetilde{s}) \triangle C'(\widetilde{t}) \triangle C'(s,t)$ по 4^* из разд. 11, так что в конечном счете нужно доказать, что $C'(\widetilde{s}, \widetilde{t}) = C'(\widetilde{w})$. Поскольку $w = s \triangle t$, список $\widetilde{s}, \widetilde{t}$ имеет вид $\widetilde{w}, \widetilde{r}, \widetilde{r}$, где $r = s \cap t$ (с точностью до перестановок). Это приводит теорему к следующей задаче: доказать, что $C'(\widetilde{x}, y, y) = C'(\widetilde{x})$ для любого конечного списка $\widetilde{x} \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ и каждого $y \in 2^{\mathbb{N}}$. Это не составляет труда: согласно 4^* из разд. 11

$$C'(\widetilde{x}, y, y) = C'(\widetilde{x}) \triangle C'(y,y) \triangle C'(x, y \triangle y) = C'(\widetilde{x})$$

по предположениям 1), 2). (В выделенной формуле x есть $\triangle$-сумма всех членов $\widetilde{x}$, т.е. если $\widetilde{x} = x_1, \ldots, x_n$, то $x = x_1 \triangle \ldots \triangle x_n$.) Теорема 45 доказана. $\square$

Замечания. Имеется любопытная задача. Легко видеть, что отображение $h \mapsto C[h]$ из $\mathsf{Hom}_{\mathrm{C}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$ в коциклы не является гомоморфизмом. Существует ли (достаточно просто определяемый на $\mathsf{Hom}_{\mathrm{C}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$) гомоморфизм γ такой, что $\overline{\gamma(h)} = \overline{C[h]}$ для всех $h \in \mathsf{Hom}_{\mathrm{C}}(2^{\mathbb{N}}, 2^{\mathbb{N}})$?

Несколько слов о топологической и борелевской структуре идеала $0 \otimes \mathsf{Fin}$. Он является борелевским (более точно, $\mathbf{F}_{\sigma\delta}$) подмножеством $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ (даже подгруппой). Нетрудно проверить, что унаследованная из $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ топология $0 \otimes \mathsf{Fin}$ не является "польской". В то же время более сильная топология, порожденная конечными пересечениями множеств вида $\{X \in 0 \otimes \mathsf{Fin} : (X)_n = u\}$, где $n \in \mathbb{N}$, а $u \subseteq \mathbb{N}$ конечно, превращает $0 \otimes \mathsf{Fin}$ в "польскую" группу, однако ее борелевские множества в точности те же, что и даваемые топологией, унаследованной из $\mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$. Вообще $0\otimes\mathtt{Fin}$, как группа, тождественна $(2^{<\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$, где $2^{<\mathbb{N}}$ обозначает (счетную) подгруппу $2^{\mathbb{N}}$, состоящую из всех $x \in 2^{\mathbb{N}}$ таких, что $x(n) = 0$ для почти всех n, а указанная "польская" топология получится, если принять здесь топологию $2^{<\mathbb{N}}$ дискретной.

Что представляет собой $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$? Нами вместе с Кристенсеном [7] показано, что $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(\mathbb{R},G)$ — тривиальная группа, если G — счетная подгруппа аддитивной группы $\mathbb{R}$. Это неверно для $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(2^{\mathbb{N}},G)$ даже для конечных групп $G \subseteq 2^{\mathbb{N}}$; положим $C(x,y) = \{0\} \cap x \cap y$. Что еще можно доказать о группах $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(2^{\mathbb{N}},G)$ и $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(\mathbb{R},G)$, где G — борелевская подгруппа соответственно $2^{\mathbb{N}}$ и $\mathbb{R}$? Известен основанный на идее Хъёрта пример борелевской группы $G \subseteq \mathbb{R}$ и борелевского коцикла $C\colon \mathbb{R}^2 \to G$, который является кограницей в $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, но не является кограницей в $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(\mathbb{R},G)$ [7, 24]. Похожий пример можно построить и для $2^{\mathbb{N}}$.

14. БОРЕЛЕВСКАЯ КОГОМОЛОГИЯ $\mathbb{R}$ НАД СЧЕТНЫМИ ГРУППАМИ

Ниже $\mathbb{R}$ обозначает аддитивную группу вещественных чисел. В этом разделе мы доказываем следующую теорему.

Теорема 49. *Пусть G — счетная абелева группа. Тогда каждый борелевский коцикл $C\colon \mathbb{R}^2 \to G$ есть борелевская кограница, т.е. найдется борелевская функция $h\colon \mathbb{R} \to G$ такая, что $C = C_h$.*[28] *Таким образом, группа $\mathsf{H}^2_{\mathrm{Bor}}(\mathbb{R},G)$ тривиальна.*

Случай $G = \mathbb{Z}$ (целые числа) в теореме 49 был предложен Д. Маркером в качестве открытой проблемы[29].

Прежде чем начать доказательство, приведем две теоремы, которые следуют из теоремы 49.

Теорема 50. *Пусть $G \subseteq \mathbb{R}$ — счетная группа, а $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ является борелевским G-приближенным гомоморфизмом*[30]. *Тогда найдется $r \in \mathbb{R}$ такое, что $f(x) - rx \in G$ для всех x.*

Теорема 51. *Пусть B — борелевская абелева упорядоченная группа, имеющая счетную подгруппу G как наибольшую выпуклую подгруппу, причем B/G порядково подобно $\mathbb{R}$. Тогда B борелевски изоморфна, как упорядоченная группа, произведению $\mathbb{R} \times G$ с лексикографическим порядком.* $\square$

Вывод теоремы 51 из теоремы 49 (см. [7]) слишком сложен, чтобы привести его здесь. Теорема 50, доказанная нами в [23], напротив, следует достаточно элементарно. Именно, если отображение f таково, как в теореме 50, применим теорему 49 к коциклу $C_f(x,y) = f(x) + f(y) - - f(x+y)$. (Конечно, C_f — уже кограница, однако ее производящая функция f отображает $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, а не в G.) По теореме 49 $C_f = C_h$ для некоторой борелевской $h\colon \mathbb{R} \to G$. Тогда $g(x) = f(x) - h(x)$ есть борелевская функция $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая $C_g(x,y) = 0$ для всех x, т.е. g — гомоморфизм $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. По теореме Петтиса g — непрерывная функция, откуда легко следует, что $g(x) = rx$ для некоторого r. Наконец, $f(x) - g(x) = h(x) \in G$, так что g G-аппроксимирует f.

Доказательство теоремы 49. Фиксируем группу G и коцикл C такие, как в условии теоремы 49. Групповая операция и нейтральный элемент G будут обозначаться через $+$ и 0, это не приведет к коллизии обозначений с операцией и нулем аддитивной группы $\mathbb{R}$.

[28] Напомним, что $C_h(x,y) = h(x) + h(y) - h(x+y)$ для всех x, y.

[29] *Маркер Д.* (Marker D.). Частное сообщение, 1998.

[30] Это означает, что $f(x) + f(y) - f(x+y) \in G$ для всех $x, y \in \mathbb{R}$.

Выберем вещественное число $z \in \mathbb{R}$, которое эффективно кодирует борелевскую функцию C. Фиксируем с.т.м. $\mathfrak{M}$ достаточно большого конечного фрагмента **ZFC**, которая содержит z и G. Определение $\mathfrak{M}[x, y, \ldots]$ и понятия генеричности и $\{x, y, \ldots\}$-генеричности (по Коэну) применительно к вещественным числам и их конечным последовательностям вводятся так же, как и в доказательстве теоремы 45, при этом форсинг Коэна определяется как множество всех непустых рациональных открытых интервалов (a, b) в $\mathbb{R}$. (Меньшие интервалы суть более сильные вынуждающие условия.)

Благодаря счетности G найдутся рациональные интервалы I и J и элемент $\tilde{g} \in G$ такие, что I лежит справа от 0 и короче чем J, и мы имеем $C(a, b) = \tilde{g}$ для каждой генерической (над $\mathfrak{M}$) пары $\langle a, b\rangle \in I \times J$.

Лемма 52. *Если числа $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in I$ являются генерическими и $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$, то $C(x_1, \ldots, x_n) = C(y_1, \ldots, y_n)$.*

Напомним, что значение $C(x_1, \ldots, x_n)$ (здесь $\in G$) было определено для любой “арности” $n \geq 3$ и всех x_i (здесь $\in \mathbb{R}$) в 3^* из разд. 11.

Доказательство леммы 52. Доказательство использует индукцию по n. Начнем с $n = 2$. Пусть $x, y, x', y' \in I$ являются генерическими и $x + y = x' + y'$; докажем, что $C(x, y) = C(x', y')$.

Предполагаем, что $x < x' < y' < y$. Так как I короче чем J, найдется $\{x, x', y, y'\}$-генерическое число $\alpha \in J$ такое, что $\alpha' = \alpha + (x' - x) \in J$. Тогда каждая из пар $\langle x, \alpha'\rangle$, $\langle y, \alpha\rangle$, $\langle x', \alpha\rangle$, $\langle y', \alpha'\rangle$ генерическая по теореме о произведении для форсинга. Значит,

$$C(x, y, \alpha, \alpha') = C(x, \alpha') + C(y, \alpha) + C(x + \alpha', y + \alpha) = 2\tilde{g} + C(\gamma, \gamma'),$$
$$C(x', y', \alpha, \alpha') = C(x', \alpha) + C(y', \alpha') + C(x' + \alpha, y' + \alpha') = 2\tilde{g} + C(\gamma, \gamma')$$

по 4^* из разд. 11, где $\gamma = x + \alpha' = x' + \alpha$ и $\gamma' = y + \alpha = y' + \alpha'$, так что $C(x, y, \alpha, \alpha') = C(x', y', \alpha, \alpha')$. С другой стороны, опять по 4^* из разд. 11

$$C(x, y, \alpha, \alpha') = C(x, y) + C(\alpha, \alpha') + C(x + y, \alpha + \alpha'),$$
$$C(x', y', \alpha, \alpha') = C(x', y') + C(\alpha, \alpha') + C(x' + y', \alpha + \alpha'),$$

так что $C(x, y) = C(x', y')$, поскольку $x + y = x' + y'$.

Теперь индуктивный шаг. Пусть $x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1} = y_1 + \ldots + y_n + y_{n+1}$. Сначала рассмотрим случай $x_{n+1} = y_{n+1}$. Тогда $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_n$, значит, $C(x_1, \ldots, x_n) = C(y_1, \ldots, y_n)$ по индуктивному предположению. С другой стороны, по определению

$$C(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}) = C(x_1, \ldots, x_n) + C(x_1 + \ldots + x_n, x_{n+1})$$

и то же для $C(y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})$, что и требовалось.

Рассматриваем общий случай. Пусть x_1 и y_1 — наименьшие, а x_{n+1} и y_{n+1} — наибольшие среди чисел соответственно x_i, y_i. Пусть, к примеру, $x_1 < y_1$. Возьмем любое $\{x_1, y_1, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}\}$-генерическое число $\varepsilon > 0$, удовлетворяющее $\varepsilon < y_1 - x_1$ и такое, что $y_{n+1} + \delta$ все еще принадлежит I, где $\delta = y_1 - x_1 - \varepsilon$. Определим x'_i и y'_i так, что

$$x'_1 = x_1 + \varepsilon, \qquad x'_{n+1} = x_{n+1} - \varepsilon, \qquad y'_1 = y_1 - \delta, \qquad y'_{n+1} = y_{n+1} + \delta$$

(эти числа генерические по выбору ε), оставив $x'_k = x_k$ и $y'_k = y_k$ при $2 \leq k \leq n$. Тогда $x_2 = x'_2$ и $y'_2 = y_2$, как в частном случае, откуда

$$C(x_1, \ldots, x_{n+1}) = C(x'_1, \ldots, x'_{n+1}) \qquad \text{и} \qquad C(y_1, \ldots, y_{n+1}) = C(y'_1, \ldots, y'_{n+1}).$$

Аналогично $C(y'_1, \ldots, y'_{n+1}) = C(x'_1, \ldots, x'_{n+1})$, поскольку $y'_1 = x'_1$. □

Если $k \in G$ и $m \in \omega$, то пусть $m \cdot k = \underbrace{k + \ldots + k}_{m \text{ слагаемых}}$ в группе G.

Лемма 53. *Предположим, что* $1 \le m < n$, $1 \le m' < n'$, *генерические числа* $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m \in I$ *и* $x'_1, \ldots, x'_{n'}, y'_1, \ldots, y'_{m'} \in I$ *удовлетворяют*

$$x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_m = s \qquad \text{и} \qquad x'_1 + \ldots + x'_{n'} = y'_1 + \ldots + y'_{m'} = s'.$$

Тогда

$$(n' - m') \cdot (C(x_1, \ldots, x_n) - C(y_1, \ldots, y_m)) = (n - m) \cdot (C(x'_1, \ldots, x'_{n'}) - C(y'_1, \ldots, y'_{m'})) .$$

Доказательство. Если z — строка из чисел (возможно, всего с одним числом), то $z^{[m]}$ будет обозначать последовательную запись m копий z, скажем, $\langle x, y\rangle^{[2]} = \langle x, y, x, y\rangle$. Пусть $\mathbf{x} = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$. Определим $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$ аналогично. Тогда по лемме 52 $C(\mathbf{x}^{[n'-m']}, \mathbf{y}'^{[n-m]}) = C(\mathbf{x}'^{[n-m]}, \mathbf{y}^{[n'-m']})$. (Строки, к которым применяется C, имеют каждая $nn' - mm'$ членов и сумму, равную $(n'-m')s + (n-m)s'$.) Согласно 4^* из разд. 11 левая и правая части последнего равенства равны соответственно

$$C(\mathbf{x}^{[n'-m']}) + C(\mathbf{y}'^{[n-m]}) + C\left((n'-m')s, (n-m)s'\right),$$
$$C(\mathbf{x}'^{[n-m]}) + C(\mathbf{y}^{[n'-m']}) + C\left((n-m)s', (n'-m')s\right),$$

так что мы имеем

$$C(\mathbf{x}^{[n'-m']}) + C(\mathbf{y}'^{[n-m]}) = C(\mathbf{x}'^{[n-m]}) + C(\mathbf{y}^{[n'-m']}). \tag{$*$}$$

Индукцией по l с использованием 4^* из разд. 11 мы находим, что для любого l $C(\mathbf{x}^{[l]}) = l \cdot C(\mathbf{x}) + C(s^{[l]})$ и $C(\mathbf{y}^{[l]}) = l \cdot C(\mathbf{y}) + C(s^{[l]})$, тем самым

$$C(\mathbf{x}^{[n'-m']}) - C(\mathbf{y}^{[n'-m']}) = (n'-m') \cdot (C(\mathbf{x}) - C(\mathbf{y})).$$

Аналогично $C(\mathbf{x}'^{[n-m]}) - C(\mathbf{y}'^{[n-m]}) = (n-m) \cdot (C(\mathbf{x}') - C(\mathbf{y}'))$. Мы заключаем по $(*)$, что $(n'-m') \cdot (C(\mathbf{x}) - C(\mathbf{y})) = (n-m) \cdot (C(\mathbf{x}') - C(\mathbf{y}'))$, что и требовалось. $\square$

Возвращаемся к доказательству теоремы 49. Нужно доказать, что C является борелевской когранцей, т.е. $C = C_h = h(x) + h(y) - h(x+y)$ для подходящего борелевского "сдвига" $h\colon \mathbb{R} \to G$. Отображение h будет суперпозицией трех более элементарных отображений.

Существуют достаточно большое натуральное p и генерические числа $x, y \in I$ такие, что $py = (p+1)x$. Элемент $\bar{g} = C(x^{[p+1]}) - C(y^{[p]}) \in G$ (значит, $\in \mathfrak{M}$) удовлетворяет $C(x_1, \ldots, x_n) - C(y_1, \ldots, y_m) = (n-m) \cdot \bar{g}$ по лемме 53 всякий раз, когда $1 \le m \le n$ и числа $x_i, y_j \in I$ являются генерическими и удовлетворяют $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_m$.

1-й шаг. Пусть $h_1(x) = -\bar{g}$ и $C_1(x,y) = C(x,y) + C_{h_1}(x,y) = C(x,y) - \bar{g}$. Коль скоро разница между C и C_1 является борелевской когранцей C_{h_1}, для доказательства теоремы 49 достаточно доказать, что $C_1(x,y)$ — также борелевская когранца, т.е. $C_1 = C_h$ для некоторой борелевской функции $h\colon \mathbb{R}^2 \to G$.

Следствие 54. *Если генерические числа* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m \in I$ *удовлетворяют* $x_1 + \ldots + x_n = y_1 + \ldots + y_m$, *то* $C_1(x_1, \ldots, x_n) = C_1(y_1, \ldots, y_m)$.

Доказательство. Мы имеем $C_{h_1}(z_1, \ldots, z_r) = -(r-1) \cdot \bar{g}$, поэтому

$$C_1(x_1, \ldots, x_n) - C_1(y_1, \ldots, y_m) = C(x_1, \ldots, x_n) - C(y_1, \ldots, y_m) - (n-m) \cdot \bar{g} = 0.$$

(Мы предполагали, что $m \le n$.) $\square$

Наш рациональный интервал $I = (a, b)$ лежит, напомним, справа от 0. Положим $nI = (na, nb)$. Найдется число $M > b$ такое, что $[M, +\infty) \subseteq \bigcup_n nI$. Пусть $x \geq M$. Тогда $x = x_1 + \ldots + x_n$ для подходящего конечного набора генерических чисел $x_1, \ldots, x_n \in I$. Положим $F(x) = C_1(x_1, \ldots, x_n)$ — и это зависит только от x, но не от выбора $x_1, \ldots, x_n$ согласно следствию 54. График этой функции F есть, очевидно, аналитическое множество, следовательно, $F\colon [M, +\infty) \to G$ есть борелевская функция.

2-*й шаг.* Положим $h_2(x) = F(x)$ для $x \geq M$ и $h_2(x) = 0$ для $x < M$. В частности, $h_2(x) = 0$ для $x \in I$. Снова для доказательства теоремы 49 достаточно показать, что $C_2(x, y) = C_1(x, y) + C_{h_2}(x, y)$ есть борелевская кограница. Заметим, что по определению $C_2(x_1, \ldots, x_n) = 0$, каковы бы ни были генерические $x_1, \ldots, x_n \in I$ такие, что $x_1 + \ldots + x_n \geq M$.

Лемма 55. $C_2(x, y) = 0$ *для всех* $x, y \geq M$.

Доказательство. Пусть $x = x_1 + \ldots + x_n$ и $y = y_1 + \ldots + y_k$, где $x_i, y_j \in I$ являются генерическими. Согласно 4* из разд. 11 мы имеем

$$C_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = C_2(x_1, \ldots, x_n) + C_2(y_1, \ldots, y_k) + C_2(x, y).$$

Но $C_2(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_k) = C_2(x_1, \ldots, x_n) = C_2(y_1, \ldots, y_k) = 0$ (см. выше). $\square$

3-*й шаг.* Положим $h_3(x) = C_2(x, M_x)$, где $M_x = \max\{M, M - x\}$, так что

$$C_{h_3}(x, y) = C_2(x, M_x) + C_2(y, M_y) - C_2(x + y, M_{x+y}). \tag{$\star$}$$

Лемма 56. $C_2(x, y) = C_{h_3}(x, y)$ *для всех* x, y.

Доказательство. Мы имеем $C_2(x, y) = C_2(x, z) + C_2(x + z, y) - C_3(x + y, z)$ для любого z, так что разность $C_2(x, y) - C_{h_3}(x, y)$ преобразуется с использованием ($\star$) к выражению

$$C_2(x, z) + C_2(x + z, y) - C_2(x + y, z) - C_2(x, M_x) - C_2(y, M_y) + C_2(x + y, M_{x+y}).$$

Полагаем $z = \max\{M_x, M_{x+y}, M_y - x\}$. Тогда, в частности,

$$C_2(x, z) - C_2(x, M_x) = C_2(x + z, M_x) - C_2(x + M_x, z) = 0$$

по лемме 55. Каждая из остальных двух пар дает 0 аналогично. $\square$

Чтобы закончить доказательство теоремы 49, заметим, что функция h_2 борелевская, поскольку таковой является функция F (см. выше), так что функция $h_3\colon \mathbb{R} \to G$ тоже борелевская. Следовательно, C_2 является борелевской когранinfицей по лемме 56, что и требовалось. Теорема 49 доказана. $\square$

Благодарности. Авторы благодарят Б. Величковича, Р.И. Григорчука, А.С. Кекриса, П. Кёпке, В. Люксембурга, С. Тодорчевича, И. Фараха за интересное обсуждение и/или ценные замечания. Первый автор благодарит за поддержку и гостеприимство университеты г. Бонна и Вупперталя, Калтех и MFO-Обервольфах, во время визитов в которые в 1999 г. была выполнена его часть работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алексеев М.А., Глебский Л.Ю., Гордон Е.И.* Об аппроксимациях групп, групповых действий и алгебр Хопфа: Препринт 491. Нижний Новгород: Институт прикладной физики РАН, 1999.
2. *Baker D.* Differential characters and Borel cohomology // Topology. 1977. V. 16, N 4. P. 441–449.

3. *Becker H., Kechris A.S.* The descriptive set theory of Polish group actions. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1996.
4. *Cartan H., Eilenberg S.* Homological algebra. Princeton (N.J.): Princeton Univ. Press, 1956.
5. *Cattaneo U.* On locally continuous cocycles // Rept. Math. Phys. 1977. V. 12, N 1. P. 125–132.
6. *Christensen J.P.R.* Some results with relation to the control measure problem // Vector measures and applications. N.Y. etc.: Springer, 1978. P. 125–158. (Lect. Notes Math.; V. 644).
7. *Christensen J.P.R., Kanovei V., Reeken M.* On Borel orderable groups // Top. and Appl. To appear.
8. *Connes A.* Noncommutative geometry. San Diego (CA): Acad. Press, 1994.
9. *De Bruijn N.G.* On almost additive functions // Colloq. Math. 1966. V. 40, N 1. P. 59–63.
10. *DuPre,* III, *A.M.* Real Borel cohomology of locally compact groups // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 134. P. 239–260.
11. *Downarowicz T., Iwanik A.* Quasi-uniform convergence in compact dynamical systems // Stud. math. 1998. V. 89. P. 11–25.
12. *Farah I.* Completely additive liftings // Bull. Symb. Logic. 1998. V. 4. P. 37–54.
13. *Farah I.* Liftings of homomorphisms between quotient structures and finite combinatorics // Logic colloquium 98 / Eds. S. Buss et al. Urbana (Ill.): ASL, 2000. (Lect. Notes Logic; V. 13).
14. *Farah I.* Analytic quotients // Mem. Amer. Math. Soc. 2000. V. 148, N 702.
15. *Farah I.* Approximate homomorphisms // Combinatorica. 1998. V. 18, N 3. P. 335–348.
16. *Farah I.* Approximate homomorphisms. II: Group homomorphisms // Combinatorica. 2000. V. 20, N 1. P. 37–60.
17. *Grigorchuk R.I.* Some results on bounded cohomology // Combinatorial and geometric group theory. Cambrigde: Cambrigde Univ. Press, 1994. P. 111–163. (LMS Lect. Note Ser.; V. 204).
18. *Grove K., Karcher H., Ruh E.A.* Jakobi fields and Finsler metrics on compact Lie groups with an application to differentiable pinching problems // Math. Ann. 1974. Bd. 211. S. 7–21.
19. *Hjorth G., Kechris A.S.* New dichotomies for Borel equivalence relations // Bull. Symb. Logic. 1997. V. 3. P. 329–346.
20. *Hyers D.H.* On the stability of the linear functional equation // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1941. V. 27. P. 222–224.
21. *Ionescu Tulcea A., Ionescu Tulcea C.* Topics in the theory of lifting. Berlin: Springer-Verl., 1969. (Ergeb. Math. und Grenzgeb.; Bd. 48).
22. *Kalton N.J., Roberts J.W.* Uniformly exhaustive submeasures and nearly additive set functions // Trans. Amer. Math. Soc. 1983. V. 278. P. 803–816.
23. *Kanovei V., Reeken M.* On Borel automorphisms of the reals modulo a countable group // Math. Log. Quart. 2000. V. 46, N 3. P. 377–384.
24. *Kanovei V., Reeken M.* On Ulam stability of the real line // Unsolved problems in mathematics for the 21th Century: A tribute to Kioshi Iseki's 80th birthday. Amsterdam: IOS Press. To appear.
25. *Kazhdan D.* On ε-representations // Israel J. Math. 1982. V. 43, N 4. P. 315–323.
26. *Kechris A.S.* Classical descriptive set theory. N.Y. etc.: Springer, 1995. (Grad. Texts Math.; V. 156).
27. *Kechris A.S.* Rigidity properties of Borel ideals on the integers // Top. and Appl. 1998. V. 85. P. 195–205.
28. *Kechris A.S.* New directions in descriptive set theory // Bull. Symb. Logic. 1999. V. 5, N 2. P. 161–174.
29. *Moore C.C.* Extensions and low dimensional cohomology theory of locally compact groups. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 113. P. 40–63, 64–86.
30. *Serre J.P.* Algebraic groups and class fields. N.Y. etc.: Springer, 1988. (Grad. Texts Math.; V. 117).
31. *Shtern A.I.* Almost representations and quasi-symmetry // Math. Appl. 1998. V. 433. P. 337–358.
32. *Штерн А.И.* Жесткость и аппроксимация квазипредставлений аменабельных групп // Мат. заметки. 1999. Т. 65, №6. С. 908–920.
33. *Solecki S.* Analytic ideals // Bull. Symb. Logic. 1996. V. 2. P. 339–348.
34. *Solecki S.* Filters and sequences // Fund. math. 2000. V. 163, N 3. P. 215–228.
35. *Todorcevic S.* Gaps in analytic quotients // Fund. math. 1998. V. 156, N 1. P. 85–97.
36. *Ulam S.M.* Problems in modern mathematics. N.Y.: J. Wiley & Sons, 1964.
37. *Ulam S.M., Mauldin D.* Mathematical problems and games // Adv. Appl. Math. 1987. V. 8. P. 281–344.
38. *Velickovic B.* Definable automorphisms of $\mathcal{P}(\omega)/\operatorname{Fin}$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1986. V. 96. P. 130–135.
39. *Wolfram S.* Theory and application of cellular automata. Singapore: World Sci., 1986.