ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2004, т. 247, с. 95–128

УДК 510.225

О множестве конструктивных вещественных чисел[1]

©2004 г. В. Г. Кановей[2], В. А. Любецкий[3]

Поступило в сентябре 2003 г.

Излагаются с полными доказательствами наиболее значительные результаты о множестве конструктивных по Гёделю вещественных чисел.

ВВЕДЕНИЕ

Класс **L** всех конструктивных множеств был введен Гёделем в [4]; им же было установлено, что в **L** выполнены все аксиомы теории **ZFC** (с аксиомой выбора), а также обобщенная континуум-гипотеза. Для решения вопроса о континуум-гипотезе $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ Гёдель показал, что множества $\mathbb{R} \cap \mathbf{L}$ и $\omega_1^{\mathbf{L}}$ равномощны в **L**. Более глубокое исследование конструктивного универсума **L**, в частности множества $\mathbb{R} \cap \mathbf{L}$ всех конструктивных действительных чисел, было предпринято П.С. Новиковым в [22], где было показано, что множество $\mathbb{R} \cap \mathbf{L}$ является множеством проективного класса A_2 ($\varSigma^1_2$ в современной системе обозначений) и содержит проективные подмножества (причем наименьших возможных классов), которые не обладают (в **L**) такими свойствами регулярности, как измеримость по Лебегу, свойство Бэра, свойство совершенного ядра[4].

Эти основополагающие исследования оставили, однако, открытыми следующие вопросы: *каковы свойства регулярности самого множества* $\mathbb{R} \cap \mathbf{L}$? *Каков в точности проективный класс этого множества, в частности, может ли оно быть класса ниже чем* $\varSigma^1_2$?

Серьезное изучение этих вопросов стало возможным только после открытия Коэном [2] форсинга (метода вынуждения), который позволил строить модели аксиом **ZFC**, отличные от конструктивной модели **L**, — такие модели принято называть *генерическими моделями.* Соединяя результаты, полученные при помощи генерических моделей, с теми, которые были получены в результате исследования класса **L**, специалисты по теории множеств доказали *неразрешимость* многих классических проблем дескриптивной теории множеств (см. об этом, например, в [11, 12, 28]). В ходе этих работ, начавшихся еще в 60-е годы, были выделены *классы* генерических моделей, в частности коэновские, случайные, саксовские и иные модели теории множеств (см. в этой связи книгу [1]). Генерические модели, в частности только что упомянутые, помогли доказать непротиворечивость многих предложений и комбинаций предложений, обсуждавшихся, но не решенных в классической теории множеств. Сюда относятся и сформулированные вопросы о свойствах множества $\mathbb{R} \cap \mathbf{L}$, которым главным образом посвящена эта работа.

---

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке первого автора Российским фондом фундаментальных исследований (проект 03-01-00757), второго автора Министерством промышленности, науки и технологий РФ (проект 37-053-11-0061).

[2] Институт проблем передачи информации, Москва, Россия.
E-mail: kanovei@mccme.ru

[3] Институт проблем передачи информации, Москва, Россия.
E-mail: lyubetsk@ippi.ru

[4] Множество X топологического пространства $\mathcal{X}$ имеет *свойство Бэра*, если найдется такое открытое множество $U \subseteq \mathcal{X}$, что симметрическая разность $X \,\Delta\, U$ есть *тощее* множество (т.е. множество 1-й категории). Множество X имеет *свойство совершенного ядра*, если либо X не более чем счетно, либо X содержит совершенное подмножество (т.е. непустое, замкнутое, не имеющее изолированных точек).

Таблица 1. Общие свойства множества $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$

№	Условие	Свойство множества $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$
1	$\mathfrak{M} = \mathbf{L}$	$\mathbb{R} \cap \mathbf{L}$ принадлежит Σ^1_2
2	$\omega_1 \subseteq \mathfrak{M}$	$\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ не принадлежит $\Pi^1_2(\mathfrak{M})$ [5]
3	$\mathbb{R} \not\subseteq \mathfrak{M}$	$\mathbb{R} \setminus \mathfrak{M}$ содержит совершенное ядро
4	$\mathbb{R} \not\subseteq \mathfrak{M}$ и (*) каждое счетное $X \subseteq \mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ накрывается $\mathfrak{M}$-счетным $Y \in \mathfrak{M}$, $Y \subseteq \mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$	$\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ не содержит совершенного ядра
5	$\mathbb{R} \not\subseteq \mathfrak{M}$ и $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ несчетно	$\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ не принадлежит $\mathbf{\Sigma}^1_1$
6	$\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ неизмеримо	$\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathfrak{M}$ имеют нижнюю меру 0
7	$\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ не имеет свойства Бэра	$\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ и $\mathbb{R} \setminus \mathfrak{M}$ не содержат нетощих борелевских подмножеств

Таблица 2. Свойства множества $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ в разных расширениях $\mathfrak{M}$

№	Тип расширения модели $\mathfrak{M}$	Измеримость по Лебегу	Свойство Бэра	Класс	Класс при условии $\mathfrak{M} = \mathbf{L}$
8	Коэновское (1) [6]	Мера 0	Нет	Не $\mathbf{\Sigma}^1_1 \cup \mathbf{\Pi}^1_1$	$\Sigma^1_2 \cap \mathbf{\Pi}^1_2$
9	Коэновское ($\geq \aleph_1$) [7]	Мера 0	Нет	Не $\mathbf{\Pi}^1_2$	Σ^1_2
10	Случайное (1)	Нет	Тощее	Не $\mathbf{\Sigma}^1_1 \cup \mathbf{\Pi}^1_1$	$\Sigma^1_2 \cap \mathbf{\Pi}^1_2$
11	Случайное ($\geq \aleph_1$)	Нет	Тощее	Не $\mathbf{\Pi}^1_2$	Σ^1_2
12	Саксовское (1)	Нет	Нет	Не $\mathbf{\Sigma}^1_1 \cup \mathbf{\Pi}^1_1$	$\Sigma^1_2 \cap \mathbf{\Pi}^1_2$
13	Саксовское ($\geq \aleph_1$)	Нет	Нет	Не $\mathbf{\Pi}^1_2$	Σ^1_2
14	$\mathbf{MA} + \neg\mathbf{CH}$ [8]	Мера 0	Тощее		$\Sigma^1_2 \cap \mathbf{\Pi}^1_1$ [9]

Сводка представленных в настоящей работе результатов по свойствам множества $\mathbb{R} \cap \mathbf{L}$ или, более общо, свойствам множеств вида $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель **ZFC**, приведена в табл. 1 и 2. В табл. 1 представлены общие свойства множества $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ в универсуме всех множеств; оказывается, что эти свойства в сущности не зависят от выбора транзитивной модели $\mathfrak{M}$. Таблица 2 приводит некоторые более специальные свойства $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ в типичных генерических расширениях произвольной, но фиксированной транзитивной модели $\mathfrak{M}$. Номера в левых колонках таблиц будут использованы ниже для идентификации результатов из соответствующих строк.

[5] $\Pi^1_2(\mathfrak{M})$ обозначает множества, определимые Π^1_2-формулами с параметрами из $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$.

[6] (1) в скобках (в строках 8, 10, 12) означает, что рассматривается расширение модели $\mathfrak{M}$ вида $\mathfrak{M}[a]$, где a — соответственно коэновское, случайное или саксовское над $\mathfrak{M}$ вещественное число.

[7] ($\geq \aleph_1$) в скобках (в строках 9, 11, 13) означает, что рассматривается расширение модели $\mathfrak{M}$ посредством $\mathfrak{M}$-несчетного количества соответственно коэновских, случайных или саксовских над $\mathfrak{M}$ вещественных чисел. Для саксовских чисел речь идет о произведении несчетного числа копий форсинга Сакса со счетной поддержкой, а *не* об итерированных саксовских расширениях.

[8] Аксиома Мартина плюс отрицание континуум-гипотезы.

[9] Этот результат [20] состоит в том, что в предположении $\mathbf{MA} + \neg\mathbf{CH}$ если $\omega_1 = \omega_1^{\mathbf{L}[a]}$ для некоторого $a \in \mathbb{R}$, то *любое* множество $X \subseteq \mathbb{R}$ мощности $\leq \aleph_1$ принадлежит $\mathbf{\Pi}^1_1$ (см. п. 4в ниже).

Комментарии. 1. Теорема о том, что $\mathbb{R} \cap \mathbf{L}$ является Σ^1_2-множеством, обычно ассоциируется с работами Гёделя или Аддисона, но на самом деле первое действительно полное изложение соответствующих методов было дано П.С. Новиковым [22].

2. О том что $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M} \notin \Pi^1_2(\mathfrak{M})$, см. лемму 1.9(iv).

3. См. об этом лемму 1.9(iv).

4. Этот (весьма сложный) результат получен в [5]; слегка упрощенное и адаптированное доказательство приведено ниже в п. 1д. Отметим, что в самом общем случае, т.е. без посылки $(*)$ о накрытии счетных подмножеств $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$, отрицательный ответ невозможен: как показано в [29], в некоторых случаях $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ все же может содержать совершенное подмножество, не совпадая с $\mathcal{N}$. В то же время в [29] установлено, что в любом случае если $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M} \subsetneqq \mathcal{N}$, то $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ не имеет *суперсовершенных* подмножеств (т.е. совершенных и не-σ-компактных). Условие накрытия $(*)$ выполнено, например, когда (а) в $\mathfrak{M}$ верна континуум-гипотеза (сюда относится и наиболее интересный специальный случай $\mathfrak{M} = \mathbf{L}$) или (б) универсум является генерическим расширением $\mathfrak{M}$ при помощи форсинга, удовлетворяющего условию счетности антицепей (УСА) в $\mathfrak{M}$. С другой стороны, условие $(*)$ не является необходимым для заключения: например, если $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ счетно в универсуме, то по очевидным соображениям $(*)$ ложно, но $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ не может иметь совершенных подмножеств. Заметим, что в случае, когда $\mathfrak{M} = \mathbf{L}$, уже несчетности $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ достаточно для существования несчетного $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества без совершенного ядра [3, 14].

Условие $\mathbb{R} \not\subseteq \mathfrak{M}$ снимает тривиальный контрпример: если $\mathbb{R} \subseteq \mathfrak{M}$, то само $\mathbb{R} = \mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ — совершенное множество.

5. Результат (также довольно сложный) доказан в [29]. Искомый факт немедленно следует из результата 4, если только последний применим (например, в случае $\mathfrak{M} = \mathbf{L}$), поскольку несчетное $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество всегда содержит совершенное подмножество. Однако независимое доказательство [29] не нуждается в условии накрытия.

6 и 7. Простой вывод этих утверждений см. в доказательстве леммы 1.9(i), (ii). Результат для меры указан, например, в [16, с. 24] и [17].

8, 10, 12. *Измеримость и свойство Бэра.* Результаты об измеримости и свойстве Бэра множества $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ в указанных генерических расширениях были получены в конце 60-х годов: обзор [21] ссылается на Прикры, Соловея и Кюнена (впрочем в опубликованных работах этих авторов тех лет указанных результатов нет). Независимо эти результаты были получены Кановеем в 1970 г. (опубликовано без доказательства в [9]). Другие ранние ссылки см. в [8, § 44].

9, 11, 13. *Измеримость и свойство Бэра.* Эти результаты являются в определенном смысле следствиями тех, которые получены для расширений одним числом. В особенности это касается коэновских и случайных расширений, где прямая редукция обеспечивается тем, что в таком расширении каждое вещественное число принадлежит расширению $\mathfrak{M}$ всего одним коэновским или случайным числом.

14. Как показано в [20], **MA** влечет следующее: каждое множество $X \subseteq \mathbb{R}$ мощности $< \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ имеет меру 0, является тощим и принадлежит $\mathbf{\Pi}^1_1$. Любецкий [18] построил модель, в которой достигается аналогичный эффект путем итерации некоторых специальных УСА-форсингов.

8–14. *Исследование класса множества $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ в расширениях $\mathfrak{M}$.* Здесь наиболее интересным является то, что $\mathbb{R} \cap \mathbf{L}$ имеет класс $\mathbf{\Pi}^1_2$, следовательно $\mathbf{\Delta}^1_2$, в генерических расширениях $\mathbf{L}$ одним коэновским или случайным числом. (Для саксовских чисел результат элементарен и упомянут в [21].) Соединяя вместе все приведенные результаты о классе множества $\mathbb{R} \cap \mathbf{L}$ в различных расширениях $\mathbf{L}$, мы видим, что имеется всего пять (взаимоисключающих) возможностей:

(1) $\mathbb{R}\cap\mathbf{L}$ есть множество "строго" класса Σ^1_2, т.е. Σ^1_2, но не $\mathbf{\Pi}^1_2$, — например, это имеет место в расширении конструктивного универсума $\mathbf{L}$ посредством $\mathbf{L}$-несчетного множества коэновских чисел;

(2) $\mathbb{R}\cap\mathbf{L}$ есть множество "строго" класса $\mathbf{\Delta}^1_2$, точнее $\Sigma^1_2\cap\mathbf{\Pi}^1_2$,[10] но не $\mathbf{\Sigma}^1_1\cup\mathbf{\Pi}^1_1$, — например, в расширении $\mathbf{L}$ посредством одного коэновского числа;

(3) $\mathbb{R}\cap\mathbf{L}$ есть множество "строго" класса $\mathbf{\Pi}^1_1$, т.е. $\mathbf{\Pi}^1_1$, но не $\mathbf{\Sigma}^1_1$, — выполнено, например, в любой модели для аксиомы Мартина **MA** плюс $\neg$**CH**;

(4) $\mathbb{R}\cap\mathbf{L}$ есть счетное множество, в частности $\mathbf{\Sigma}^0_2$ (но не $\Pi^1_2(\mathbf{L})$), — выполнено в любом генерическом расширении $\mathbf{L}$, "свертывающем" $\aleph_1^{\mathbf{L}}$ (т.е. делающем этот $\mathbf{L}$-кардинал счетным ординалом);

(5) $\mathbb{R}\cap\mathbf{L}=\mathbb{R}$ — выполнено в самом универсуме $\mathbf{L}$.

Подобная схема была впервые дана в явном виде Любецким [16].

Содержанием предлагаемой работы является систематизированное изложение доказательств всех результатов, приведенных в табл. 1 и 2, за исключением результатов в строках 4 и 5, которые, впрочем, доказываются для наиболее интересного случая $\mathfrak{M}=\mathbf{L}$. Статья является продолжением нашей работы [12] в "Успехах математических наук", и поэтому доказательства некоторых вспомогательных результатов здесь не приводятся, если можно дать ссылку на [12].

О структуре статьи. Раздел 1 вместе с материалом вводного характера относительно бэровского пространства, борелевских множеств и т.п. содержит доказательства результатов из табл. 1. В разд. 2 доказываются те результаты табл. 2, которые связаны с коэновскими и случайными расширениями исходной модели. Раздел 3 посвящен саксовским расширениям, а раздел 4 — аксиоме Мартина.

1. НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ

В этом разделе после напоминания ряда общих определений в п. 1а мы перейдем к более специальному материалу, касающемуся кодировки борелевских множеств и гёделева конструктивного построения в п. 1б, взаимоотношениям борелевских множеств в универсуме и борелевских множеств в некоторой транзитивной модели $\mathfrak{M}$ теории **ZFC** в п. 1в. После этого в п. 1г и п. 1д излагаются доказательства результатов, связанных с табл. 1 введения.

1а. Бэровское пространство. Через $\mathcal{N}=\mathbb{N}^\omega$ обозначается *бэровское пространство* с обычной топологией произведения. $\mathbb{N}^{<\omega}$ есть множество всех конечных последовательностей натуральных чисел. *Бэровские интервалы*, образующие базу топологии $\mathcal{N}$, определяются равенствами $\mathcal{N}_s=\{x\in\mathcal{N}\colon s\subset x\}$, $s\in\mathbb{N}^{<\omega}$. В частности, $\mathcal{N}_\Lambda=\mathcal{N}$ для пустой последовательности Λ. *Длина* $s\in\mathbb{N}^{<\omega}$ обозначается через $\mathtt{lh}\,s$; $\mathtt{lh}\,\Lambda=0$. Полагаем $(c)_n(k)=c(2^n(2k+1)-1)$ для $c\in\mathcal{N}$ и $n,k\in\mathbb{N}$; таким образом, $(c)_n\in\mathcal{N}$. Вообще $(c)_s=(\ldots((c)_{s(0)})_{s(1)}\ldots)_{s(\mathtt{lh}\,s-1)}$ для $c\in\mathcal{N}$ и $s\in\mathbb{N}^{<\omega}$.

В современной дескриптивной теории множеств именно бэровское пространство, а не вещественная прямая $\mathbb{R}$ обычно рассматривается как основная область. На это имеется ряд причин, прежде всего бóльшая логическая простота структуры $\mathcal{N}$ по сравнению с $\mathbb{R}$, а также некоторые топологические свойства, в частности нульмерность. В то же время наличие простого и явно определенного гомеоморфизма между $\mathcal{N}$ и иррациональными точками $\mathbb{R}$ делает $\mathcal{N}$ и вещественную прямую практически тождественными по отношению к типичным вопросам дескриптивной теории множеств. Эту пару отождествляемых пространств удобно несколько

[10] Простое рассуждение, основанное на теореме абсолютности 1.4, показывает, что если $\mathbb{R}\cap\mathbf{L}$ принадлежит Π^1_2, то $\mathbb{R}\cap\mathbf{L}=\mathbb{R}$. Таким образом, $\mathbb{R}\cap\mathbf{L}$ не может быть строго Δ^1_2.

неформально называть *вещественной прямой*[11]. Подробнее о взаимоотношениях $\mathcal{N}$, $\mathbb{R}$ и других польских (полных сепарабельных метрических) пространств см. [12, § 1].

Топология *канторова дисконтинуума* $\mathcal{C} = 2^\omega \subseteq \mathcal{N}$ порождается *канторовыми интервалами*, т.е. множествами вида $\mathcal{C}_s = \{x \in \mathcal{C} : s \subset x\}$, $s \in 2^{<\omega}$, где $2^{<\omega}$ — множество всех конечных последовательностей чисел 0 и 1. *Лебегова мера* $\boldsymbol{\lambda}$ на $\mathcal{C}$ определяется условием $\boldsymbol{\lambda}(\mathcal{C}_s) = 2^{-\,\mathtt{lh}\,s}$ для всех $s \in \mathcal{N}$. Отображение $a \mapsto \sum_{k=0}^\infty a(k) \cdot 2^{-k-1}$ переводит $\boldsymbol{\lambda}$ в обычную лебегову меру на $[0,1]$. Положим $\boldsymbol{\lambda}(X) = \boldsymbol{\lambda}(X \cap \mathcal{C})$ для $X \subseteq \mathcal{N}$; этим $\boldsymbol{\lambda}$ распространяется на $\mathcal{N}$, так что $\boldsymbol{\lambda}(\mathcal{N} \setminus \mathcal{C}) = 0$.

Множество $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ называется *деревом*, если мы имеем $t^\wedge n \in T \;\Rightarrow\; t \in T$ и $t \in T \;\Rightarrow\; \exists\, n\, (t^\wedge n \in T)$. В этом случае определяется $[T] = \{x \in \mathcal{N} : \forall\, n\, (x \restriction n \in T)\}$ — замкнутое подмножество $\mathcal{N}$. Если $T \subseteq 2^{<\omega}$, то $[T] \subseteq 2^\omega$.

1б. Кодировка борелевских множеств и функций. Семейство $\mathtt{Borel}(\mathcal{N})$ всех борелевских подмножеств $\mathcal{N}$ имеет мощность континуума $\mathfrak{c}$, а потому может быть заиндексировано точками $\mathcal{N}$. Более того, имеется вполне определенное Π^1_1-множество $\mathbf{BC} \subseteq \mathcal{N}$, элементы которого называются *борелевскими кодами*, а каждому $c \in \mathbf{BC}$ вполне определенным образом сопоставлено борелевское множество $\boldsymbol{B}_c \subseteq \mathcal{N}$, так что $\mathtt{Borel}(\mathcal{N}) = \{\boldsymbol{B}_c : c \in \mathbf{BC}\}$. Именно[12] фиксируем раз и навсегда рекурсивное перечисление $\mathbb{N}^{<\omega} = \{s_k : k \in \mathbb{N}\}$ без повторений. Положим $\mathbf{BC}_0 = \{\boldsymbol{k} : k \in \mathbb{N}\}$, где $\boldsymbol{k} \in \mathcal{N}$ есть функция-константа ($\boldsymbol{k}(i) = k\ \forall\, i$). Для $\boldsymbol{k} \in \mathbf{BC}_0$ определим $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}} = \mathcal{N}_{s_{k-1}}$ при $k \ge 1$ и $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}} = \varnothing$ при $k = 0$. Если $\xi > 0$, то $\mathbf{BC}_\xi$ есть совокупность всех $c \in \mathcal{N} \setminus \bigcup_{\eta<\xi} \mathbf{BC}_\eta$ таких, что $\{(c)_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \bigcup_{\eta<\xi} \mathbf{BC}_\eta$; полагаем $\boldsymbol{B}_c = \mathcal{N} \setminus \bigcup_n \boldsymbol{B}_{(c)_n}$ для всякого такого c. Наконец, $\mathbf{BC} = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathbf{BC}_\xi$. Если $X = \boldsymbol{B}_c$, то c называется *кодом* X.

Предложение 1.1 (см. [12, п. 1д]). *Имеются вполне определенные формулы* $\beta(\cdot)$, $\sigma(\cdot,\cdot)$, $\pi(\cdot,\cdot)$, $\varphi_{\mathtt{cat}}(\cdot,\cdot)$, $\psi_{\mathtt{cat}}(\cdot,\cdot)$, $\varphi_{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\cdot,\cdot,\cdot)$ *типов соответственно* Π^1_1, Σ^1_1, Π^1_1, Σ^1_1, Π^1_1, Σ^1_1, Π^1_1 *такие, что следующие предложения доказуемы в* **ZFC**:

(i) $\mathbf{BC} = \{c : \beta(c)\}$;

(ii) $\forall\, c \in \mathbf{BC}\ \forall\, x\ \big(x \in \boldsymbol{B}_c \;\Leftrightarrow\; \sigma(c,x) \;\Leftrightarrow\; \pi(c,x)\big)$;

(iii) $\forall\, c \in \mathbf{BC}\ \forall\, m,n \in \mathbb{N}\ \big(\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{B}_c) = \frac{m}{n} \;\Leftrightarrow\; \varphi_{\boldsymbol{\lambda}}(c,m,n) \;\Leftrightarrow\; \psi_{\boldsymbol{\lambda}}(c,m,n)\big)$;

(iv) $\forall\, c \in \mathbf{BC}\ \forall\, k \in \mathbb{N}\ \big(\boldsymbol{B}_c \cap \mathcal{N}_{s_k}$ *тощее* $\Leftrightarrow\; \varphi_{\mathtt{cat}}(c,k) \;\Leftrightarrow\; \psi_{\mathtt{cat}}(c,k)\big)$. □

Если $W \subseteq \mathcal{N}^2$, то положим $W_x = \{y : \langle x,y\rangle \in W\}$ для каждого $x \in \mathcal{N}$.

Следствие 1.2. *Пусть* $W \subseteq \mathcal{N}^2$ *— борелевское множество. Тогда следующие множества также борелевские*[13]:

$$\Big\{\langle x,m,n\rangle : \boldsymbol{\lambda}(W_x) = \frac{m}{n}\Big\} \qquad \text{и} \qquad \{\langle x,k\rangle : W_x \cap \mathcal{N}_{s_k} \text{ — тощее множество}\}.$$

Доказательство. Определим гомеоморфизм $h : \mathcal{N}^2 \xrightarrow{\text{на}} \mathcal{N}$ равенствами $h(x,y)(2n) = x(n)$ и $h(x,y)(2n+1) = y(n)$ для всех n. Зафиксируем борелевский код $c \in \mathbf{BC}$ такой, что $W = h^{-1}(\boldsymbol{B}_c)$. Каждое сечение W_x, $x \in \mathcal{N}$, — борелевское множество, т.е. $W_x = \boldsymbol{B}_{\pi[c,x]}$ для подходящего кода $\pi[c,x] \in \mathbf{BC}$. Чтобы дать явное определение $\pi[c,x]$, положим $k_t = k$ для всякой последовательности $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ такой, что $(c)_t = \boldsymbol{k}$, но $(c)_{t'}$ не является константой ни для какого $t' \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $t' \subset t$. Если при этом $k \ge 1$, то положим $\sigma_t = s_{k_t-1}$, а через σ^0_t и σ^1_t

[11] В англоязычной литературе *the reals*. Разумеется, при этом отождествлении выпадают такие важные атрибуты $\mathbb{R}$, как арифметическая структура или σ-компактность.

[12] Этот вариант конструкции изложен в [12]. О других определениях, обладающих в сущности теми же главными свойствами, см., например, [25, 7.9; 26] или на русском языке [7, гл. 20].

[13] Можно показать, что если W — множество класса $\Delta^1_1(a)$, то этому же классу принадлежат и оба указанных множества (см. [13, разд. 2], где даны и ссылки на оригинальные работы).

обозначим последовательности соответственно всех четных (начиная с 0-го) и всех нечетных членов σ_t, так что $\boldsymbol{B}_{(c)_t} = \mathcal{N}_{\sigma_t}$ и $h\,''\,\boldsymbol{B}_{(c)_t} = \mathcal{N}_{\sigma_t^0} \times \mathcal{N}_{\sigma_t^1}$. Существует (единственное) число $\kappa_t^1 \ge 1$, удовлетворяющее $\sigma_t^1 = s_{\kappa_t^1 - 1}$. Теперь определяем $\pi[c,x]$ для $x \in \mathcal{N}$ как единственный код $p \in \mathbf{BC}$, который удовлетворяет следующему условию: для всякой последовательности $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ если $(c)_t$ — константа, но $(c)_{t'}$ не является константой ни для какого $t' \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $t' \subset t$ (строго), то

(а) при $k_t \ge 1$ и $\sigma_t^0 \subset x$ будет $(p)_t = \boldsymbol{k}$, где $k = \kappa_t^1$;

(б) во всех остальных случаях $(p)_t = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ есть константа 0).

С этим определением, как нетрудно проверить, для каждого $x \in \mathcal{N}$ имеет место равенство $W_x = \boldsymbol{B}_{\pi[c,x]}$. Теперь предложение 1.1(iii) влечет

$$\boldsymbol{\lambda}(W_x) = \frac{m}{n} \;\Leftrightarrow\; \varphi_{\boldsymbol{\lambda}}(\pi[c,x], m, n) \;\Leftrightarrow\; \psi_{\boldsymbol{\lambda}}(\pi[c,x], m, n),$$

откуда и следует результат: рассматриваемое множество принадлежит $\boldsymbol{\Delta}_1^1$, т.е. является борелевским. Второе множество рассматривается аналогично. $\square$

Теперь о кодировке борелевских функций[14] $\vartheta\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$. Обозначим через $\mathbf{BF}$ множество всех точек $f \in \mathcal{N}$ таких, что $((f)_n)_k \in \mathbf{BC}$ для всех n, k и при любом n множества $\boldsymbol{B}_{((f)_n)_k}$, $k \in \mathbb{N}$, попарно дизъюнктны и дают в объединении $\mathcal{N}$. В этом случае определим борелевскую функцию $\boldsymbol{\vartheta}_f\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ условием $\boldsymbol{\vartheta}_f(x)(n) = k$, когда $x \in \boldsymbol{B}_{((f)_n)_k}$. Понятно, что всякая борелевская функция $\vartheta\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ имеет вид $\vartheta = \boldsymbol{\vartheta}_f$ для подходящего $f \in \mathbf{BF}$. Из предложения 1.1(i), (ii) следует

Предложение 1.3. *Существуют формулы $\beta'(\cdot)$, $\sigma'(\cdot,\cdot,\cdot)$, $\pi'(\cdot,\cdot,\cdot)$ типов соответственно Π_1^1, Σ_1^1, Π_1^1 такие, что следующие предложения доказуемы в* $\mathbf{ZFC}$:

(i) $\mathbf{BF} = \{c\colon \beta'(c)\}$;

(ii) $\forall\, f \in \mathbf{BF}\ \forall\, x, y\ \big(\boldsymbol{\vartheta}_f(x) = y \;\Leftrightarrow\; \sigma'(f,x,y) \;\Leftrightarrow\; \pi'(f,x,y)\big)$. $\square$

1в. Борелевские множества в транзитивных моделях ZFC. Зафиксируем в этом пункте транзитивную модель $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZFC}$, т.е. транзитивное множество или класс, удовлетворяющее аксиомам $\mathbf{ZFC}$. Типичный технический прием в дескриптивной теории множеств состоит в том, что рассматривается “одно и то же” борелевское множество в $\mathfrak{M}$ и в универсуме всех множеств. Важно, что “одно и то же” не означает здесь “то же самое множество”, т.е. множество с теми же элементами, но означает “множество с тем же борелевским кодом”. Здесь немедленно возникает следующий вопрос: как связаны между собой свойства “одного и того же” борелевского множества в универсуме и в модели $\mathfrak{M}$? Универсальный ответ, подходящий для целой группы свойств, дается следующей теоремой.

Теорема 1.4 (теорема абсолютности [24]). (i) *Каждая Σ_1^1-формула с параметрами из $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ абсолютна для $\mathfrak{M}$.*[15]

(ii) *Если $\omega_1 \subseteq \mathfrak{M}$, то то же верно для Σ_2^1-формул с параметрами из $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$.* $\square$

Следствие 1.5. *Множества $(\mathbf{BC})^{\mathfrak{M}}$ и $(\mathbf{BF})^{\mathfrak{M}}$* (т.е. $\mathbf{BC}$ и $\mathbf{BF}$, определенные в $\mathfrak{M}$) *совпадают соответственно с $\mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ и $\mathbf{BF} \cap \mathfrak{M}$.*

Если $x \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ и $p, q \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, то любая из следующих формул абсолютна для $\mathfrak{M}$: $x \in \boldsymbol{B}_p$, $\boldsymbol{B}_p \subseteq \boldsymbol{B}_q$, $\boldsymbol{B}_p = \boldsymbol{B}_q$, $\boldsymbol{B}_p$ тощее, $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{B}_p) = 0$. Если $f \in \mathbf{BF} \cap \mathfrak{M}$ и $x, y \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$, то формула $\boldsymbol{\vartheta}_f(x) = y$ абсолютна для $\mathfrak{M}$.

[14] Функция $\vartheta\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ называется борелевской, если ее график — борелевское подмножество $\mathcal{N}^2$ или, что эквивалентно, если прообразы открытых множеств — борелевские множества.

[15] То есть она одновременно истинна или одновременно ложна в $\mathfrak{M}$ и в универсуме.

Доказательство. Используем теорему 1.4; отношения, о которых идет речь, выражаются формулами классов $\varSigma^1_1$ и $\varPi^1_1$ согласно предложениям 1.1 и 1.3. $\square$

Определение 1.6. Если $c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, то через $\boldsymbol{B}^{\mathfrak{M}}_c$ обозначается борелевское множество $\boldsymbol{B}_c$, определенное в $\mathfrak{M}$, т.е. в силу следствия 1.5 $\boldsymbol{B}^{\mathfrak{M}}_c = \boldsymbol{B}_c \cap \mathfrak{M}$.

Пусть $\mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N}) = \{\boldsymbol{B}^{\mathfrak{M}}_c \colon c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}\}$ — совокупность всех борелевских подмножеств $\mathcal{N}$ в $\mathfrak{M}$. Если $X = \boldsymbol{B}^{\mathfrak{M}}_c \in \mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N})$, $c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, то через $X^{\#}$ обозначается множество $\boldsymbol{B}_c$ (определенное в универсуме всех множеств)[16].

Корректность определения $X^{\#}$, т.е. независимость от выбора кода c, вытекает из следствия 1.5. Заметим, что множества из $\mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N})$ все принадлежат $\mathfrak{M}$ (и $\mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N}) \in \mathfrak{M}$), но вовсе не обязательно являются борелевскими в универсуме, а если некоторое $X = \boldsymbol{B}^{\mathfrak{M}}_c$, где $c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, оказывается борелевским (например, счетным, когда модель $\mathfrak{M}$ счетна), то вовсе не обязательно, что при этом будет $X = \boldsymbol{B}_c$, и вообще множество $X^{\#}$ не обязательно принадлежит $\mathfrak{M}$.

Лемма 1.7. *Следующие три класса подмножеств $\mathcal{N}$ совпадают*:

(1) *множества вида $X^{\#}$, $X \in \mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N})$*;

(2) *множества вида $\boldsymbol{B}_c$, $c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, т.е. борелевские с кодом из $\mathfrak{M}$*;

(3) *множества класса $\varDelta^1_1(\mathfrak{M})$* (т.е. $\varDelta^1_1(a)$ для некоторого $a \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$).

Доказательство. Равенство (1) = (2) выполнено по определению. Включение (2) $\subseteq$ (3) обеспечивается формулами σ, π предложения 1.1. Наконец, обратное включение — это эффективная теорема Суслина, простое доказательство которой (см., например, теорему 2.10 в [12]) использует предложение 1.1(ii) и теорему абсолютности 1.4. $\square$

Приведем здесь еще один результат, полезный для дальнейшего; им, в частности, устанавливается зависимость между X и $X^{\#}$ в некоторых простых случаях.

Лемма 1.8. (i) *Если $c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, то $\boldsymbol{B}^{\mathfrak{M}}_c = \boldsymbol{B}_c \cap \mathfrak{M}$, соответственно если $X \in \mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N})$, то $X = X^{\#} \cap \mathfrak{M}$.*

Далее пусть $X, Y \in \mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N})$; тогда выполнено следующее:

(ii) $X \subseteq Y \Leftrightarrow X^{\#} \subseteq Y^{\#}$, *$X$ тощее в $\mathfrak{M}$ $\Leftrightarrow$ $X^{\#}$ тощее,* $\boldsymbol{\lambda}(X) = 0$ *в* $\mathfrak{M}$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\lambda}(X^{\#}) = 0$;

(iii) *X замкнуто (в $\mathcal{N}$) в $\mathfrak{M}$, если и только если $X^{\#}$ замкнуто (в $\mathcal{N}$) в универсуме, и в этом случае в универсуме $X^{\#}$ равно замыканию X в $\mathcal{N}$*;

(iv) *в $\mathfrak{M}$ истинно, что X не более чем счетно, если и только если в универсуме истинно, что $X^{\#}$ не более чем счетно, и в этом случае $X^{\#} = X$.*

Доказательство. Утверждения (i) и (ii) являются в сущности переформулировками результатов следствия 1.5. Для доказательства (iii), (iv) пусть $X = \boldsymbol{B}^{\mathfrak{M}}_c$, $c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$, соответственно $X^{\#} = \boldsymbol{B}_c$. Замкнутость $\boldsymbol{B}_c$ выражается формулой

$$\forall x \, \forall y \, \Bigl(\text{если } \lim_{n\to\infty} (x)_n = y \text{ и } (x)_n \in \boldsymbol{B}_c \ \forall n, \text{ то } y \in \boldsymbol{B}_c\Bigr)$$

(определение $(x)_n$ см. в п. 1А), которая приводится к $\varPi^1_1$-виду (с параметром c) подстановкой формул из предложения 1.1(ii), так что искомая эквивалентность следует из теоремы абсолютности 1.4. Для доказательства второй части (iii) следует воспользоваться абсолютностью формул вида $\boldsymbol{B}_c \cap \mathcal{N}_s = \varnothing$, $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

[16] Соловей [26] назвал множества вида $X^{\#}$ *рациональными над* $\mathfrak{M}$.

Далее первая строка следующей легко проверяемой эквивалентности:

$$\boldsymbol{B}_c \text{ не более чем счетно } \Leftrightarrow \exists\, x\, \forall\, y\, \exists\, n\, \big(y \in \boldsymbol{B}_c \Rightarrow y = (x)_n\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \neg \exists\, Y\, \big(Y \subseteq \boldsymbol{B}_c \text{ — совершенное множество}\big)$$

дает Σ^1_2-выражение утверждения о счетности $\boldsymbol{B}_c$, а вторая без труда преобразуется к его Π^1_2-выражению через кодировку замкнутых множеств $Y \subseteq \mathcal{N}$ посредством совершенных деревьев $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$.[17] Остается применить теорему 1.4.[18] □

1г. Общие свойства вещественной прямой модели ZFC в универсуме всех множеств. Мы продолжаем считать, что $\mathfrak{M}$ — фиксированная транзитивная модель **ZFC**. Следующая лемма доказывает несколько простых свойств множеств вида $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$, в частности $\mathcal{N} \cap \mathbf{L}$, а в силу сказанного в п. 1А эти свойства переносятся и на множества вида $\mathbb{R} \cap \mathfrak{M}$ и $\mathbb{R} \cap \mathbf{L}$ посредством достаточно простых рассуждений (см. также лемму 1.10 ниже). В основном сюда относятся результаты, упомянутые в табл. 1 из введения, кроме результатов 4 и 5.

Лемма 1.9. *Предположим, что $\mathcal{N} \not\subseteq \mathfrak{M}$. Тогда*

(i) *множество $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ не содержит нетощих борелевских подмножеств и удовлетворяет ровно одному из следующих условий*:
 (1) *$\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ является тощим*;
 (2) *$\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ не имеет свойства Бэра, а дополнительное множество $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$ также не содержит нетощих борелевских подмножеств*;

(ii) (для $\mathbb{R}$ отмечено, например, в [16]) *множество $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ имеет нижнюю $\boldsymbol{\lambda}$-меру* 0 *и удовлетворяет ровно одному из следующих условий*:
 (1) $\boldsymbol{\lambda}(\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}) = 0$;
 (2) *$\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ $\boldsymbol{\lambda}$-неизмеримо, а $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$ также имеет нижнюю $\boldsymbol{\lambda}$-меру* 0;

(iii) *дополнительное множество $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$ содержит совершенное подмножество*;

(iv) *если $\omega_1 \subseteq \mathfrak{M}$, то множество $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ не принадлежит $\Pi^1_2(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. (i) Предположим, что множество $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ *не* является тощим, и докажем, что тогда ни одно из множеств $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$, $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$ не содержит нетощих борелевских подмножеств. Предположим противное. Тогда либо множество $M = \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$, либо дополнительное множество $C = \mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$ котощее на некотором бэровском интервале $\mathcal{N}_s = \{x \in \mathcal{N} \colon s \subset x\}$, $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$.

Если M котощее на $\mathcal{N}_s$, то M остается котощим в $\mathcal{N}$, так как отображение $x \mapsto s^\wedge x$ (конкатенация) — гомеоморфизм $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\Lambda$ на $\mathcal{N}_s$, переводящий M на $M \cap \mathcal{N}_s$. Рассмотрим гомеоморфизм $\varepsilon \colon \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}$, заданный равенствами $\varepsilon(2n) = \varepsilon^{-1}(2n) = 2n+1\ \forall\, n$. Поскольку $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{M} \neq \varnothing$, найдется множество $w \subseteq \omega$, $w \notin \mathfrak{M}$. Для $x \in \mathcal{N}$ положим $H(x) = y$, где $y(k) = x(k)$ при $k \notin w$ и $y(k) = \varepsilon(x(k))$ при $k \in w$. Отображение H — также гомеоморфизм $\mathcal{N}$ на себя, так что $M' = H\,''\,M$ — тоже котощее множество. Для получения противоречия остается заметить, что $M \cap M' = \varnothing$: действительно, если x и $y = H(x)$ принадлежат M, то $w = \{k \colon x(k) = y(k)\}$ принадлежит $\mathfrak{M}$ — противоречие с выбором w.

Если же дополнительное множество $\mathcal{N} \setminus M$ является котощим на $\mathcal{N}_s$, то, используя определенный выше гомеоморфизм ϑ, мы получаем: $\mathcal{N} \setminus M$ — котощее множество в $\mathcal{N}$, т.е. само M тощее, что противоречит нашим предположениям.

[17] Имеется в виду, что для каждого $t \in T$ найдется точка ветвления $s \in T$ дерева T такая, что $t \subseteq s$. В этом случае $[T] = \{x \in \mathcal{N} \colon \forall\, n\, (x \restriction n \in T)\}$ — совершенное подмножество $\mathcal{N}$.

[18] Счетность $\boldsymbol{B}_p$ может быть выражена Π^1_1-формулой $\boldsymbol{B}_p \subseteq \Delta^1_1(p)$ (см. [10, разд. 4]).

(ii) Предполагая, что множество $M = \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ *не* удовлетворяет $\boldsymbol{\lambda}(M) = 0$ (т.е. либо неизмеримо, либо имеет положительную меру), выведем, что нижние $\boldsymbol{\lambda}$-меры множеств M и $C = \mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$ равны 0. Предположим противное. Тогда одно из множеств M, C содержит борелевское множество положительной меры.

Пусть, к примеру, $X \subseteq M$ — борелевское множество с $\boldsymbol{\lambda}(X) = \alpha > 0$. Можно считать, что M не имеет подмножеств меры $> \alpha$. Покажем, что в этом случае $\alpha = 1$. Пусть напротив, $\alpha < 1$. Напомним, что мера $\boldsymbol{\lambda}$ сосредоточена на бинарных последовательностях. Поэтому найдется бэровский интервал $\mathcal{N}_s$, $s \in 2^{<\omega}$, такой, что относительная плотность $p = \boldsymbol{\lambda}(X \cap \mathcal{N}_s) \cdot 2^n$, где $n = \mathtt{lh}\, s$, множества X на интервале $\mathcal{N}_s$ удовлетворяет $p < \alpha$. Соответственно найдется бэровский интервал $\mathcal{N}_t$, $t \in 2^{<\omega}$, такой, что относительная плотность $q = \boldsymbol{\lambda}(X \cap \mathcal{N}_t) \cdot 2^m$, где $m = \mathtt{lh}\, t$, удовлетворяет $q > \alpha$. Можно считать, что $m = n$. Тогда естественный гомеоморфизм $h\colon t^\wedge x \mapsto s^\wedge x$ бэровского интервала $\mathcal{N}_t$ на $\mathcal{N}_s$ сохраняет меру μ и переводит $M \cap \mathcal{N}_t$ на $M \cap \mathcal{N}_s$. Следовательно, множество $X' = X \cup (h\,``\,(M \cap \mathcal{N}_t))$ имеет меру $\geq \alpha + (q - p) > \alpha$ и является борелевским подмножеством M — противоречие.

Итак, в самом деле $\alpha = 1$ (другими словами, $\boldsymbol{\lambda}(M) = 1$). Это влечет противоречие аналогично доказательству (i) (но “котощее” меняется на “полной меры”).

Наконец, если $\mathcal{N} \setminus M$ содержит борелевское множество положительной меры, то аналогичные выкладки приносят $\boldsymbol{\lambda}(\mathcal{N} \setminus M) = 1$, т.е. $\boldsymbol{\lambda}(M) = 0$, что противоречит нашим предположениям.

(iii) Возьмем произвольное множество $w \subseteq \omega$, $w \notin \mathfrak{M}$. Множество $Y = \{x \in \mathcal{N} \colon \forall\, k\ (x(2k) = w(k))\}$ есть совершенное подмножество, не пересекающее M.

(iv) Если $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ есть $\Pi^1_2(\mathfrak{M})$, то дополнительное множество $C = \mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$ принадлежит $\Sigma^1_2(\mathfrak{M})$, т.е., например, $\Sigma^1_2(z)$, $z \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$. Но $C \neq \varnothing$ по общему предположению $\mathcal{N} \not\subseteq \mathfrak{M}$. Следовательно, по теореме о базисе (см. [25, 7.11, следствие 2]) C содержит элемент класса $\Delta^1_2(z)$. Однако все $\Delta^1_2(z)$-точки $a \in \mathcal{N}$ принадлежат $\mathfrak{M}$ вместе с z по теореме абсолютности 1.4(ii). $\square$

Как показывает следующая лемма, полученные результаты сохраняют силу при ограничении на любое совершенное множество $X \subseteq \mathcal{N}$, например $X = \mathcal{C} = 2^\omega$.

Лемма 1.10. *Пусть $X \in \mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N})$ — совершенное множество в $\mathfrak{M}$.*[19] *Тогда множества $X^\# \cap \mathfrak{M}$ и $X^\# \setminus \mathfrak{M}$ имеют в универсуме те же свойства меры и категории, что и $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$, $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$. Другими словами, для категории*

$$X^\# \cap \mathfrak{M} \text{ тощее в } X^\# \iff \mathcal{N} \cap \mathfrak{M} \text{ тощее в } \mathcal{N};$$

$$\begin{array}{ccc} X^\# \cap \mathfrak{M} \text{ не имеет борелевских} & \multirow{2}{*}{$\Leftrightarrow$} & \mathcal{N} \cap \mathfrak{M} \text{ не имеет борелевских} \\ \text{подмножеств, нетощих в } X^\# & & \text{подмножеств, нетощих в } \mathcal{N}; \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X^\# \setminus \mathfrak{M} \text{ не имеет борелевских} & \Leftrightarrow & \mathcal{N} \setminus \mathfrak{M} \text{ не имеет борелевских} \\ \text{подмножеств, нетощих в } X^\# & & \text{подмножеств, нетощих в } \mathcal{N}. \end{array}$$

Для случая меры если μ — борелевская конечная мера на $X^\#$, код которой, т.е. функция $\widetilde{\mu}(s) = \mu(\mathcal{N}_s \cap X^\#)$, $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, принадлежит $\mathfrak{M}$, и $0 < \mu(X^\#)$, то

$$\mu(X^\# \cap \mathfrak{M}) = 0 \iff \boldsymbol{\lambda}(\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}) = 0;$$

$$X^\# \cap \mathfrak{M} \text{ имеет нижнюю } \mu\text{-меру } 0 \iff \mathcal{N} \cap \mathfrak{M} \text{ имеет нижнюю } \boldsymbol{\lambda}\text{-меру } 0;$$

$$X^\# \setminus \mathfrak{M} \text{ имеет нижнюю } \mu\text{-меру } 0 \iff \mathcal{N} \setminus \mathfrak{M} \text{ имеет нижнюю } \boldsymbol{\lambda}\text{-меру } 0.$$

[19] Тогда $X^\#$ — совершенное множество в универсуме по лемме 1.8(iii).

Доказательство. Для случая категории возьмем плотное в X счетное в $\mathfrak{M}$ множество $S \in \mathfrak{M}$, $S \subseteq X$. По лемме 1.8 S плотно и в $X^{\#}$, а тогда $G = X^{\#} \setminus S$ есть плотное $\Pi^0_2(\mathfrak{M})$-подмножество $X^{\#}$. Имеется гомеоморфизм $\vartheta\colon \mathcal{N} \xrightarrow{\text{на}} G$ с кодом в $\mathfrak{M}$. Отсюда легко следуют три первые эквивалентности.

Что касается меры, можно предполагать, что $\mu(X^{\#}) = 1$. Тогда (см., например, лемму 1.3 в [12]) существуют борелевские с кодом из $\mathfrak{M}$ по выбору μ множества $U \subseteq \mathcal{N}$ полной $\boldsymbol{\lambda}$-меры и $V \subseteq X^{\#}$ полной μ-меры, а также борелевская опять с кодом из $\mathfrak{M}$ биекция $\vartheta\colon U \xrightarrow{\text{на}} V$, переводящая $\boldsymbol{\lambda}\restriction U$ в $\mu\restriction V$. $\square$

Из леммы 1.9 следует, что если множество $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ имеет свойство Бэра, то оно тощее, а если оно $\boldsymbol{\lambda}$-измеримо, то имеет меру 0. Мы покажем, что в подходящих генерических расширениях $\mathfrak{M}$ множество $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ может быть или не быть $\boldsymbol{\lambda}$-измеримым, а также независимым образом обладать или нет свойством Бэра.

1д. Отсутствие совершенных подмножеств. Предполагается некоторое знакомство читателя с основными понятиями теории гёделевой конструктивности, в частности с построением классов $\mathbf{L}$ (*конструктивные* множества) и $\mathbf{L}[x]$ (множества, *конструктивные относительно* x).

Предложение 1.11 (см. теорему 2.6 в [12]). *Для любого $a \in \mathcal{N}$ множество $\mathcal{N} \cap \mathbf{L}[a]$ принадлежит $\Sigma^1_2(a)$; в частности, $\mathcal{N} \cap \mathbf{L}$ есть Σ^1_2-множество.* $\square$

В этом пункте доказывается

Теорема 1.12. *Предположим, что $a \in \mathcal{N}$ и $\mathcal{N} \not\subseteq \mathbf{L}[a]$. Тогда*

(i) $\mathcal{N} \cap \mathbf{L}[a]$ *не содержит совершенного подмножества*;

(ii) *если $\mathcal{N} \cap \mathbf{L}[a]$ несчетно, то $\mathcal{N} \cap \mathbf{L}[a]$ не является $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-множеством.*

Результат (i) представляет собой частный случай $\mathfrak{M} = \mathbf{L}[a]$ теоремы из строки 4 табл. 1 введения. Доказательство, данное в [5], соответствующим образом адаптировано и несколько упрощено. Результат (ii), который является аналогичным частным случаем теоремы из [29], немедленно следует из (i), поскольку любое несчетное $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$-множество имеет совершенное подмножество. (Результат [29] был получен другим методом, не через утверждение (i), которое еще не было известно.)

Доказательство теоремы 1.12. Допустим, что $X \subseteq \mathcal{N} \cap \mathbf{L}[a]$ — совершенное множество, и выведем $\mathcal{N} \subseteq \mathbf{L}[a]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $X \subseteq 2^\omega$. Тогда $T = \{x\restriction n\colon x \in X \wedge n \in \mathbb{N}\} \subseteq 2^{<\omega}$ — совершенное дерево и $X = [T] = \{x \in 2^\omega\colon \forall n\ (x\restriction n \in T)\}$. Более того, существует единственная сохраняющая $\subset$ биекция $\gamma\colon 2^{<\omega}$ на множество T^{br} всех точек ветвления T такая, что $\gamma(s^\wedge i) = \gamma(s)^\wedge i$ для всех $s \in 2^{<\omega}$ и $i = 0, 1$. Ею порождается гомеоморфизм $\Gamma\colon 2^\omega \xrightarrow{\text{на}} X$, определенный так, что $\Gamma(b) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma(b\restriction n)$, т.е. $\gamma(b\restriction n) \subseteq \Gamma(b)$ для всех n.

Через $[T]^{\mathrm{ec}}$ (“ec” от *eventually constant*) обозначим множество всех $x \in [T]$ таких, что $b = \gamma^{-1}(x) \in 2^\omega$ почти постоянна, т.е. или $b(k) = 0$ для почти всех (т.е. кроме конечного числа) k, или $b(k) = 1$ для почти всех k. Множество $G_0 = [T] \setminus [T]^{\mathrm{ec}} \subseteq 2^\omega$ счетно; мы утверждаем, что, более того, *найдется множество $G \subseteq 2^\omega$, $G \in \mathbf{L}[a]$, счетное в $\mathbf{L}[a]$ и удовлетворяющее $G_0 \subseteq G$*. В самом деле, раз $X = [T] \subseteq \mathbf{L}[a]$ несчетно, мы имеем $\omega_1^{\mathbf{L}[a]} = \omega_1$. Пусть $2^\omega = \{b_\xi\colon \xi < \omega_1\}$ — перечисление в $\mathbf{L}[a]$. Поскольку G_0 счетно, найдется ординал $\vartheta < \omega_1$ такой, что $G_0 \subseteq G = \{b_\xi\colon \xi < \vartheta\}$; множество G искомое. Зафиксируем перечисление $G = \{g_k\colon k \in \mathbb{N}\}$ в $\mathbf{L}[a]$: последовательность $\vec{g} = \{g_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ принадлежит $\mathbf{L}[a]$.

Теперь мы утверждаем, что *для каждого* $b \in 2^\omega$ *найдутся точки* $x, y \in X$ *такие, что* b *рекурсивно относительно* x, y, $\vec{g}$. Приняв этот факт на веру, мы получаем $2^\omega \subseteq \mathbf{L}[a]$, поскольку $X \subseteq \mathbf{L}[a]$ и $\vec{g} \in \mathbf{L}[a]$; тем самым и $\mathcal{N} \subseteq \mathbf{L}[a]$.

Доказательство этого ключевого факта основано на достаточно тонкой процедуре кодировки z при помощи $\vec{g}$ и *пары* точек X; одной точки не хватает! Предполагаем, не ограничивая общности, что $g_0 \in [T] \setminus [T]^{\mathrm{ec}}$. В ходе конструкции, которая состоит из ω шагов, мы строим последовательности чисел $k[r]$, $j[r]$, $t[r]$, $r \in \mathbb{N}$.

Полагаем $j[0] = k[0] = t[0] = 0$. Индуктивный шаг r $(r \geq 0)$ производится так.

(1_r) Возьмем наименьшее число $n = n[r] > t[r]$ такое, что $g_{j[r]}(n) \neq b(r)$ и продолжение $(g_{j[r]} \restriction n)^\wedge b(r)$ конечной последовательности $g_{j[r]} \restriction n$ дополнительным членом $b(r)$ принадлежит T. Полагаем $j[r+1]$ равным наименьшему числу $j > j[r]$ такому, что $(g_{j[r]} \restriction n[r])^\wedge b(r) \subset g_j$ и $g_j \in [T] \setminus [T]^{\mathrm{ec}}$.

(2_r) Положим $s[r] = \min\{s \colon \forall\, i < j[r+1]\ (g_i \restriction s \neq g_{j[r+1]} \restriction s)\}$. Через $k[r+1]$ обозначим наименьшее число $k > k[r]$ такое, что $g_k \in [T] \setminus [T]^{\mathrm{ec}}$, $g_k \neq g_{k[r]}$, но $g_k \restriction (s[r]+1) = g_{k[r]} \restriction (s[r]+1)$.

(3_r) Полагаем $t[r+1] = \min\{t > t[r] \colon \forall\, i < k[r+1]\ (g_i \restriction t \neq g_{k[r+1]} \restriction t)\}$.

Из построения немедленно следует $t[r] < n[r] < s[r] < t[r+1]$ и, кроме того,

$$g_{j[r]} \restriction n[r] = g_{j[r+1]} \restriction n[r] \qquad \text{и} \qquad g_{k[r]} \restriction (s[r]+1) = g_{k[r+1]} \restriction (s[r]+1),$$

так что найдутся (единственные) точки $x, y \in 2^\omega$ такие, что для всех r

$$g_{j[r]} \restriction n[r] = x \restriction n[r] \qquad \text{и} \qquad g_{k[r]} \restriction (s[r]+1) = y \restriction (s[r]+1).$$

При этом все $g_{j[r]}$, $g_{k[r]}$ принадлежат T, следовательно, $x, y \in T$.

Покажем, как, зная x, y и $\vec{g}$, восстановить b. Мы утверждаем, что выполнены следующие соотношения, элиминирующие T из построения:

(1) $n[r] = \min\{n > t[r] \colon x(n) \neq g_{j[r]}(n)\}$;

(2) $j[r+1] = \min\{j > j[r] \colon x \restriction i_r = g_j \restriction i_r\}$, где $i_r = \min\{d \colon y(d) \neq g_{k[r]}(d)\}$;

(3) $k[r+1] = \min\{k > k[r] \colon y \restriction n[r+1] = g_k \restriction n[r+1]\}$.

(1) Следует из определения (1_r) в силу того, что $g_{j[r]} \restriction n[r] = x \restriction n[r]$.

(2) Прежде всего мы имеем неравенство $i_r \leq t[r+1]$, поскольку $g_{k[r]} \restriction t[r+1] \neq g_{k[r+1]} \restriction t[r+1] = y \restriction t[r+1]$. Тем самым $i_r \leq n[r+1]$, а потому $x \restriction i_r = g_{j[r+1]} \restriction i_r$. С другой стороны, по построению выполнено $i_r > s[r]$, так что $g_j \restriction i_r \neq g_{j[r+1]} \restriction i_r = x \restriction i_r$ при любом $j < j[r+1]$.

(3) Соотношение $y \restriction n[r+1] = g_{k[r+1]} \restriction n[r+1]$ следует просто потому, что $n[r+1] \leq s[r+1]$. С другой стороны, если $k < k[r+1]$, то мы имеем $g_k \restriction t[r+1] \neq g_{k[r+1]} \restriction t[r+1] = y \restriction t[r+1]$. Остается заметить, что $t[r+1] \leq n[r+1]$.

Итак, зная, что $j[0] = k[0] = 0$, мы можем вычислить $j[r]$, $k[r]$, $n[r]$ индукцией по r по следующей схеме, использующей равенства (1), (2), (3):

$$(j[r], k[r]) \to n[r] \to i_r \to j[r+1] \to n[r+1] \to k[r+1].$$

Эта схема рекурсивна относительно $x, y \in \mathbf{L}[a]$ и последовательности $\vec{g} = \{g_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathbf{L}[a]$, так что последовательности чисел $j[r]$, $k[r]$, $n[r]$ принадлежат $\mathbf{L}[a]$. Поэтому мы имеем $b \in \mathbf{L}[a]$, поскольку $b(r) = 1 - g_{j[r]}(n[r])$ для всех r. $\square$

2. КОЭНОВСКИЕ И СЛУЧАЙНЫЕ ГЕНЕРИЧЕСКИЕ РАСШИРЕНИЯ

Здесь рассматриваются основные свойства “бэровской прямой” $\mathcal{N}\cap\mathfrak{M}$ фиксированной транзитивной модели $\mathfrak{M}\models\mathbf{ZFC}$ в *коэновских* и *случайных* генерических расширениях $\mathfrak{M}$. Мы докажем, что в коэновских расширениях $\mathfrak{M}$ множество $\mathcal{N}\cap\mathfrak{M}$ имеет $\boldsymbol{\lambda}$-меру 0, но не имеет свойства Бэра, а в случайных расширениях, наоборот, $\boldsymbol{\lambda}$-неизмеримо, но является тощим. Сверх того, в расширениях обоих типов $\mathcal{N}\cap\mathfrak{M}$ несчетно и не содержит совершенных подмножеств, а дополнительное множество $\mathcal{N}\setminus\mathfrak{M}$ имеет совершенные подмножества.

Наконец, мы покажем, что в случае, когда $\mathfrak{M}=\mathbf{L}$ (конструктивный универсум), в расширениях модели $\mathfrak{M}$, полученных присоединением всего одной коэновской или случайной точки $a\in\mathcal{N}$, множество $\mathcal{N}\cap\mathfrak{M}=\mathcal{N}\cap\mathbf{L}$ всех конструктивных точек является множеством класса $\varDelta^1_2(a)$, тем самым $\mathbf{\Delta}^1_2$, но не $\mathbf{\Sigma}^1_1\cup\mathbf{\Pi}^1_1$. В то же время если присоединяется $\mathfrak{M}$-несчетно много точек (коэновских или случайных), то $\mathcal{N}\cap\mathfrak{M}$ не может быть $\mathbf{\Pi}^1_2$-множеством в расширении.

Эти результаты помечены номерами 8–11 в табл. 2 во введении.

2а. Борелевские форсинги. Нам придется напомнить определения и обозначения, связанные с форсингом при помощи борелевских множеств, поскольку к этой категории относятся форсинги, используемые ниже для решения вопросов об измеримости и свойстве Бэра множеств вида $\mathcal{N}\cap\mathfrak{M}$. Особенностью этой группы форсингов является то, что (вынуждающими) “условиями” здесь служат борелевские множества пространства Бэра $\mathcal{N}$ и некоторых других пространств с кодами из заданной транзитивной модели **ZFC**.

Чтобы не повторяться, пусть $\mathfrak{M}$ — фиксированная транзитивная модель **ZFC**.

Определение 2.1. Под *форсингом борелевскими множествами* или, кратко, *б.м.-форсингом* мы будем понимать любое множество $\mathbf{P}\subseteq\mathtt{Borel}(\mathcal{N})$, упорядоченное по включению, т.е. $P\le Q$ (P сильнее, чем Q), когда $P\subseteq Q$. Соответственно б.м.-форсинг *над* $\mathfrak{M}$ — это любое множество $\mathbf{P}\subseteq\mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N})$, $\mathbf{P}\in\mathfrak{M}$.[20]

Среди б.м.-форсингов представительный подкласс образуют борелевские форсинги по модулю идеала. Напомним, что *идеалом* в алгебре $\mathtt{Borel}(\mathcal{N})$ называется всякое множество $\mathcal{I}\subseteq\mathtt{Borel}(\mathcal{N})$, замкнутое относительно конечных объединений и взятия (борелевских) подмножеств. Среди идеалов выделяются

σ-идеалы, т.е. замкнутые относительно *счетных* объединений,

УСА-идеалы[21] такие, что любая *$\mathcal{I}$-антицепь*, т.е. множество $\mathcal{A}\subseteq\mathtt{Borel}(\mathcal{X})$ такое, что $X\cap Y\in\mathcal{I}$ для любых $X\ne Y$ из $\mathcal{A}$, не более чем счетна в $\mathfrak{M}$, а также

σ-УСА-идеалы, что означает выполнение обоих этих требований.

Определение 2.2 (см. [12, п. 3в]). Идеал $\mathcal{I}\subseteq\mathtt{Borel}(\mathcal{N})$ называется *$\mathfrak{M}$-абсолютным σ-УСА-идеалом*, если множество $\mathcal{I}^{\mathfrak{M}}=\{X\in\mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N})\colon X^{\#}\in\mathcal{I}\}$ принадлежит $\mathfrak{M}$ и является σ-УСА-идеалом в $\mathfrak{M}$. Понятие *$\mathfrak{M}$-абсолютного σ-идеала* вводится аналогично: требуется, чтобы $\mathcal{I}^{\mathfrak{M}}$ было σ-идеалом в $\mathfrak{M}$.

Положим $\mathbf{P}_{\mathcal{I}}=\mathtt{Borel}(\mathcal{N})\setminus\mathcal{I}$ и в релятивизованной форме

$$\mathbf{P}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{I}}=\mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N})\setminus\mathcal{I}^{\mathfrak{M}}=\{X\in\mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N})\colon X^{\#}\in\mathbf{P}_{\mathcal{I}}\}.$$

Ясно, что $\mathbf{P}_{\mathcal{I}}$ — б.м.-форсинг, а если $\mathcal{I}^{\mathfrak{M}}\in\mathfrak{M}$, то $\mathbf{P}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{I}}$ — б.м.-форсинг над $\mathfrak{M}$.

[20] Эквивалентная концепция состоит в том, чтобы брать в качестве “условий” борелевские коды из $\mathbf{BC}\cap\mathfrak{M}$ с порядком $p\preccurlyeq q$, когда $\boldsymbol{B}_p\subseteq\boldsymbol{B}_q$. Этот подход реализован, например, в [12].

[21] УСА от “условие счетности антицепей”.

Наконец, определим $\mathtt{Rand}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}} = \mathcal{N} \setminus \bigcup_{X\in\mathcal{I}^{\mathfrak{M}}} X^{\#}$; точки этого (возможно, пустого) множества называются *$\mathcal{I}$-случайными над $\mathfrak{M}$*.[22]

Предложение 2.3 (см. п. 4в в [12]). *Если $\mathcal{I} \subseteq \mathtt{Borel}(\mathcal{N})$ есть $\mathfrak{M}$-абсолютный σ-идеал, то $\mathbf{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{M}$ и для любого $\mathbf{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$-генерического над $\mathfrak{M}$ множества $G \subseteq \mathbf{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$ пересечение $\bigcap_{X\in G} X^{\#}$ содержит единственную точку, обозначаемую через a_G. При этом $G = \{P \in \mathbf{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}} : a_G \in P^{\#}\}$ и $\mathfrak{M}[a_G] = \mathfrak{M}[G]$.* □

Точки вида a_G будут называться, естественно, *$\mathbf{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$-генерическими над $\mathfrak{M}$* точками. Множество всех таких точек обозначим через $\mathtt{Gen}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$.

Теорема 2.4. *Пусть $\mathcal{I} \subseteq \mathtt{Borel}(\mathcal{N})$ — $\mathfrak{M}$-абсолютный σ-УСА-идеал. Тогда*

(i) *множество $\mathtt{Gen}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$ всех $\mathbf{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$-генерических над $\mathfrak{M}$ точек совпадает с множеством $\mathtt{Rand}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$ всех точек, $\mathcal{I}$-случайных над $\mathfrak{M}$;*

(ii) *если $a \in \mathtt{Gen}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$, то все кардиналы $\mathfrak{M}$ сохраняются в $\mathfrak{M}[a]$;*

(iii) *если $a \in \mathtt{Gen}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$ и $x \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}[a]$, то найдется код борелевской функции $f \in \mathbf{BF} \cap \mathfrak{M}$ такой, что $x = \boldsymbol{\vartheta}_f(a)$.*

Доказательство (набросок). Об утверждении (i) см. нашу работу [12, п. 4в]. Далее, по определению форсинг $\mathbf{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$ удовлетворяет УСА в $\mathfrak{M}$, т.е. каждая $\mathcal{I}$-антицепь $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$, счетна в $\mathfrak{M}$, что, как известно, достаточно для (ii).

(iii) Найдется имя $\breve{x}$ такое, что $x = \breve{x}[G]$ и каждое "условие" из $\mathbf{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$ вынуждает $\breve{x} \in \mathcal{N}$. Скажем, что $X \in \mathbf{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$ *решает* $\breve{x}(\breve{n})$, если найдется k такое, что X вынуждает $\breve{x}(\breve{n}) = \breve{k}$. *Рассуждая в* $\mathfrak{M}$, для всякого n зафиксируем максимальную антицепь $A_n \subseteq \mathbf{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$ из условий, "решающих" $\breve{x}(\breve{n})$. Из УСА следует, что каждая A_n не более чем счетна. Изменив каждое из множеств из A_n подходящим образом посредством добавления или вычитания множества из $\mathcal{I}$, можно добиться того, что множества из A_n становятся попарно дизъюнктными и дают $\mathcal{N}$ в объединении. Теперь положим $A_{nk} = \{X \in A_n : X$ вынуждает $\breve{x}(\breve{n}) = \breve{k}\}$ и $X_{nk} = \bigcup A_{nk}$. Тогда при любом n каждое множество X_{nk} борелевское и принадлежит $\mathbf{P}_{\mathcal{I}}^{\mathfrak{M}}$ или пусто и эти множества попарно дизъюнктны и дают $\mathcal{N}$ в объединении. Остается взять код $f \in \mathbf{BF}$ такой, что $\boldsymbol{B}_{((f)_n)_k} = X_{nk}$ для всех n, k. □

Отметим, что (i) может быть неверно для абсолютных σ-идеалов, не являющихся УСА. Например, для идеала $\mathcal{I}_{\mathtt{count}}$ всех не более чем счетных множеств нетрудно проверить, что $\mathtt{Rand}_{\mathcal{I}_{\mathtt{count}}}^{\mathfrak{M}} = \mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$, в то время как $\mathtt{Gen}_{\mathcal{I}_{\mathtt{count}}}^{\mathfrak{M}}$ есть множество всех саксовских над $\mathfrak{M}$ точек $\mathcal{N}$ (очевидно, собственное подмножество $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$).

2б. Форсинг Коэна и форсинг Соловея. В этом пункте $\mathfrak{M}$ остается фиксированной транзитивной моделью **ZFC**.

К σ-УСА-идеалам, очевидно, относятся следующие два идеала:

- идеал $\mathcal{I}_{\mathrm{cat}}$ всех тощих борелевских множеств $X \subseteq \mathcal{N}$;
- идеал $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\lambda}}$ всех борелевских множеств $X \subseteq \mathcal{N}$ $\boldsymbol{\lambda}$-меры 0.

Более того, каждый из них является $\mathfrak{M}$-абсолютным σ-УСА-идеалом: например,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathrm{cat}}^{\mathfrak{M}} &= \{X \in \mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N}) :\ X^{\#} \in \mathcal{I}_{\mathrm{cat}}\} = \\ &= \{X \in \mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N}) :\ \text{в } \mathfrak{M} \text{ истинно } X \in \mathcal{I}_{\mathrm{cat}}\} = (\mathcal{I}_{\mathrm{cat}})^{\mathfrak{M}}\end{aligned}$$

[22] Таким образом, $\mathcal{I}$-случайные точки — это по определению те, которые избегают множеств из $\mathcal{I}$, рациональных над данной моделью $\mathfrak{M}$.

согласно предложению 1.1(iv) и теореме абсолютности 1.4, где $(\mathcal{I}_{\mathrm{cat}})^{\mathfrak{M}}$ — множество $\mathcal{I}_{\mathrm{cat}}$, определенное в $\mathfrak{M}$; то же для идеала $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\lambda}}$. Мы приходим к следующим двум форсингам:

коэновский форсинг[23]: $\mathbf{C} = \mathbf{P}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cat}}} = \{X \in \mathtt{Borel}(\mathcal{N})\colon X \text{ нетощее}\}$;

случайный форсинг[24]: $\mathbf{B} = \mathbf{P}_{\mathcal{I}_{\boldsymbol{\lambda}}} = \{X \in \mathtt{Borel}(\mathcal{N})\colon \boldsymbol{\lambda}(X) > 0\}$.

В соответствии с общей схемой п. 2А определяются релятивизованные варианты

$$\mathbf{C}^{\mathfrak{M}} = \mathbf{P}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cat}}} = \{X \in \mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N})\colon X^{\#} \text{ нетощее}\},$$
$$\mathbf{B}^{\mathfrak{M}} = \mathbf{P}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{I}_{\boldsymbol{\lambda}}} = \{X \in \mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N})\colon \boldsymbol{\lambda}(X^{\#}) > 0\}.$$

Точки $a \in \mathcal{N}$, $\mathbf{B}^{\mathfrak{M}}$-генерические над $\mathfrak{M}$, называются *случайными над* $\mathfrak{M}$, а $\mathbf{C}^{\mathfrak{M}}$-генерические над $\mathfrak{M}$ точки называются *коэновскими над* $\mathfrak{M}$.

Множество всех коэновских (соответственно случайных) точек над $\mathfrak{M}$ обозначается через $\mathtt{Coh}\,\mathfrak{M}$ (соответственно $\mathtt{Rand}\,\mathfrak{M}$), так что мы имеем по теореме 2.4(i)

$$\mathtt{Coh}\,\mathfrak{M} = \mathtt{Gen}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cat}}} = \mathtt{Rand}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{I}_{\mathrm{cat}}} \qquad \text{и} \qquad \mathtt{Rand}\,\mathfrak{M} = \mathtt{Gen}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{I}_{\boldsymbol{\lambda}}} = \mathtt{Rand}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{I}_{\boldsymbol{\lambda}}}.$$

Следующее свойство “однородности” этих множеств доказано в [12, лемма 3.4].

Лемма 2.5. *Если* $\mathtt{Rand}\,\mathfrak{M} \neq \varnothing$ *и* $X \in \mathbf{B}^{\mathfrak{M}}$, *то* $X^{\#}$ *содержит точку из* $\mathtt{Rand}\,\mathfrak{M}$. *Если* $\mathtt{Coh}\,\mathfrak{M} \neq \varnothing$ *и* $X \in \mathbf{C}^{\mathfrak{M}}$, *то* $X^{\#}$ *содержит точку из* $\mathtt{Coh}\,\mathfrak{M}$. $\square$

2в. Отступление: о множествах неслучайных точек. Исследования конца 60-х–середины 70-х годов показали, что свойства множеств $\overline{\mathtt{Rand}}\,\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathtt{Coh}}\,\mathfrak{M}$ связаны с измеримостью и свойством Бэра множеств второго проективного уровня. Эти результаты суммируются в следующей теореме.

Теорема 2.6[25]. *Для любой точки* $a \in \mathcal{N}$ *справедливы эквивалентности*

(i) $\overline{\mathrm{PK}}(\Pi^1_1(a)) \Leftrightarrow (\omega_1^{\mathbf{L}[a]} = \omega_1)$;

(ii) $\overline{\mathrm{LM}}(\Sigma^1_2(a)) \Leftrightarrow (\overline{\mathtt{Rand}}\,\mathbf{L}[a]$ — *множество* $\boldsymbol{\lambda}$-*меры* $0)$;

(iii) $\overline{\mathrm{BP}}(\Sigma^1_2(a)) \Leftrightarrow (\overline{\mathtt{Coh}}\,\mathbf{L}[a]$ — *тощее множество*);

(iv) $\overline{\mathrm{LM}}(\Delta^1_2(a)) \Leftrightarrow (\overline{\mathtt{Rand}}\,\mathbf{L}[a] \neq \mathcal{N})$;

(v) $\overline{\mathrm{BP}}(\Delta^1_2(a)) \Leftrightarrow (\overline{\mathtt{Coh}}\,\mathbf{L}[a] \neq \mathcal{N})$.

Здесь $\overline{\mathrm{LM}}(\Sigma^1_2(a))$ обозначает утверждение о существовании в классе $\Sigma^1_2(a)$ множества $X \subseteq \mathcal{N}$, неизмеримого в смысле $\boldsymbol{\lambda}$, и в аналогичном смысле трактуются левые части остальных эквивалентностей, причем $\overline{\mathrm{BP}}$ означает существование в указанном классе множеств, не имеющих свойства Бэра, а $\overline{\mathrm{PK}}$ — существование множеств, не имеющих *свойства совершенного ядра*, т.е. несчетных, но не содержащих совершенных подмножеств. Правые же части эквивалентностей (ii)–(v) ссылаются на свойства множеств $\overline{\mathtt{Rand}}\,\mathbf{L}[a]$ и $\overline{\mathtt{Coh}}\,\mathbf{L}[a]$, причем существование контрпримеров (к свойствам измеримости и Бэра) связывается с тем, что эти множества в том или ином смысле невелики.

---

[23]Часто определяется как множество $\mathbb{C} = 2^{<\omega}$ конечных последовательностей нулей и единиц с порядком, обратным включению, т.е. $s \le t$ (означает, что “условие” s сильнее, чем t), когда $t \subseteq s$ (т.е. s есть продолжение t).

[24]Случайный форсинг можно определить как множество $\mathbb{B}$ всех деревьев (см. п. 1А) $T \subseteq 2^{<\omega}$ таких, что $\boldsymbol{\lambda}([T]) > 0$, с порядком $T \le S$ (“условие” T сильнее, чем S), если $T \subseteq S$.

[25]Теорема 3.3 в [12]. Эквивалентности (i), (ii), (iii) были установлены в независимых исследованиях Любецкого, Менсфилда, Соловея. Эквивалентности (iv), (v) доказаны Любецким [19]. Подробные ссылки даны в исторических замечаниях к § 3 и 4 в [12].

Первые три эквивалентности теоремы 2.6 лежат в основе тех двух импликаций следующей диаграммы[26], которые сходятся в боксе $\overline{\mathrm{PK}}(\boldsymbol{\Pi}^1_1)$:

$$
\begin{tikzcd}
& \boxed{\overline{\mathrm{LM}}(\boldsymbol{\Sigma}^1_2)} \arrow[dl] & \boxed{\overline{\mathrm{LM}}(\boldsymbol{\Delta}^1_2)} \arrow[l, dashed] \\
\boxed{\overline{\mathrm{PK}}(\boldsymbol{\Pi}^1_1)} & & \\
& \boxed{\overline{\mathrm{BP}}(\boldsymbol{\Sigma}^1_2)} \arrow[ul] \arrow[uu] & \boxed{\overline{\mathrm{BP}}(\boldsymbol{\Delta}^1_2)} \arrow[l, dashed]
\end{tikzcd}
$$

Эквивалентность (i) теоремы 2.6 несколько отличается от эквивалентностей (ii)–(v). В левых частях последних стоят утверждения о существовании множеств, $\mathcal{I}$-неизмеримых в смысле соответствующего идеала $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\boldsymbol{\lambda}}, \mathcal{I}_{\mathrm{cat}}$,[27] что вполне тривиально для идеала $\mathcal{I}_{\mathtt{count}}$, поскольку $\mathcal{I}_{\mathtt{count}}$-измеримость равносильна борелевости. Правая часть (i) содержит не ожидаемое по аналогии с (ii)–(v) равенство $\overline{\mathtt{Rand}}^{\mathbf{L}[a]}_{\mathcal{I}_{\mathtt{count}}} = \mathcal{N}$ (т.е. фактически $\mathcal{N} \cap \mathbf{L}[a] = \mathcal{N}$ или, еще проще, $\mathcal{N} \subseteq \mathbf{L}[a]$), а (более слабое) равенство $\omega_1^{\mathbf{L}[a]} = \omega_1$. Впрочем известна и эквивалентность с $\mathcal{N} \subseteq \mathbf{L}[a]$ в правой части; в левой части тогда стоит утверждение о существовании $\Pi^1_1(a)$-множества $P \subseteq \mathcal{N}^2$, которое не имеет совершенных подмножеств и является графиком всюду определенной функции $\mathcal{N} \to \mathcal{N}$ (следствие 4.7 в [12]).

Эквивалентности, подобные (ii)–(v), справедливы и для других абсолютных σ-УСА-идеалов (теорема 3.9 в [12]), однако их конкретный смысл для других идеалов остается предметом исследований (см. об этом § 9 в [12]).

Следует еще отметить, что множества $\overline{\mathtt{Rand}}\,\mathfrak{M}$ и $\overline{\mathtt{Coh}}\,\mathfrak{M}$ обладают теми же свойствами, изложенными в лемме 1.9, что и множество $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$; например, если $\overline{\mathtt{Rand}}\,\mathfrak{M} \subsetneqq \mathcal{N}$, то $\overline{\mathtt{Rand}}\,\mathfrak{M}$ не содержит борелевских подмножеств, не являющихся множествами $\boldsymbol{\lambda}$-меры 0 и тощими. Это имеет место в сущности в силу тех же рассуждений.

2г. Присоединение одной коэновской или случайной точки. Мы начинаем со случая, когда к исходной модели присоединяется всего одна коэновская или случайная точка. Следующая теорема доказывает результаты в строках 8 и 10 табл. 2 во введении.

Теорема 2.7. *Предположим, что $\mathfrak{M}$ — транзитивная модель* **ZFC**. *Тогда*

(i) *если $a \in \mathcal{N}$ является коэновской точкой над $\mathfrak{M}$, то в $\mathfrak{M}[a]$ истинно, что множество $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ имеет $\boldsymbol{\lambda}$-меру* 0, *но не имеет свойства Бэра*; *более того, ни $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$, ни $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$ не содержат нетощих борелевских подмножеств*;

(ii) *если $a \in \mathcal{N}$ является случайной точкой над $\mathfrak{M}$, то в $\mathfrak{M}[a]$ истинно, что множество $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ тощее и $\boldsymbol{\lambda}$-неизмеримое*; *более того, имеет верхнюю меру* 1 *и нижнюю меру* 0;

(iii) *в обоих случаях в $\mathfrak{M}[a]$ истинно, что $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ не принадлежит $\boldsymbol{\Sigma}^1_1 \cup \boldsymbol{\Pi}^1_1$, а если $\mathfrak{M} = \mathbf{L}$, то в $\mathfrak{M}[a]$ истинно также, что $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M} = \mathcal{N} \cap \mathbf{L}$ — множество класса $\Delta^1_2(a)$*;

(iv) *в обоих случаях $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ не содержит совершенных подмножеств в $\mathfrak{M}[a]$.*

[26] Диаграмма взята из нашей работы [12], где она дана в контрапозиционной форме, т.е., например, вместо $\overline{\mathrm{PK}}(\boldsymbol{\Pi}^1_1)$ стоит утверждение $\mathrm{PK}(\boldsymbol{\Pi}^1_1)$ о том, что каждое $\boldsymbol{\Pi}^1_1$-множество имеет свойство совершенного ядра, соответственно направления импликаций заменены на противоположные. Главные результаты в связи с этой диаграммой состоят в следующем. 1. Каждая из пяти гипотез в боксах неразрешима в **ZFC**. 2. Каждая из стрелок изображает доказуемую импликацию. (Штриховые стрелки изображают тривиальные импликации, поскольку $\boldsymbol{\Delta}^1_2 \subseteq \boldsymbol{\Sigma}^1_2$.) 3. Нет никаких других связей между элементами диаграммы, доказуемых в **ZFC**, кроме тех, которые обозначены стрелками. Эти результаты получены в период с конца 60-х до начала 90-х годов. В частности, Любецкий [15, 16] установил принципиальную импликацию $\overline{\mathrm{LM}}(\boldsymbol{\Sigma}^1_2) \Rightarrow \overline{\mathrm{PK}}(\boldsymbol{\Pi}^1_1)$.

[27] Множество $\mathcal{I}$-измеримо, если оно совпадает с борелевским множеством с точностью до множества из $\mathcal{I}$.

Доказательство. (i) *Рассуждаем в* $\mathfrak{M}[a]$. Фиксируем рекурсивное перечисление $\mathbb{N}^{<\omega} = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$. Положим $r_n = s_n{}^\wedge 0^\omega$ (продолжение s_n бесконечным числом нулей; $r_n \in \mathcal{N}$). Положим $W_{bm} = \bigcup_n \mathcal{N}_{r_{b(n)}\restriction(m+n)}$ для всех $b \in \mathcal{N}$, $m \in \mathbb{N}$ и далее $W_b = \bigcap_m W_{bm}$ и $W = \{\langle b, x\rangle : x \in W_b\}$. Тогда $\boldsymbol{\lambda}(W_{bm}) \le 2^{m+1}$, поэтому "вертикальные сечения" W_b множества W удовлетворяют $\boldsymbol{\lambda}(W_b) = 0\ \forall\, b$.

Теперь мы утверждаем, что для любого $x \in \mathcal{N}$ "горизонтальное сечение" $W^x = \{b : \langle b, x\rangle \in W\}$ множества W — котощее множество. Достаточно проверить, что каждое множество вида $W^x_m = \{b : x \in W_{bm}\}$ открыто (что очевидно) и плотно. Пусть $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $\mathtt{lh}\, s = n - 1$. Найдется n' такое, что $r_{n'}\restriction(m + n) = x\restriction(m + n)$. Пусть $t = s \cup \{\langle n, n'\rangle\}$, т.е. $t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ продолжает s членом n'. Понятно, что $x \in W_{bm}$ для любого b с $t \subset b$, так что $\mathcal{N}_t \subseteq W^x_m$, что и требовалось.

Однако для любого $x \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ множество W^x является, очевидно, борелевским с кодом из $\mathfrak{M}$. Поэтому данная коэновская точка a принадлежит W^x (так как иначе она принадлежала бы его тощему дополнению $\mathcal{N} \setminus W^x$ — также борелевскому множеству с кодом из $\mathfrak{M}$, что противоречит теореме 2.4(i)). Выражая это по-другому, мы имеем $x \in W_a$. Таким образом, $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M} \subseteq W_a$. Кроме того, по выбору W $\boldsymbol{\lambda}(W_a) = 0$, так что и $\boldsymbol{\lambda}(\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}) = 0$ (в $\mathfrak{M}[a]$).

Для доказательства второй части (i) достаточно проверить, что $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ не является тощим множеством в $\mathfrak{M}[a]$, — мы ссылаемся на лемму 1.9(i). Предположим противное. Тогда найдется тощее борелевское множество, например, $\boldsymbol{B}_c$, $c \in \mathfrak{M}[a] \cap \mathbf{BC}$, накрывающее $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$. Согласно теореме 2.4(iii) мы имеем $c = \boldsymbol{\vartheta}_f(a)$, где $f \in \mathbf{BF} \cap \mathfrak{M}$. Поскольку a — коэновская, т.е. $\mathbf{C}^{\mathfrak{M}}$-генерическая, точка, любое свойство соответствующего генерического расширения $\mathfrak{M}[a]$ вынуждается, другими словами, найдется "условие" $P = \boldsymbol{B}^{\mathfrak{M}}_p \in \mathbf{C}^{\mathfrak{M}}$ с кодом $p \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ (т.е. $P^\# = \boldsymbol{B}_p$ — нетощее борелевское множество) такое, что $a \in P^\#$ и предложение

$$\boldsymbol{\vartheta}_f(a) \in \mathbf{BC} \wedge \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\vartheta}_f(a)} \text{ — тощее множество } \wedge \mathcal{N} \cap \mathfrak{M} \subseteq \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\vartheta}_f(a)} \tag{2.1}$$

истинно в $\mathfrak{M}[b]$, какова бы ни была коэновская над $\mathfrak{M}$ точка $b \in P^\#$.

Рассуждаем в $\mathfrak{M}$. Множество $B = \{b \in \boldsymbol{B}_p : \boldsymbol{\vartheta}_f(a) \in \mathbf{BC} \wedge \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\vartheta}_f(a)} \text{ тощее}\}$ принадлежит $\mathbf{\Pi}^1_1$ согласно предложениям 1.1(iv) и 1.3 (подстановка борелевской функции $\boldsymbol{\vartheta}_f$ в $\mathbf{\Pi}^1_1$-предикат). Следовательно, существует нетощее борелевское множество $\boldsymbol{B}_q$ ($q \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$) такое, что либо $\boldsymbol{B}_q \subseteq B$, либо $\boldsymbol{B}_q \subseteq \boldsymbol{B}_p \setminus B$.

Случай 1: $\boldsymbol{B}_q \subseteq B$. Тогда $W = \{\langle b, x\rangle : b \in \boldsymbol{B}_q \wedge x \in \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\vartheta}_f(a)}\}$ — тощее подмножество $\boldsymbol{B}_q \times \mathcal{N}$ по теореме Улама–Куратовского, так что найдется $x \in \mathcal{N}$ такое, что множество $A = \{b \in \boldsymbol{B}_q : x \in \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\vartheta}_f(a)}\}$ тощее. Тогда борелевское множество $\boldsymbol{B}_q \setminus A$ нетощее; пусть $r \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$ — его код. По построению мы имеем (в $\mathfrak{M}$) $\forall\, b \in \boldsymbol{B}_r$ $(x \notin \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\vartheta}_f(b)})$. Запомнив это, мы вернемся к этому случаю ниже.

Случай 2: $\boldsymbol{B}_q \subseteq \boldsymbol{B}_p \setminus B$. Это означает, что (в $\mathfrak{M}$) выполнено

$$\forall\, b \in \boldsymbol{B}_c \ \big(\boldsymbol{\vartheta}_f(a) \notin \mathbf{BC} \vee \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\vartheta}_f(a)} \text{ нетощее}\big). \tag{2.2}$$

Рассуждаем в универсуме всех множеств. Если имеет место случай 1, то утверждение $\forall\, b \in \boldsymbol{B}_r$ $(x \notin \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\vartheta}_f(b)})$ истинно (в универсуме) по теореме 1.4, так как эта формула приводится к $\mathit{\Pi}^1_1$-виду с параметрами из $\mathfrak{M}$ при помощи предложений 1.1(ii) и 1.3(ii). Поэтому, взяв согласно лемме 2.5 произвольную точку $b \in \mathtt{Coh}\,\mathfrak{M} \cap \boldsymbol{B}_r$, мы получим $x \notin \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\vartheta}_f(b)}$ в универсуме и в $\mathfrak{M}[b]$ — противоречие с (2.1).

Рассмотрим случай 2. Возьмем любую точку $b \in \mathtt{Coh}\,\mathfrak{M} \cap \boldsymbol{B}_q$ (используется лемма 2.5). Формула (2.2), истинная в $\mathfrak{M}$, приводится к $\mathit{\Pi}^1_2$-виду с параметрами из $\mathfrak{M}$ при помощи предложений 1.3(ii) и 1.1(iv). Поэтому (2.2) истинна и в $\mathfrak{M}[b]$ по теореме 1.4, поскольку обе модели имеют одни и те же ординалы. Следовательно, в $\mathfrak{M}[b]$ либо $\boldsymbol{\vartheta}_f(a) \notin \mathbf{BC}$, либо $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{\vartheta}_f(a)}$ — нетощее множество, что опять противоречит (2.1). Итак, в обоих случаях получается противоречие, доказывающее искомый результат.

(ii) Рассуждения совершенно аналогичны доказательству (i), только меру и категорию нужно поменять местами, а вместо множества W в первой части доказательства взять множество $Z = \{\langle x, y\rangle \colon \langle y, x\rangle \notin W\}$.

(iii) $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ не принадлежит $\mathbf{\Sigma}^1_1 \cup \mathbf{\Pi}^1_1$ в $\mathfrak{M}[a]$ по той простой причине, что любое множество из $\mathbf{\Sigma}^1_1 \cup \mathbf{\Pi}^1_1$ измеримо и имеет свойство Бэра, но по доказанному $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ либо неизмеримо (для случайного расширения), либо не имеет свойства Бэра (в коэновском расширении) в $\mathfrak{M}[a]$.

Вторая часть более сложна. Итак, предполагаем, что $\mathfrak{M}$ совпадает с конструктивным универсумом $\mathbf{L}$. Согласно теореме 2.4(iii) мы имеем $\mathcal{N} \cap \mathbf{L}[a] = \{\boldsymbol{\vartheta}_f(a) \colon f \in \mathbf{BF} \cap \mathbf{L}\}$. Рассмотрим случай, когда a — коэновская точка; случайные точки рассматриваются аналогично. Обозначим через $\Phi(x)$ формулу

$\Phi(x)$: найдутся нетощее борелевское $P \subseteq \mathcal{N}$ с кодом из $\mathbf{L}$, содержащее a, и код $f \in \mathbf{BF} \cap \mathbf{L}$ такие, что $x = \boldsymbol{\vartheta}_f(a)$ и $\forall\, y \in \mathcal{N}$ $(P \cap \boldsymbol{\vartheta}_f^{-1}(y)$ тощее).

Нам нужно доказать два утверждения:

(а) $\Phi(x)$ приводится к $\varSigma^1_2$-виду и

(б) $\mathcal{N} \setminus \mathbf{L} = \{x \colon \Phi(x)\}$ в $\mathbf{L}[a]$.

Для доказательства (а) достаточно заметить, что формула $\Phi(x)$ может быть более формально записана так:

$$\exists\, p\ \exists\, f\ \Big(p \in \mathbf{BC} \cap \mathbf{L}\ \wedge\ \boldsymbol{B}_p \text{ нетощее } \wedge\ a \in \boldsymbol{B}_p\ \wedge\ f \in \mathbf{BF} \cap \mathbf{L}\ \wedge\ \boldsymbol{\vartheta}_f(a) = x\ \wedge$$
$$\wedge\, \forall\, y \in \mathcal{N}\ \big(\text{множество } \{b \in \boldsymbol{B}_p \colon \boldsymbol{\vartheta}_f(b) = y\} \text{ тощее}\big)\Big)$$

(см. обозначения в п. 1б). Однако множества $\mathbf{BC}$ и $\mathbf{BF}$ принадлежат $\varPi^1_1$, множество $\mathcal{N} \cap \mathbf{L}$ принадлежит $\varSigma^1_2$, подформула “$\boldsymbol{B}_p$ нетощее $\wedge\, a \in \boldsymbol{B}_p$” приводится к $\varPi^1_1$-виду благодаря предложению 1.1, подформула “$\boldsymbol{\vartheta}_f(b) = x$” приводится к $\varPi^1_1$-виду (в предположении, что $f \in \mathbf{BF}$; предложение 1.3(ii)). Наконец, подформула

$$\forall\, y \in \mathcal{N}\ \big(\text{множество } \{b \in \boldsymbol{B}_p \colon \boldsymbol{\vartheta}_f(b) = y\} \text{ тощее}\big) \tag{2.3}$$

(с переменными p, f, y) равносильна по теореме Улама–Куратовского тому, что множество $W = \{\langle b, b'\rangle \colon b, b' \in \boldsymbol{B}_p \wedge \boldsymbol{\vartheta}_f(b) = \boldsymbol{\vartheta}_f(b')\} \subseteq \mathcal{N}^2$ тощее, т.е. равносильна следующей формуле с параметром f:

$$\exists\, c\ \Big(c \in \mathbf{BC}\ \wedge\ \boldsymbol{B}_c \text{ тощее } \wedge\ \forall\, b, b'\ \big(b, b' \in \boldsymbol{B}_p \wedge \boldsymbol{\vartheta}_f(b) = \boldsymbol{\vartheta}_f(b')\ \Rightarrow\ h(b, b') \in \boldsymbol{B}_c\big)\Big),$$

где $h \colon \mathcal{N}^2 \xrightarrow{\text{на}} \mathcal{N}$ — гомеоморфизм, заданный равенствами $h(b, b')(2n) = b(n)$ и $h(b, b')(2n+1) = b'(n)$ для всех n. Все конъюнктивные члены внутри внешних скобок выделенной формулы приводимы к $\varPi^1_1$-виду — это следует из предложений 1.3(ii) и 1.1(i), (ii), (iv), причем для достижения нужного результата для каждой из подформул требуется правильный выбор между ее $\varSigma^1_1$-представлением и $\varPi^1_1$-представлением. Таким образом, формула (2.3) приводится к $\varSigma^1_2$-виду[28]. Этим завершено доказательство того, что формула $\Phi(x)$ определяет $\varSigma^1_2(a)$-множество.

Остается проверить (б), т.е. равенство $\{x \colon \Phi(x)\} = \mathcal{N} \setminus \mathbf{L}$ в $\mathbf{L}[a]$.

[28]На самом деле к $\varPi^1_1$-виду при помощи более сложных рассуждений.

Пусть сначала $x \in \mathcal{N} \cap \mathbf{L}$; докажем, что $\Phi(x)$ ложно в $\mathbf{L}[a]$. Предположим противное: $\Phi(x)$ истинно, и пусть борелевское $P = \boldsymbol{B}_p$ с кодом из $\mathbf{L}$ и код $f \in \mathbf{BF} \cap \mathbf{L}$ свидетельствуют истинность $\Phi(x)$, т.е. $a \in P$, $x = \boldsymbol{\vartheta}_f(a)$ и $\boldsymbol{\vartheta}_f^{-1}(y)$ тощее для любого $y \in \mathcal{N}$. В частности, $X = \boldsymbol{\vartheta}_f^{-1}(x)$ — тощее множество, содержащее a. Заметим, что X — множество класса $\varDelta^1_1(f, x)$ (предложение 1.3), следовательно, борелевское множество с кодом из $\mathbf{L}$ по лемме 1.7. Итак, коэновская над $\mathbf{L}$ точка a принадлежит тощему борелевскому множеству с кодом из $\mathbf{L}$ — противоречие.

Теперь возьмем $x \in \mathcal{N} \cap \mathbf{L}[a]$, $x \notin \mathbf{L}$, и докажем, что $\Phi(x)$ истинно в $\mathbf{L}[a]$. Из теоремы 2.4(iii) следует, что $x = \boldsymbol{\vartheta}_f(a)$ для подходящего кода $f \in \mathbf{BF} \cap \mathbf{L}$. Вследствие генеричности a любое свойство $\mathbf{L}[a]$ вынуждается, т.е. найдется нетощее борелевское $P = \boldsymbol{B}_p$ с кодом $p \in \mathbf{BC} \cap \mathbf{L}$, содержащее a и такое, что $\boldsymbol{\vartheta}_f(b) \notin \mathbf{L}$, какова бы ни была коэновская над $\mathbf{L}$ точка $b \in P$. Покажем, что эти P и f обеспечивают выполнение $\Phi(x)$. Требуется доказать, что в $\mathbf{L}[a]$ истинна формула (2.3) (конечно, с новыми значениями f и p).

Как было показано, (2.3) приводится к $\varSigma^1_2$-виду (с параметрами $f, p \in \mathbf{L}$), поэтому по теореме абсолютности достаточно проверить, что (2.3) выполнено в $\mathbf{L}$. Возьмем произвольную точку $y \in \mathcal{N} \cap \mathbf{L}$; требуется установить, что в $\mathbf{L}$ истинно: "множество $\{b \in \boldsymbol{B}_p \colon \boldsymbol{\vartheta}_f(b) = y\}$ тощее". Однако множество, о котором идет речь, принадлежит классу $\varDelta^1_1(p, f, y)$ согласно предложению 1.3, так что его свойство "быть тощим" абсолютно согласно лемме 1.7 (для приведения этого множества к форме $\boldsymbol{B}_c$, $c \in \mathbf{BC} \cap \mathbf{L}$) и следствию 1.5. Тем самым остается проверить, что $Q = \{b \in \boldsymbol{B}_p \colon \boldsymbol{\vartheta}_f(b) = y\}$ — тощее множество в универсуме.

Предположим противное. Поскольку $Q \in \varDelta^1_1(p, f, y)$, мы заключаем, что $Q \subseteq P$ — борелевское множество с кодом из $\mathbf{BC} \cap \mathbf{L}$, причем нетощее. Отсюда следует (лемма 2.5), что Q содержит коэновскую над $\mathbf{L}$ точку, скажем, b. Имеем $\boldsymbol{\vartheta}_f(b) = y \in \mathbf{L}$ — противоречие с выбором P.

(iv) Следует из теоремы в [5], поскольку условие $(*)$ (см. строку 4 табл. 1 во введении) выполнено в этом случае, а при $\mathfrak{M} = \mathbf{L}$ также следует из теоремы 1.12. $\square$

2д. Борелевские множества в многомерных пространствах. Ниже будет показано, как присоединять к заданной модели $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZFC}$ последовательности коэновских или случайных точек. Форсинги, которые здесь участвуют, — это "многомерные" варианты коэновского и случайного форсингов.

Пусть u — непустое множество. Через $\mathcal{N}^u$ обозначается произведение u экземпляров $\mathcal{N}$ с топологией тихоновского произведения. На $\mathcal{N}^u$ известным образом определяется борелевская мера $\boldsymbol{\lambda}^u$ — произведение u экземпляров меры $\boldsymbol{\lambda}$ на $\mathcal{N}$.

Имея дело с пространствами вида $\mathcal{N}^u$, мы будем использовать следующие операции над множествами этих пространств:

$$X \downarrow u = \{x \restriction u \colon x \in X\} \qquad \text{при} \quad u \subseteq v \wedge X \subseteq \mathcal{N}^v;$$

$$X \uparrow u = \{x \in \mathcal{N}^u \colon x \restriction v \in X\} \qquad \text{при} \quad v \subseteq u \wedge X \subseteq \mathcal{N}^v.$$

Скажем, что $X \subseteq \mathcal{N}^v$ есть *борелевское множество со счетной базой*, если найдутся не более чем счетное $u \subseteq v$ и такое $Y \in \mathtt{Borel}(\mathcal{N}^u)$, что $X = Y \uparrow v$. Совокупность всех таких X обозначим через $\mathtt{Borel}_*(\mathcal{N}^v)$. Понятно, что $\mathtt{Borel}_*(\mathcal{N}^v) = \mathtt{Borel}(\mathcal{N}^v)$, когда v не более чем счетно, а иначе $\mathtt{Borel}_*(\mathcal{N}^v)$ образует собственную σ-подалгебру σ-алгебры $\mathtt{Borel}(\mathcal{N}^v)$.

Пусть теперь $\kappa \neq \varnothing$ — произвольное множество. Чтобы ввести кодировку множеств из $\mathtt{Borel}_*(\mathcal{N}^\kappa)$, подобную рассмотренной ранее для $\mathcal{N}$, возьмем какое-нибудь не более чем счетное непустое $u \subseteq \kappa$. Понятно, что найдется биекция $e \colon \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N} \times u$ — условимся называть такую e *u-биекцией*. Обозначим через $\mathcal{E}_u$ множество всех u-биекций и положим $\mathcal{E}_{\subseteq\kappa} = \bigcup_{u \subseteq \kappa} \mathcal{E}_u$ (объединение берется, конечно, по не более чем счетным u). Взяв одну из функций $e \in \mathcal{E}_u$, где $u \subseteq \kappa$ не более чем счетно, можно определить отображение $H_e\colon \mathcal{N}^u \xrightarrow{\text{на}} \mathcal{N}$ таким образом, чтобы $H_e(\mathbf{y}) = x$, когда $\mathbf{y}(a)(k) = x(e(a,k))$ для всех $\mathbf{y} \in \mathcal{N}^u$, $a \in u$, $k \in \mathbb{N}$.

Предложение 2.8. *В этом случае H_e является гомеоморфизмом $\mathcal{N}^u$ на $\mathcal{N}$, переводящим $\boldsymbol{\lambda}^u$ в $\boldsymbol{\lambda}$.* $\square$

Далее положим ${}^e\boldsymbol{B}_c = H_e\,{}''\,\boldsymbol{B}_c = \{H_e(x)\colon x \in \boldsymbol{B}_c\}$ для любого $c \in \mathbf{BC}$, если u и e таковы, как указано. Понятно, что множества вида ${}^e\boldsymbol{B}_c$, $c \in \mathbf{BC}$, составляют семейство $\mathtt{Borel}_*(\mathcal{N}^u) = \mathtt{Borel}(\mathcal{N}^u)$, какова бы ни была u-биекция e, а множества вида ${}^e\boldsymbol{B}_c \!\uparrow\! \mathcal{N}^\kappa$ при произвольном счетном $u \subseteq \kappa$ и $e \in \mathcal{E}_u$, $c \in \mathbf{BC}$ — семейство $\mathtt{Borel}_*(\mathcal{N}^\kappa)$. (Требование счетности базы как раз и введено для того, чтобы такая кодировка была возможна.) Другими словами, кодировка множеств из $\mathtt{Borel}_*(\mathcal{N}^\kappa)$ осуществляется парами вида $\langle e, c\rangle$, где $e \in \mathcal{E}_{\subseteq\kappa}$ и $c \in \mathbf{BC}$.

Соответственно если $e \in \mathcal{E}_u$, где $u \subseteq \kappa$ не более чем счетно, и $f \in \mathbf{BF}$, то определим ${}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(x) = \boldsymbol{\vartheta}_f(H_e^{-1}(x))$ для каждого $x \in \mathcal{N}^u$. Понятно, что $\{{}^e\boldsymbol{\vartheta}_f\colon f \in \mathbf{BF}\}$ есть в точности семейство всех борелевских функций $\vartheta\colon \mathcal{N}^u \to \mathcal{N}$.

Фиксируем для дальнейшего транзитивную модель $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZFC}$ и некоторое множество $\kappa \in \mathfrak{M}$ (например, κ может быть равно $\omega_2^{\mathfrak{M}}$). Если $u \in \mathfrak{M}$, $u \subseteq \kappa$, не более чем счетно в $\mathfrak{M}$, а $e \in \mathfrak{M}$ является u-биекцией, то определим

$$ {}^e\boldsymbol{B}_c^{\mathfrak{M}} = \{x \in \mathfrak{M}\colon \text{ в } \mathfrak{M} \text{ истинно } x \in {}^e\boldsymbol{B}_c\} $$

для каждого кода $c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$. Таким образом,

$$ \begin{aligned} \mathtt{Borel}_*^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N}^\kappa) &= \bigl\{X \in \mathfrak{M}\colon \text{ в } \mathfrak{M} \text{ истинно } X \in \mathtt{Borel}_*(\mathcal{N}^\kappa)\bigr\} = \\ &= \bigl\{({}^e\boldsymbol{B}_c \!\uparrow\! \mathcal{N}^\kappa)^{\mathfrak{M}}\colon e \in \mathcal{E}_{\subseteq\kappa} \cap \mathfrak{M} \wedge c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}\bigr\} \end{aligned} $$

— совокупность всех $\mathfrak{M}$-*борелевских* подмножеств $\mathcal{N}^\kappa$ со счетной (а точнее, очевидно, $\mathfrak{M}$-счетной) базой.

Теперь для всякого $X = ({}^e\boldsymbol{B}_c \!\uparrow\! \mathcal{N}^\kappa)^{\mathfrak{M}} \in \mathtt{Borel}_*^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N}^\kappa)$ (где $e \in \mathcal{E}_{\subseteq\kappa} \cap \mathfrak{M}$, $c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$) мы можем определить $X^{\#} = {}^e\boldsymbol{B}_c \!\uparrow\! \mathcal{N}^\kappa \in \mathtt{Borel}_*(\mathcal{N}^\kappa)$. Здесь, разумеется, необходимо доказать корректность, т.е. если $({}^e\boldsymbol{B}_c \!\uparrow\! \mathcal{N}^\kappa)^{\mathfrak{M}} = ({}^{e'}\boldsymbol{B}_{c'} \!\uparrow\! \mathcal{N}^\kappa)^{\mathfrak{M}}$, то ${}^e\boldsymbol{B}_c \!\uparrow\! \mathcal{N}^\kappa = {}^{e'}\boldsymbol{B}_{c'} \!\uparrow\! \mathcal{N}^\kappa$ (при условии, что $e, e' \in \mathcal{E}_{\subseteq\kappa} \cap \mathfrak{M}$ и $c, c' \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}$). Пусть множества $u, u' \in \mathfrak{M}$ таковы, что e является u-биекцией а e' — u'-биекцией (тогда $u, u' \subseteq \kappa$ не более чем счетны). Вопрос о корректности, очевидно, сводится к случаю, когда $u, u' \subseteq \mathbb{N}$. В этом случае равенство ${}^e\boldsymbol{B}_c \!\uparrow\! \mathcal{N}^\kappa = {}^{e'}\boldsymbol{B}_{c'} \!\uparrow\! \mathcal{N}^\kappa$ равносильно как в $\mathfrak{M}$, так и в универсуме равенству ${}^e\boldsymbol{B}_c \!\uparrow\! \mathcal{N}^{\mathbb{N}} = {}^{e'}\boldsymbol{B}_{c'} \!\uparrow\! \mathcal{N}^{\mathbb{N}}$, которое без труда выражается $\varPi^1_1$-формулой при помощи формул, даваемых предложением 1.1(ii). Отсюда и следует абсолютность.

2е. Присоединение многих коэновских или случайных точек. В этом пункте доказываются результаты, содержащиеся в строках 9 и 11 табл. 2 во введении. Чтобы не повторяться, фиксируем транзитивную модель $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZFC}$. Для любого (возможно, несчетного в $\mathfrak{M}$) множества $u \in \mathfrak{M}$ положим

$$ \begin{aligned} \mathbf{C}_u &= \bigl\{X \subseteq \mathcal{N}^u\colon X \in \mathtt{Borel}_*(\mathcal{N}^u) \wedge X \text{ нетощее в } \mathcal{N}^u\bigr\}, \\ \mathbf{B}_u &= \bigl\{X \subseteq \mathcal{N}^u\colon X \in \mathtt{Borel}_*(\mathcal{N}^u) \wedge \boldsymbol{\lambda}^u(X) > 0\bigr\}. \end{aligned} $$

Следующее определение вводит $\mathfrak{M}$-версии этих множеств:

$$ \mathbf{C}_u^{\mathfrak{M}} = \{X \in \mathfrak{M}\colon X \in \mathbf{C}_u \text{ в } \mathfrak{M}\} \qquad \text{и} \qquad \mathbf{B}_u^{\mathfrak{M}} = \{X \in \mathfrak{M}\colon X \in \mathbf{B}_u \text{ в } \mathfrak{M}\}. $$

Оба этих множества принадлежат $\mathfrak{M}$ и включены в $\mathtt{Borel}_*^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N}^u)$. Мы будем их рассматривать как форсинги над $\mathfrak{M}$ с естественным порядком $X \le Y$, когда $X \subseteq Y$. (При этом $X \le Y$

означает, что “условие” X сильнее, чем Y.) Форсинги $\mathbf{C}_u^{\mathfrak{M}}$ и $\mathbf{B}_u^{\mathfrak{M}}$ приводят к генерическим расширениям, которые во многом идентичны рассмотренным выше коэновским и случайным расширениям с точки зрения дескриптивных свойств множества $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$, но в которых континуум-гипотеза неверна.

Следующее предложение аналогично предложению 2.3 (или лемме 4.12 в [12]).

Предложение 2.9. *Пусть множество $G \subseteq \mathbf{C}_u^{\mathfrak{M}}$ является $\mathbf{C}_u^{\mathfrak{M}}$-генерическим над $\mathfrak{M}$. Тогда пересечение $\bigcap_{X\in G} X^{\#}$ содержит единственную точку пространства $\mathcal{N}^u$ — она будет обозначаться через $\mathbf{a}_G$. При этом выполняются равенства $G = \{X \in \mathbf{C}_u^{\mathfrak{M}} \colon \mathbf{a}_G \in X^{\#}\}$ и $\mathfrak{M}[\mathbf{a}_G] = \mathfrak{M}[G]$. То же для форсинга $\mathbf{B}_u^{\mathfrak{M}}$.* $\square$

Точки вида $\mathbf{a}_G \in \mathcal{N}^u$, где множество $G \subseteq \mathbf{C}_u^{\mathfrak{M}}$ является $\mathbf{C}_u^{\mathfrak{M}}$-генерическим над $\mathfrak{M}$ (соответственно $G \subseteq \mathbf{B}_u^{\mathfrak{M}}$ является $\mathbf{B}_u^{\mathfrak{M}}$-генерическим над $\mathfrak{M}$), будут называться *u-коэновскими* (соответственно *u-случайными*) над $\mathfrak{M}$. В этом случае согласно утверждению (v) следующей теоремы точки $\mathbf{a}_G(\xi)$, $\xi \in u$, попарно различны и являются коэновскими (соответственно случайными) над $\mathfrak{M}$, поэтому о расширении $\mathfrak{M}[G] = \mathfrak{M}[\mathbf{a}_G]$ говорят, что оно *получено присоединением u коэновских (случайных) точек к $\mathfrak{M}$* или просто является *u-коэновским (u-случайным)*.

Теорема 2.10 (ср. с теоремой 2.4). *Пусть $\kappa \in \mathfrak{M}$ — ординал (возможно, несчетный в $\mathfrak{M}$), а $\mathbf{a} \in \mathcal{N}^\kappa$ является κ-коэновской точкой над $\mathfrak{M}$. Тогда*

(i) *кардиналы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}[\mathbf{a}]$ совпадают;*

(ii) *если $x \in \mathfrak{M}[\mathbf{a}] \cap \mathcal{N}$, то найдется множество $u \in \mathfrak{M}$, $u \subseteq \kappa$, счетное в $\mathfrak{M}$ и такое, что $x \in \mathfrak{M}[\mathbf{a}\restriction u]$;*

(iii) *если $u \in \mathfrak{M}$, $u \subseteq \kappa$, то $\mathbf{a}\restriction u \in \mathcal{N}^u$ является u-коэновской точкой над $\mathfrak{M}$;*

(iv) *если множество $u \in \mathfrak{M}$, $u \subseteq \kappa$, счетно в $\mathfrak{M}$, а $e \in \mathfrak{M}$ есть u-биекция, то точка $a = H_e^{-1}(\mathbf{a}\restriction u) \in \mathcal{N}$ является коэновской над $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}[\mathbf{a}\restriction u] = \mathfrak{M}[a]$;*

(v) *точки $\mathbf{a}(\xi)$, $\xi < \kappa$, являются попарно различными коэновскими точками $\mathcal{N}$ над $\mathfrak{M}$; более того, если $u \in \mathfrak{M}$, $u \subseteq \kappa$ не более чем счетно в $\mathfrak{M}$ и $\xi \in \kappa \setminus u$, то $\mathbf{a}(\xi)$ — коэновская точка даже над $\mathfrak{M}[\mathbf{a}\restriction u]$.*

То же для $\mathbf{B}$ и “случайная” везде вместо $\mathbf{C}$ и “коэновская”[29].

Доказательство (набросок). Прежде всего $\mathbf{B}$-вариант теоремы доказывается вполне аналогично $\mathbf{C}$-варианту (с очевидными поправками, например, вместо тощих множеств в $\mathcal{N}^\kappa$ рассматриваются множества $\boldsymbol{\lambda}^\kappa$-меры 0). Поэтому мы сосредоточимся на $\mathbf{C}$-варианте.

(i) С точки зрения модели $\mathfrak{M}$ форсинг $\mathbf{C}_\kappa^{\mathfrak{M}}$ есть $\mathbf{C}_\kappa$ — совокупность всех нетощих борелевских $X \subseteq \mathcal{N}^\kappa$ со счетной базой. Поэтому любая антицепь $\mathcal{A} \in \mathfrak{M}$, $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{C}_\kappa^{\mathfrak{M}}$, не более чем счетна в $\mathfrak{M}$. (Антицепью в $\mathbf{C}_\kappa^{\mathfrak{M}}$ является любое множество $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{C}_\kappa^{\mathfrak{M}}$ такое, что $X \cap Y$ тощее для любых двух $X \neq Y$ из $\mathcal{A}$.) Иными словами, $\mathbf{C}_\kappa^{\mathfrak{M}}$ удовлетворяет УСА (условию счетности антицепей) в $\mathfrak{M}$. Отсюда, как известно, следует сохранение кардиналов.

(ii) Пусть $\check{x}$ — какое-нибудь имя x. *Рассуждая в $\mathfrak{M}$*, положим

$$D_{nk} = \bigl\{X \in \mathbf{C}_\kappa \colon X \text{ вынуждает } \check{x}(\check{n}) = \check{k}\bigr\} \qquad \text{и} \qquad D_n = \bigcup_k D_{nk}\,,$$

выберем в каждом D_n максимальную антицепь $\mathcal{A}_n \subseteq D_n$ и положим $\mathcal{A}_{nk} = \mathcal{A}_n \cap D_{nk}$. В силу УСА (см. выше) все $\mathcal{A}_n$ не более чем счетны, а потому найдется счетное (в $\mathfrak{M}$) множество

[29] Свойства “коэновских” и “случайных” расширений все же не вполне идентичны. Например, форсинг $\mathbf{C}_\kappa$ равносилен (в том смысле, что соответствующие генерические расширения совпадают) произведению с конечной поддержкой κ экземпляров форсинга $\mathbf{C}$, в то время как для случайного форсинга аналогичный факт не имеет места; более того, произведение уже двух экземпляров форсинга $\mathbf{B}$ порождает коэновские точки и потому вообще теряет тип случайного форсинга. На самом деле $\mathbf{B}_\kappa$-генерические расширения могут быть представлены через *итерацию* (со счетной поддержкой), а не через произведение форсингов $\mathbf{B}$.

$u \subseteq \kappa$ такое, что каждое $X \in \bigcup_n \mathcal{A}_n$ имеет вид $X = U \uparrow \kappa$ для некоторого борелевского $U \subseteq \mathcal{N}^u$. Отсюда нетрудно вывести, что $x(n) = k$ равносильно $\exists\, X \in \mathcal{A}_{nk}$ $(\mathbf{a} \in X^{\#})$, что и доказывает $x \in \mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u]$.

(iii) Достаточно проверить, что если множество $D \subseteq \mathbf{C}_u^{\mathfrak{M}}$ плотно в $\mathbf{C}_u^{\mathfrak{M}}$, то $D' = \{X \in \mathbf{C}_\kappa^{\mathfrak{M}}\colon X \downarrow u \in D\}$ плотно в $\mathbf{C}_\kappa^{\mathfrak{M}}$. *Рассуждаем в* $\mathfrak{M}$; таким образом, $\mathbf{C}_\kappa^{\mathfrak{M}}$ и $\mathbf{C}_u^{\mathfrak{M}}$ становятся просто $\mathbf{C}_\kappa$ и соответственно $\mathbf{C}_u$. Рассмотрим произвольное $Y \in \mathbf{C}_\kappa^{\mathfrak{M}}$. По определению Y — борелевское множество со счетной базой. Поэтому найдутся счетное (в $\mathfrak{M}$) $v \subseteq \kappa$ и борелевское $V \subseteq \mathcal{N}^v$ такие, что $Y = V \uparrow \kappa$. Можно считать, что $u \subseteq v$, иначе берем $V \uparrow w$ вместо V, где $w = u \cup v$. Заметим, что V не может быть тощим (иначе Y было бы тощим, но $Y \in \mathbf{C}_\kappa$). Следовательно, $V \downarrow u$ — нетощее суслинское подмножество $\mathcal{N}^u$, более того, по теореме Улама–Куратовского (аналог теоремы Фубини) множество

$$U = \big\{x \in \mathcal{N}^u\colon\ Y_x = \{y \in Y : y \restriction u = x\} \text{ нетощее}\big\}$$

борелевское (согласно следствию 1.2) и нетощее в $\mathcal{N}^u$. Вследствие плотности D найдется множество $U' \in D$, $U' \subseteq U$. Снова по теореме Улама–Куратовского борелевское множество $V' = \{z \in V : z \restriction u \in U'\}$ нетощее, т.е. принадлежит $\mathbf{C}_v$. Но тогда $Y' = V' \uparrow \kappa$ — также нетощее множество, поэтому $Y' \in \mathbf{C}_\kappa^{\mathfrak{M}}$. Наконец, по построению $Y' \subseteq Y$ и $Y' \downarrow u = U' \in D$, так что $Y' \in D'$, что и требовалось.

(iv) Используем предложение 2.8.

(v) Если $\xi \neq \eta < \kappa$, то множество всех $X \in \mathbf{C}_\kappa^{\mathfrak{M}}$ таких, что для некоторого n и пары $k \neq l$ мы имеем $x(\xi)(n) = k$ и $x(\eta)(n) = l$ для всех $x \in X$, плотно в $\mathbf{C}_\kappa^{\mathfrak{M}}$, что доказывает $\mathbf{a}(\xi) \neq \mathbf{a}(\eta)$. Генеричность $\mathbf{a}(\xi)$ следует из (iii) при $u = \{\xi\}$. Для доказательства последней части (v) предположим противное и выведем противоречие. Согласно теореме 2.4(i) предположение противного означает, что $\mathbf{a}(\xi)$ принадлежит некоторому тощему борелевскому множеству $\boldsymbol{B}_c$ с кодом $c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u]$. Фиксируем u-биекцию $e \in \mathfrak{M}$. Согласно теореме 2.4(iii) найдется код $f \in \mathbf{BF} \cap \mathfrak{M}$ такой, что $c = {}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(\mathbf{a} \restriction u) = \boldsymbol{\vartheta}_f({H_e}^{-1}(\mathbf{a} \restriction u))$.

Пусть для краткости $v = u \cup \{\xi\}$. Для следующего ниже фрагмента доказательства нам будет удобно представлять точки $z \in \mathcal{N}^v$ в виде пар $z = \langle x, y\rangle$, где $x = z \restriction u \in \mathcal{N}^u$ и $y = z(\xi) \in \mathcal{N}$. В силу генеричности $\mathbf{a}$ найдется множество $P \in \mathbf{C}_v^{\mathfrak{M}}$ такое, что $\mathbf{a} \restriction v \in P^{\#}$ и мы имеем

$(*)$ для всякой v-коэновской над $\mathfrak{M}$ точки $z = \langle x, y\rangle \in P^{\#}$ (т.е. $z = \mathbf{a}_{G'}$ для некоторого $\mathbf{C}_v^{\mathfrak{M}}$-генерического над $\mathfrak{M}$ множества $G' \subseteq \mathbf{C}_v^{\mathfrak{M}}$) выполнено: $c(z) = {}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(x)$ принадлежит $\mathbf{BC}$, $y \in \boldsymbol{B}_{c(z)}$ и $\boldsymbol{B}_{c(z)}$ — тощее множество.

Заметим, что в $\mathfrak{M}$ борелевские множества

$$Q = \big\{\langle x, y\rangle \in P\colon\ y \notin \boldsymbol{B}_{{}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(x)}\big\} \qquad \text{и} \qquad R = \big\{\langle x, y\rangle \in P\colon\ \boldsymbol{B}_{{}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(x)} \text{ нетощее}\big\}$$

оба тощие. (Если Q нетощее в $\mathfrak{M}$, то по лемме 2.5 найдется $\mathbf{C}_v^{\mathfrak{M}}$-генерическая над $\mathfrak{M}$ точка $z = \{x, y\} \in Q^{\#}$. Формула, определяющая Q, приводится к Σ_1^1-виду при помощи предложения 1.3(ii). Тем самым по теореме абсолютности $y \notin \boldsymbol{B}_{{}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(x)}$, что противоречит $(*)$. Если же R нетощее, то аналогичные рассуждения ведут к противоречию с другой частью $(*)$.) Тем самым в $\mathfrak{M}$ борелевское множество $W = P \setminus (Q \cup R)$ нетощее. В то же время понятно, что по построению все сечения $W_x = \{y\colon \langle x, y\rangle \in W\}$ — тощие множества, что противоречит теореме Улама–Куратовского. $\square$

Наиболее важным для нас положением теоремы 2.10 является то, что независимо от выбора $\mathbf{C}_\kappa^{\mathfrak{M}}$-генерического (или $\mathbf{B}_\kappa^{\mathfrak{M}}$-генерического) над $\mathfrak{M}$ множества G каждая точка $x \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}[G]$ принадлежит некоторому коэновскому (соответственно случайному) расширению $\mathfrak{M}$ (т.е. расширению одной коэновской или случайной точкой) — это следует из утверждений (ii), (iii), (iv).

Это позволяет выводить многие свойства множества $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ в κ-коэновских и κ-случайных расширениях из его свойств в простых коэновских и случайных расширениях.

Следствие 2.11. *Если κ — ординал в транзитивной модели $\mathfrak{M} \models$ **ZFC**, то*

(i) *в любом κ-коэновском расширении модели $\mathfrak{M}$ истинно, что множество $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ имеет $\boldsymbol{\lambda}$-меру 0, но не имеет свойства Бэра; более того, ни $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$, ни $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$ не содержат нетощих борелевских подмножеств;*

(ii) *в любом κ-случайном расширении $\mathfrak{M}$ истинно, что $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ тощее и $\boldsymbol{\lambda}$-неизмеримое, более того, имеет верхнюю меру 1 и нижнюю меру 0;*

(iii) *в обоих случаях в расширении истинно, что $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ не содержит совершенных подмножеств;*

(iv) *в обоих случаях если κ несчетно в $\mathfrak{M}$, то в расширении истинно, что $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ не является множеством класса $\boldsymbol{\Pi}^1_2$.*

Доказательство. (i) Пусть $\mathbf{a} \in \mathcal{N}^\kappa$ является κ-коэновской точкой над $\mathfrak{M}$. Для доказательства того, что $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ имеет $\boldsymbol{\lambda}$-меру 0 в $\mathfrak{M}[\mathbf{a}]$, возьмем произвольное $\xi < \kappa$. Тогда $z = \mathbf{a}(\xi)$ — коэновская над $\mathfrak{M}$ точка, принадлежащая $\mathfrak{M}[\mathbf{a}]$. Из теоремы 2.7(i) следует, что $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ — множество меры 0 в $\mathfrak{M}[z]$; другими словами, найдется борелевский код $c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}[z]$ такой, что в $\mathfrak{M}[z]$ истинно “$\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{B}_c) = 0$ и $y \in \boldsymbol{B}_c$” для любого $y \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$. Однако формула в кавычках приводится к $\varSigma^1_1$-виду (равно как и к $\varPi^1_1$-виду) благодаря предложению 1.1(ii), (iv). Отсюда по теореме абсолютности 1.4 следует, что $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ — множество меры 0 и в более широкой модели $\mathfrak{M}[\mathbf{a}]$.

Докажем теперь, что, скажем, $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ не имеет нетощих борелевских подмножеств в $\mathfrak{M}[\mathbf{a}]$. Предположим противное. Поскольку “$\boldsymbol{B}_c$ тощее” — абсолютная формула (следствие 1.5), найдется код $c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}[\mathbf{a}]$ такой, что $\boldsymbol{B}_c$ — нетощее (борелевское) множество и $\boldsymbol{B}_c \subseteq \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}[\mathbf{a}]$. Теорема 2.10(ii) влечет $c \in \mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u]$ для некоторого не более чем счетного в $\mathfrak{M}$ множества $u \subseteq \kappa$, $u \in \mathfrak{M}$. Тем самым и в $\mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u]$ истинно, что $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ имеет нетощее борелевское подмножество в модели $\mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u]$. Однако последняя представляет собой коэновское расширение $\mathfrak{M}$ по теореме 2.10(iv) и мы имеем противоречие с теоремой 2.7(i).

(ii) Доказывается аналогично.

(iii) Доказывается редукцией к теореме 2.7(iv) аналогично утверждению (i).

(iv) Пусть, напротив, $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ является $\boldsymbol{\Pi}^1_2$-множеством в $\mathfrak{M}[\mathbf{a}]$, где $\mathbf{a} \in \mathcal{N}^\kappa$ является κ-коэновской точкой над $\mathfrak{M}$. По теореме 2.10(ii) найдется не более чем счетное в $\mathfrak{M}$ множество $u \subseteq \kappa$, $u \in \mathfrak{M}$, такое, что все параметры соответствующего определения принадлежат $\mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u]$. Другими словами, в $\mathfrak{M}[\mathbf{a}]$ истинно, что $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ — множество класса $\varPi^1_2(\mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u])$, т.е. $\varPi^1_2(p)$ для подходящего $p \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u]$. Соответственно $C = \mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$ — множество класса $\varSigma^1_2(p)$. Отсюда следует, что C является в $\mathfrak{M}[\mathbf{a}]$ объединением $C = \bigcup_{\alpha < \omega_1} X_\alpha$, где каждое X_α — борелевское множество с кодом из $\mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u]$. (*Рассуждаем в* $\mathfrak{M}[\mathbf{a}]$. Как и любое $\varSigma^1_2(p)$-множество, C есть проекция некоторого $\varPi^1_1(p)$-множества $P \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$. Последнее разбивается на борелевские конституанты $P = \bigcup_{\gamma < \omega_1} P_\gamma$, причем каждое P_γ принадлежит $\varDelta^1_1(p, w)$, каков бы ни был код w ординала γ (см., например, предложение 1.11(iii) в [12]). Однако, поскольку $\omega_1 = \omega_1^{\mathfrak{M}}$ в $\mathfrak{M}[G]$ (теорема 2.10(i)), любой ординал $\gamma < \omega_1$ имеет код $w \in \mathfrak{M}$. Отсюда следует, что каждое P_γ является $\varDelta^1_1(\mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u])$-множеством, а его проекция C_γ — соответственно множеством класса $\varSigma^1_1(\mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u])$. По той же причине, что и выше, мы имеем $C_\gamma = \bigcup_{\eta < \omega_1} C_{\gamma\eta}$, где каждое $C_{\gamma\eta}$ есть $\varDelta^1_1(\mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u])$-множество, так что $C = \bigcup_{\gamma, \eta < \omega_1} C_{\gamma\eta}$ становится объединением $\aleph_1$ множеств класса $\varDelta^1_1(\mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u])$. Остается сослаться на лемму 1.7.)

Поскольку κ несчетно, а u не более чем счетно в $\mathfrak{M}$, найдется $\xi \in \kappa \setminus u$. Таким образом, мы получим искомое противоречие, если докажем следующее:

$(**)$ если множество $u \in \mathfrak{M}$, $u \subseteq \kappa$, не более чем счетно в $\mathfrak{M}$, $\xi \in \kappa \setminus u$ и борелевский код $c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u]$ удовлетворяет $\boldsymbol{B}_c \cap \mathfrak{M} = \varnothing$, то $\mathbf{a}(\xi) \notin \boldsymbol{B}_c$.

Для доказательства $(**)$ напомним, что $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ не имеет свойства Бэра (в $\mathfrak{M}[\mathbf{a}]$) согласно (i), поэтому ни оно, ни его дополнение $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$ не содержат нетощих борелевских множеств по лемме 1.9(i). Отсюда следует, что множество $\boldsymbol{B}_c$ тощее. Однако, раз $\xi \notin u$, $x = \mathbf{a}(\xi)$ является коэновской точкой над $\mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u]$ (по теореме 2.10(v)), которая не принадлежит ни одному тощему борелевскому множеству с кодом из $\mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction u]$, в частности, не принадлежит $\boldsymbol{B}_c$, что и требовалось. $\square$

3. САКСОВСКИЕ ГЕНЕРИЧЕСКИЕ РАСШИРЕНИЯ

В этом разделе мы доказываем результаты в строках 12 и 13 табл. 2 во введении. Саксовский форсинг, или форсинг при помощи совершенных множеств, введенный в [23], в значительной мере отличается по своим основным свойствам от форсингов Коэна и Соловея — в частности, он не удовлетворяет УСА. Однако после вывода некоторых базовых теорем (более сложных в “многомерном” варианте) доказательство интересующих нас здесь результатов 12 и 13 становится достаточно похожим, по крайней мере в некоторых частях, на соответствующие выкладки из разд. 2.

3а. Присоединение одной саксовской точки. *Саксовским форсингом*[30] называется множество $\mathbf{S}$ всех совершенных подмножеств канторова дисконтинуума $\mathcal{C} = 2^\omega$. Зафиксируем для дальнейшего транзитивную модель $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZFC}$. Определяется релятивизованный вариант

$$\mathbf{S}^{\mathfrak{M}} = \{X \in \mathfrak{M} \colon \text{ в } \mathfrak{M} \text{ истинно } X \in \mathbf{S}\},$$

который собственно и служит для генерических расширений этой модели $\mathfrak{M}$. Множества $\mathbf{S}$ и $\mathbf{S}^{\mathfrak{M}}$ упорядочиваются по включению: $X \le Y$ (т.е. X сильнее, чем Y, как вынуждающее “условие”), когда $X \subseteq Y$.

Заметим, что если $X \in \mathbf{S}^{\mathfrak{M}}$, то в универсуме $X^\#$ является топологическим замыканием X в $\mathcal{N}$ по лемме 1.8(iii). Следующее предложение аналогично предложению 2.3, хотя здесь благодаря генеричности речь идет о пересечении центрированного семейства совершенных множеств, содержащего множества сколь угодно малого диаметра.

Предложение 3.1. *Пусть множество $G \subseteq \mathbf{S}^{\mathfrak{M}}$ является $\mathbf{S}^{\mathfrak{M}}$-генерическим над $\mathfrak{M}$. Тогда пересечение $\bigcap_{X \in G} X^\#$ содержит единственную точку $\mathcal{C}$, обозначаемую через a_G. При этом $G = \{P \in \mathbf{S}^{\mathfrak{M}} \colon a_G \in P^\#\}$ и $\mathfrak{M}[a_G] = \mathfrak{M}[G]$.* $\square$

Точки вида a_G, порожденные $\mathbf{S}^{\mathfrak{M}}$-генерическими над $\mathfrak{M}$ множествами $G \subseteq \mathbf{S}^{\mathfrak{M}}$, называются *саксовскими над* $\mathfrak{M}$. Множество всех саксовских точек над $\mathfrak{M}$ обозначается через $\mathtt{Sax}\,\mathfrak{M}$.

Альтернативные определения. Саксовский форсинг допускает равносильное определение как множество $\mathbb{S}$ всех деревьев $T \subseteq 2^{<\omega}$ таких, что множество $[T] = \{x \in 2^\omega : \forall\, n\,(x \restriction n \in T)\}$ — совершенное подмножество 2^ω, а в релятивизованной форме $\mathbb{S}^{\mathfrak{M}} = \mathbb{S} \cap \mathfrak{M}$ для любой транзитивной модели $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZFC}$.

Второе альтернативное определение возвращает нас к общей конструкции п. 2а. Идеал $\mathcal{I}_{\mathtt{count}} = \{X \subseteq \mathcal{N} \colon \operatorname{\mathtt{card}} X \le \aleph_0\}$ всех не более чем счетных подмножеств $\mathcal{N}$ является, очевидно, σ-идеалом, более того, по лемме 1.8 даже $\mathfrak{M}$-абсолютным σ-идеалом (в смысле определения 2.2) для любой транзитивной модели $\mathfrak{M}$. Этим определяются форсинг $\mathbf{P}_{\mathcal{I}_{\mathtt{count}}} = \mathtt{Borel}(\mathcal{N}) \setminus \mathcal{I}_{\mathtt{count}}$, состоящий из всех несчетных борелевских множеств, и его релятивизованные варианты $\mathbf{P}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{I}_{\mathtt{count}}}$ по общей схеме. Раз каждое несчетное борелевское множество включает совершенное подмножество, форсинги $\mathbf{P}_{\mathcal{I}_{\mathtt{count}}}$ и $\mathbf{S}$ равносильны. В то же время, поскольку $\mathcal{I}_{\mathtt{count}}$ не является УСА-

[30] Называется также *форсингом совершенными множествами.*

идеалом, теорема 2.4(i) в этом случае неприменима и фактически равенство $\mathtt{Sax}\,\mathfrak{M} = \mathtt{Rand}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{I}_{\mathtt{count}}}$ не имеет места. В самом деле, $\mathtt{Rand}^{\mathfrak{M}}_{\mathcal{I}_{\mathtt{count}}} = \mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$; это следует из того, что $X = X^{\#}$ для любого счетного $X \in \mathtt{Borel}^{\mathfrak{M}}(\mathcal{N})$. В то же время $\mathtt{Sax}\,\mathfrak{M}$ составляет собственное подмножество $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$.

Доказательство результатов в строке 12 табл. 2 из введения мы начинаем со следующих двух лемм. Первая из них (ср. с леммой 2.5) выражает однородность множества $\mathtt{Sax}\,\mathfrak{M}$, а вторая представляет важное свойство $\mathbf{S}$ как форсинга, в известной мере компенсирующее отсутствие УСА здесь.

Лемма 3.2. *Если* $\mathtt{Sax}\,\mathfrak{M} \neq \varnothing$ *и* $X \in \mathbf{S}^{\mathfrak{M}}$, *то* $X^{\#} \cap \mathtt{Sax}\,\mathfrak{M} \neq \varnothing$.

Доказательство. Множество $Y = X^{\#}$, как совершенное подмножество пространства $\mathcal{C} = 2^{\omega}$, гомеоморфно $\mathcal{C}$, причем найдется гомеоморфизм $\vartheta\colon \mathcal{C} \xrightarrow{\text{на}} Y$ с кодом из $\mathfrak{M}$. Нетрудно проверить, что ϑ отображает $\mathtt{Sax}\,\mathfrak{M}$ в $\mathtt{Sax}\,\mathfrak{M}$. $\square$

Напомним, что множество $D \subseteq \mathbf{S}$ *открыто и плотно в* $\mathbf{S}$, когда

$$\forall\, X \in \mathbf{S}\; \exists\, Y \in D\; (Y \subseteq X) \qquad \text{и} \qquad \forall\, X \in \mathbf{S}\; \forall\, Y \in D\; (X \subseteq Y \;\Rightarrow\; X \in D)$$

(первое условие выражает плотность, а второе открытость). Если X — точечное множество, а D — семейство точечных множеств, то $X \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigcup D$ будет означать, что найдется конечное подсемейство $D' \subseteq D$, состоящее из попарно дизъюнктных множеств, такое, что $X \subseteq \bigcup D'$ ($\mathtt{fd}$ от “finite disjoint”).

Лемма 3.3. *Пусть* $X_0 \in \mathbf{S}$ *и множества* D_n, $n \in \mathbb{N}$, *открыты и плотны в* $\mathbf{S}$. *Тогда найдется* $X \in \mathbf{S}$, $X \subseteq X_0$, *такое, что* $X \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigcup D_n$ *при любом* n.

Доказательство. В силу открытости и плотности множеств D_n не составляет труда построить систему совершенных множеств $X_s \in \mathbf{S}$ ($s \in 2^{<\omega}$) такую, что

(1) $X_\Lambda \subseteq X_0$ и $X_s \in D_n$ всякий раз, когда $s \in {}^{n}2$;

(2) $X_{s^\wedge i} \subseteq X_s$ и $X_{s^\wedge 0} \cap X_{s^\wedge 1} = \varnothing$ для всех $s \in 2^{<\omega}$ и $i = 0, 1$;

(3) если $s \in {}^{n}2 = \{t \in 2^{<\omega}\colon\ \mathtt{lh}\, t = n\}$, то диаметр X_s не превосходит $\frac{1}{1+n}$.[31]

Остается положить $Y = \bigcap_n \bigcup_{s \in {}^{n}2} X_s$. $\square$

Теорема 3.4. *Если* $a \in \mathtt{Sax}\,\mathfrak{M}$, *то мы имеем*

(i) $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1^{\mathfrak{M}[a]}$;[32]

(ii) *если* $y \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}[a]$, *то найдется код* $f \in \mathbf{BF} \cap \mathfrak{M}$ *такой, что* $y = \boldsymbol{\vartheta}_f(a)$.

Кроме того, в $\mathfrak{M}[a]$ *истинно, что множество* $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$

(iii) *не имеет свойства Бэра*; *более того, ни* $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$, *ни* $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$ *не содержат нетощих борелевских подмножеств*;

(iv) $\boldsymbol{\lambda}$*-неизмеримо, более того, имеет верхнюю меру* 1 *и нижнюю меру* 0;

(v) *не принадлежит* $\mathbf{\Sigma}^1_1 \cup \mathbf{\Pi}^1_1$, *а если* $\mathfrak{M} = \mathbf{L}$, *то* $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M} = \mathcal{N} \cap \mathbf{L}$ — *множество класса* $\Delta^1_2(a)$;

(vi) *не содержит совершенных подмножеств.*

Доказательство. По определению выполняется $a = a_G$, где множество $G \subseteq \mathbf{S}^{\mathfrak{M}}$ является $\mathbf{S}^{\mathfrak{M}}$-генерическим над $\mathfrak{M}$.

[31] Диаметром множества $Z \subseteq \mathcal{N}$ называется $\frac{1}{n+1}$, где n есть наибольшее число такое, что мы имеем $z \restriction n = z' \restriction n$ всякий раз, когда z и z' принадлежат Z.

[32] В отличие от теорем 2.4(ii) и 2.10(i) кардиналы λ модели $\mathfrak{M}$ в интервале $\omega_1^{\mathfrak{M}} < \lambda \leq \mathfrak{c}^{\mathfrak{M}}$ не обязательно сохраняются в саксовских расширениях $\mathfrak{M}$, если в $\mathfrak{M}$ неверна континуум-гипотеза.

(i) *Рассуждаем в* $\mathfrak{M}$. Пусть $g \in \mathfrak{M}[G]$ отображает $\mathbb{N}$ в Ord. Зафиксируем имя $\breve{g} \in \mathfrak{M}$ функции g. Требуется доказать, что для всякого $X_0 \in \mathbf{S}$ найдутся "условие" $X \in \mathbf{S}$, $X \subseteq X_0$, и не более чем счетное $R \subseteq \mathrm{Ord}$ такие, что X вынуждает $\mathtt{ran}\,\breve{g} \subseteq \breve{R}$. (Вынуждение означает $\mathbf{S}^{\mathfrak{M}}$-вынуждение над $\mathfrak{M}$.) Применив (в $\mathfrak{M}$) лемму 3.3 к семейству множеств $D_n = \{X \in \mathbf{S}\colon X \text{ решает } \breve{g}(\breve{n})\}$, мы находим "условие" $X \in \mathbf{S}$, $X \subseteq X_0$, такое, что $X \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigcup D_n\ \forall n$, в частности, для любого n найдется конечное $D'_n \subseteq D_n$ такое, что $X \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigcup D'_n$. По определению любое $Y \in D'_n$ вынуждает $\breve{g}(\breve{n}) = \breve{x}$ для какого-то $x = x_Y$. Положим $R = \bigcup_n \{x_Y : Y \in D'_n\}$.

(ii) *Рассуждаем в* $\mathfrak{M}$. Пусть $\breve{y}$ — какое-то имя точки y. Применив (в $\mathfrak{M}$) лемму 3.3 к произвольному $X_0 \in \mathbf{S}$ и множествам $D_n = \{X \in \mathbf{S}\colon X \text{ решает } \breve{y}(\breve{n})\}$, мы находим "условие" $X \in \mathbf{S}$, $X \subseteq X_0$, такое, что $X \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigcup D_n\ \forall n$, т.е. для любого n найдется конечное $D'_n \subseteq D_n$, состоящее из попарно дизъюнктных множеств и такое, что $X \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigcup D'_n$. Определяем на совершенном множестве X непрерывную функцию $\vartheta\colon X \to \mathcal{N}$ условием: $\vartheta(z)(n) = k$ всякий раз, когда найдется $Y \in D'_n$ такое, что $z \in Y$ и Y вынуждает $\breve{y}(\breve{n}) = \breve{k}$. Функцию ϑ можно продолжить до непрерывной функции, определенной на $\mathcal{N}$, т.е. найдется код $f \in \mathbf{BF}$ такой, что $\boldsymbol{\vartheta}_f \restriction Y = \vartheta$. Нетрудно убедиться, что Y вынуждает $\breve{y} = \boldsymbol{\vartheta}_f(\breve{a})$, где $\breve{a}$ — имя для a_G. Учитывая произвольность X_0 в этом рассуждении, мы имеем искомый результат.

(iii) Положим $F_z = \mathcal{N} \setminus \bigcup_{z(n)=0} \mathcal{N}_{s_n}$ для $z \in \mathcal{N}$, где $\mathbb{N}^{<\omega} = \{s_n : n \in \mathbb{N}\}$ — фиксированная рекурсивная нумерация. Каждое замкнутое подмножество $\mathcal{N}$ имеет вид F_z для подходящего $z \in 2^\omega$. Соответственно положим $F_z^{\mathfrak{M}} = F_z \cap \mathfrak{M}$.

Для доказательства (iii) предположим противное. Рассуждая, как в доказательстве теоремы 2.7(i), мы находим "условие" $P = F_p^{\mathfrak{M}} \in \mathbf{S}^{\mathfrak{M}}$, где $p \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$ (тогда $P^{\#} = F_p$ — совершенное множество), и код $f \in \mathbf{BF} \cap \mathfrak{M}$ такие, что $a \in P^{\#}$ и, какова бы ни была саксовская над $\mathfrak{M}$ точка $b \in P^{\#}$, предложение

$(*)$ $F_{\boldsymbol{\vartheta}_f(b)}$ — тощее множество, содержащее все точки из $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$,

истинно в $\mathfrak{M}[b]$. Вывод противоречия из этого предположения происходит, как в доказательстве теоремы 2.7(i) (вторая часть), со следующими поправками. Множество F_q (вместо $\boldsymbol{B}_q$) выбирается совершенным. В случае 1 множество A оказывается тощим в (совершенном) F_q. Тогда $F_q \setminus A$ — котощее в F_q, следовательно, несчетное борелевское множество. Найдется совершенное множество $F_r \subseteq F_q \setminus A$, и т.д., как в доказательстве теоремы 2.7(i). В случае 2 получение противоречия ничем не отличается от соответствующего фрагмента доказательства теоремы 2.7(i).

(iv) Доказывается аналогично (категорию меняем на меру).

(v) Тот факт, что $\mathcal{N} \cap \mathbf{L}$ есть $\Pi^1_2(a)$-множество в любом саксовском расширении $\mathbf{L}$, доказывается следующим образом. Сначала проверяется, что если $X \in \mathtt{Borel}(\mathcal{N})$ несчетно, а $\vartheta\colon X \to \mathcal{N}$ — борелевская функция, то найдется совершенное множество $Y \subseteq X$ такое, что $\vartheta \restriction Y$ — либо константа, либо биекция. Отсюда следует (см. более подробно в [23]), что для саксовского расширения $\mathfrak{M}[a]$ любой транзитивной модели $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZFC}$ истинно следующее: если $x \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}[a]$, то либо $x \in \mathfrak{M}$, либо $a \in \mathfrak{M}[x]$. Отсюда при $\mathfrak{M} = \mathbf{L}$ получаем $\mathcal{N} \cap \mathbf{L} = \{x \in \mathcal{N}\colon a \notin \mathbf{L}[x]\} \in \Pi^1_2(a)$ в саксовском расширении $\mathbf{L}[a]$ конструктивного универсума $\mathbf{L}$.

(vi) аналогично (iv) теоремы 2.7. $\square$

3Б. Произведения совершенных множеств. Для любого множества u через $\mathbf{S}_u$ обозначается произведение u экземпляров форсинга $\mathbf{S}$ со счетной поддержкой. Итак, $\mathbf{S}_u$ состоит из всех множеств вида

$$\prod_{\xi \in v}^{*} X_\xi = \bigl\{\mathbf{x} \in \mathcal{C}^u\colon\ \forall \xi \in v\ (\mathbf{x}(\xi) \in X_\xi)\bigr\},$$

где $v \subseteq u$ не более чем счетно, $X_\xi \in \mathbf{S}$ при любом $\xi \in v$, а * означает, что произведение множеств X_ξ, $\xi \in v$, продолжено по тривиальности на область u. Все множества $X \in \mathbf{S}_u$ замкнуты в $\mathcal{C}^u$ и принадлежат $\mathtt{Borel}_*(\mathcal{C}^u)$ (см. п. 2Д).

Положим $X(\xi) = \{\mathbf{x}(\xi) \colon \mathbf{x} \in X\}$ для $X \subseteq \mathcal{C}^u$ и $\xi \in u$ и далее определим $\|X\| = \{\xi \in u \colon X(\xi) \neq \mathcal{C}\}$. Нетрудно видеть, что множества $X \subseteq \mathcal{C}^u$ из $\mathbf{S}_u$ характеризуются следующими требованиями: $\|X\|$ не более чем счетно, каждое $X(\xi)$, $\xi \in \|X\|$, принадлежит $\mathbf{S}$ и $X = {}^*\prod_{\xi \in \|X\|} X(\xi)$.

Лемма 3.5. *Если $X_0 \in \mathbf{S}_u$ и множества D_n, $n \in \mathbb{N}$, открыты и плотны в $\mathbf{S}_u$, то найдется $X \in \mathbf{S}_u$, $X \subseteq X_0$, такое, что $X \subseteq^{\mathtt{fd}} \bigcup D_n$ при любом n.*

Доказательство. В силу открытости и плотности множеств D_n найдутся счетное множество $v \subseteq u$, удовлетворяющее $\|X_0\| \subseteq v$, и не более чем счетное семейство $\mathcal{X} \subseteq \mathbf{S}_u$, содержащее X_0 и удовлетворяющее следующим требованиям.

1°. Если $X \in \mathcal{X}$, то $\|X\| \subseteq v$.

2°. Если $X \in \mathcal{X}$, $\xi \in v$, $i = 0, 1$ и множество $X' = \{\mathbf{x} \in X \colon \mathbf{x}(\xi)(n) = i\}$ непусто (в этом случае очевидно $X' \in \mathbf{S}_u$), то оно принадлежит семейству $\mathcal{X}$.

3°. Если $X, Y \in \mathcal{X}$, $v = \|X\| \cup \|Y\|$ и множество $w \subseteq v$ конечно, то множество $X' = \{\mathbf{x} \in \mathcal{C}^u \colon \mathbf{x}\restriction w \in X \downarrow w \wedge \mathbf{x}\restriction(v \setminus w) \in Y \downarrow w\}$ принадлежит $\mathcal{X}$.

4°. Если $X \in \mathcal{X}$, то для любого n найдется множество $Y \in \mathcal{X} \cap D_n$, $Y \subseteq X$.

Построение u и $\mathcal{X}$ происходит в виде объединения возрастающих последовательностей $u = \bigcup_n u_n$ и $\mathcal{X} = \bigcup_n \mathcal{X}_n$, где $\mathcal{X}_0 = \{X_0\}$, $u_0 = \|X_0\|$, на нечетных шагах происходит замыкание относительно операций 2° и 3° (при этом u_n не меняется), а на четных шагах — обеспечение 4° (при этом u_n расширяется).

Пусть множество $v = \{\xi_n : n \in \mathbb{N}\}$ (перечисление без повторений) и семейство $\mathcal{X}$ удовлетворяют 1°–4°. Для $\xi \in v$ через $n(\xi)$ будет обозначаться то единственное n, для которого $\xi = \xi_n$. Пусть $\mathcal{X}(\xi) = \{X(\xi) \colon X \in \mathcal{X}\}$ — это счетная совокупность множеств из $\mathbf{S}$ при любом ξ. В силу указанных свойств семейства $\mathcal{X}$ можно построить систему множеств $X^n_s \in \mathbf{S}$ ($n \in \mathbb{N}$, $s \in 2^{<\omega}$) такую, что

(1) ${}^*\prod_{\xi \in v} X^{n(\xi)}_\Lambda \subseteq X_0$;

(2) при любом n все множества X^n_s принадлежат $\mathcal{X}(\xi_n)$, а система множеств $\{X^n_s\}_{s \in 2^{<\omega}}$ удовлетворяет требованиям (2) и (3) из доказательства леммы 3.3;

(3) если $n \in \mathbb{N}$, $s_0, \ldots, s_{n-1} \in {}^n2$ и $Y_{\xi_k} = X^k_{s_k}$ при $k < n$, но $Y_{\xi_k} = X^k_\Lambda$ при $k \geq n$, то ${}^*\prod_{\xi \in v} Y_\xi \in \mathcal{X} \cap D_n$.

В самом деле, сначала выберем любое $X \in \mathcal{X} \cap D_0$ с $X \subseteq X_0$ и положим $X^{n(\xi)}_\Lambda = X(\xi)$ для всех $\xi \in v$, тогда (3) выполнено при $n = 0$. Если для какого-то n множества X^k_s, где $k < n$ и $s \in {}^n2$, уже построены, то сначала посредством простых расщеплений, основанных на 2°, мы строим для каждого $k < n$ множества X^k_s, $s \in {}^{n+1}2$, в $\mathcal{X}(\xi_k)$ и множества X^n_s, $s \in \bigcup_{1 \leq m \leq n+1} {}^m2$, в $\mathcal{X}(\xi_k)$, так что выполняется (2). Теперь нужно обеспечить (3). Это происходит следующим образом.

Возьмем какой-то набор $s_0, \ldots, s_n \in {}^{n+1}2$. По построению каждое множество $X^k_{s_k}$, $k \leq n$, принадлежит $\mathcal{X}(\xi_k)$, а множество ${}^*\prod_{\xi \in v} X^{n(\xi)}_\Lambda$ принадлежит $\mathcal{X}$. Отсюда согласно 3° следует, что множество $Y = {}^*\prod_{\xi \in v} Y_\xi$ принадлежит $\mathcal{X}$, где $Y_{\xi_k} = X^k_{s_k}$ при $k \leq n$, но $Y_{\xi_k} = X^k_\Lambda$ при $k > n$. Теперь из 4° следует, что найдется множество $Z \in \mathcal{X} \cap D_{n+1}$, $Z \subseteq Y$. Переопределяем значения некоторых множеств X^n_s, полагая $X^k_{s_k} = Z(s_k)$ при $k \leq n$ и $X^k_\Lambda = Z(s_k)$ при $k > n$.

Итерируя эту конструкцию с последовательным рассмотрением всех наборов $s_0, \ldots, s_n \in$ $\in {}^{n+1}2$, мы в конце концов осуществляем шаг $n \to n+1$.

Предполагая, что система множеств X^n_s, удовлетворяющая (1)–(3), построена, мы получаем искомое множество $X = {}^*\prod_{\xi\in v} X_\xi$, где $X_\xi = \bigcap_n \bigcup_{s\in {}^n2} X_s^{n(\xi)}$. $\square$

Следствие 3.6. *Если $X \in \mathbf{S}_u$, а $B \subseteq X$ — множество, имеющее свойство Бэра в X, но нетощее в X, то найдется множество $Y \in \mathbf{S}_u$, $Y \subseteq B$.*

Доказательство. Имеется конечное пересечение U множеств вида $\{\mathbf{a} \in \mathcal{C}^u : \mathbf{a}(\xi)(n) = i\}$, $\xi \in u$, $n \in \mathbb{N}$, $i = 0,1$, такое, что $X' = X \cap U$ непусто и $B' = B \cap X'$ котощее в X', скажем, $B' = \bigcap_n B_n \subseteq B$, где каждое $B_n \subseteq X'$ открыто и плотно (топологически) в X'. Легко видеть, что в этом случае X' также принадлежит $\mathbf{S}_u$, более того, каждое из множеств $D_n = \{Y \in \mathbf{S}_u : Y \cap X' = \varnothing$ или $Y \subseteq B_n\}$ открыто и плотно в $\mathbf{S}_u$ (в том смысле, как указано перед леммой 3.3). Теперь лемма 3.5 приносит множество $Y \in \mathbf{S}_\xi$, $Y \subseteq B$. $\square$

3в. Присоединение многих саксовских точек. Здесь доказываются результаты из строки 13 табл. 2 во введении. Фиксируем для дальнейшего транзитивную модель $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZFC}$ и ординал $\kappa \in \mathfrak{M}$. Мы рассматриваем $\mathbf{S}_\kappa^{\mathfrak{M}}$ (т.е. множество $\mathbf{S}_\kappa$, определенное в $\mathfrak{M}$) как форсинг для генерических расширений $\mathfrak{M}$. Каждое “условие” $X \in \mathbf{S}_\kappa^{\mathfrak{M}}$ принадлежит $\mathfrak{M}$ и является подмножеством $\mathcal{C}^\kappa$, замкнутым в $\mathfrak{M}$. Топологическое замыкание $X^\#$ такого X в $\mathcal{C}^\kappa$ будет замкнутым в $\mathcal{C}^\kappa$ уже в универсуме и, как нетрудно убедиться, множеством из $\mathbf{S}_\kappa$. Множества $\mathbf{S}_\kappa$ и $\mathbf{S}_\kappa^{\mathfrak{M}}$, рассматриваемые как форсинги, упорядочиваются по включению: $X \le Y$ (т.е. X сильнее, чем Y), когда $X \subseteq Y$.

Следующий результат аналогичен предложению 3.1 и верен по той же причине.

Предложение 3.7. *Пусть множество $G \subseteq \mathbf{S}_\kappa^{\mathfrak{M}}$ является $\mathbf{S}_\kappa^{\mathfrak{M}}$-генерическим над $\mathfrak{M}$. Тогда пересечение $\bigcap_{X\in G} X^\#$ содержит единственную точку пространства $\mathcal{C}^\xi$ — она будет обозначаться через $\mathbf{a}_G$.* $\square$

Точки вида $\mathbf{a}_G$, где G таково, как указано в предложении, будут называться *κ-саксовскими над $\mathfrak{M}$*, а множество всех таких точек обозначаться через $\mathtt{Sax}_\kappa\,\mathfrak{M}$. Следующая лемма (ср. с леммой 3.2) выражает однородность множества $\mathtt{Sax}_\kappa\,\mathfrak{M}$ и верна просто потому, что любые два множества из $\mathbf{S}_\kappa^{\mathfrak{M}}$ связаны в $\mathfrak{M}$ гомеоморфизмом, составленным из гомеоморфизмов на отдельных координатах.

Лемма 3.8. *Если $\mathtt{Sax}_\kappa\,\mathfrak{M} \ne \varnothing$ и $X \in \mathbf{S}_\kappa^{\mathfrak{M}}$, то $X^\# \cap \mathtt{Sax}_\kappa\,\mathfrak{M} \ne \varnothing$.* $\square$

Теорема 3.9. *Если ординал $\kappa \in \mathfrak{M}$ несчетен в $\mathfrak{M}$ и $\mathbf{a} \in \mathtt{Sax}_\kappa\,\mathfrak{M}$, то*

(i) $\omega_1^{\mathfrak{M}} = \omega_1^{\mathfrak{M}[\mathbf{a}]}$;

(ii) *если $x \in \mathcal{N} \cap \mathfrak{M}[\mathbf{a}]$, то имеется счетное в $\mathfrak{M}$ множество $v \in \mathfrak{M}$, $v \subseteq \kappa$, такое, что $x \in \mathfrak{M}[\mathbf{a}\restriction v]$, а в этом случае для любой v-биекции* (см. п. 2д) $e \in \mathfrak{M}$, $e\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N} \times v$, *найдется код $f \in \mathbf{BF} \cap \mathfrak{M}$ такой, что $x = {}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(\mathbf{a}\restriction v)$.*

Кроме того, в $\mathfrak{M}[\mathbf{a}]$ истинно, что множество $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$

(iii) *не имеет свойства Бэра; более того, ни $\mathcal{N} \cap \mathfrak{M}$, ни $\mathcal{N} \setminus \mathfrak{M}$ не содержат нетощих борелевских подмножеств;*

(iv) *$\boldsymbol{\lambda}$-неизмеримо, более того, имеет верхнюю меру 1 и нижнюю меру 0;*

(v) *не принадлежит классу $\mathbf{\Pi}^1_2$.*

Доказательство. (i) и (ii) выводятся аналогично (i) и (ii) теоремы 3.4, только ссылка на предложение 3.1 заменяется ссылкой на предложение 3.7.

(iii) В сравнении с теоремами 2.7(i) и 3.4(iii) можно отметить, что на базе некоторых общих теорем (абсолютность, а также результат (ii) и его аналоги для коэновских, случайных и саксовских расширений) достаточным условием проведения доказательства теорем 2.7(i) и 3.4(iii) является следующее: если в $\mathfrak{M}$ B является борелевским подмножеством “условия” X, то найдется “условие” $Y \subseteq X$ такое, что либо $Y \subseteq B$, либо $Y \subseteq X \setminus B$. В доказательстве теорем 2.7 и 3.4 выполнение этого требования было достаточно очевидным, а здесь мы просто сошлемся на следствие 3.6.

(iv) Доказывается аналогично (категорию меняем на меру).

(v) Аналогично доказательству (iv) следствия 2.11 достаточно доказать следующее:

(**) если множество $v \in \mathfrak{M}$, $v \subseteq \kappa$, не более чем счетно в $\mathfrak{M}$, $\xi \in \kappa \setminus v$ и борелевский код $c \in \mathbf{BC} \cap \mathfrak{M}[\mathbf{a} \restriction v]$ удовлетворяет $\boldsymbol{B}_c \cap \mathfrak{M} = \varnothing$, то $\mathbf{a}(\xi) \notin \boldsymbol{B}_c$.

Пусть, напротив, v, ξ, c таковы, как указано, но $\mathbf{a}(\xi) \in \boldsymbol{B}_c$. Зафиксируем какую-нибудь v-биекцию $e \in \mathfrak{M}$, $e\colon \mathbb{N} \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}\times v$. Согласно (ii) найдется код $f \in \mathbf{BF}\cap\mathfrak{M}$ такой, что $c = {}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(\mathbf{a} \restriction v)$, так что $\mathbf{a}(\xi) \in \boldsymbol{B}_{{}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(\mathbf{a} \restriction v)}$. Поскольку $\mathbf{a}$ — генерическая точка, найдется "условие" $P \in \mathbf{S}_\kappa^{\mathfrak{M}}$ такое, что $\mathbf{a} \in P^\#$ и предложение

$$ {}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(\mathbf{b} \restriction v) \in \mathbf{BC} \wedge \boldsymbol{B}_{{}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(\mathbf{b} \restriction v)} \cap \mathfrak{M} = \varnothing \wedge \mathbf{b}(\xi) \in \boldsymbol{B}_{{}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(\mathbf{b} \restriction v)} \tag{3.1} $$

истинно в $\mathfrak{M}[\mathbf{b}]$, какова бы ни была точка $\mathbf{b} \in \mathtt{Sax}_\kappa\, \mathfrak{M} \cap P^\#$.

Рассуждая в $\mathfrak{M}$, положим $X = P \downarrow v$. Утверждается, что множества

$$ X' = \bigl\{x \in X\colon {}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(x) \notin \mathbf{BC}\bigr\} \qquad \text{и} \qquad X_y = \bigl\{x \in X \setminus X'\colon y \in \boldsymbol{B}_{{}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(x)}\bigr\}, \quad y \in \mathcal{N}, $$

тощие в X. Например, если X' нетощее в X, то согласно следствию 3.6 (применимому, поскольку $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество X' имеет свойство Бэра) найдется "условие" $Q \in \mathbf{S}_\xi$, $Q \subseteq P$, такое, что $Q \downarrow v \subseteq X'$. Взяв в универсуме любую точку $\mathbf{b} \in \mathtt{Sax}_\kappa\, \mathfrak{M} \cap Q^\#$ (лемма 3.8), получаем ${}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(\mathbf{b} \restriction v) \notin \mathbf{BC}$. (Как и выше в аналогичных случаях, этот переход основан на абсолютности.) Но это противоречит (3.1).

Следовательно, по теореме Улама–Куратовского в $\mathfrak{M}$ истинно, что множество

$$ P' = \bigl\{\mathbf{b} \in P\colon \mathbf{b} \restriction v \in X' \vee \bigl(\mathbf{b} \restriction v \in X \setminus X' \wedge \mathbf{b}(\xi) \in \boldsymbol{B}_{{}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(b \restriction v)}\bigr)\bigr\} $$

тощее в P. Применив следствие 3.6, мы находим (все еще в $\mathfrak{M}$) "условие" $Q \in \mathbf{S}_\kappa$ такое, что $Q \subseteq P \setminus P'$. Другими словами, для всякого $\mathbf{b} \in Q$ выполнено

$$ {}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(\mathbf{b} \restriction v) \in \mathbf{BC} \wedge \mathbf{b}(\xi) \notin \boldsymbol{B}_{{}^e\boldsymbol{\vartheta}_f(\mathbf{b} \restriction v)}. $$

Снова по абсолютности мы заключаем, что выделенное предложение истинно для любой точки $\mathbf{b} \in Q^\#$ в универсуме. Взяв $\mathbf{b} \in \mathtt{Sax}_\kappa\, \mathfrak{M} \cap Q^\#$, получаем противоречие с (3.1), которым завершается доказательство (**) и утверждения (v) теоремы. □

4. СЛЕДСТВИЯ АКСИОМЫ МАРТИНА

Аксиома Мартина **MA** была введена в конце 60-х годов (см. [20]) как предложение, гарантирующее существование генерических объектов в связи с УСА-форсингами. Ее многообразные применения в теории множеств и некоторых вопросах топологии (см., например, гл. 6 в [6]) имеют следующий общий знаменатель: **MA** делает многие свойства кардиналов $\kappa < \mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ похожими на свойства $\aleph_0$.

В этом разделе после нескольких определений и общих замечаний, касающихся **MA**, мы изложим доказательства нескольких следствий **MA**, касающихся рассматриваемых здесь вопросов, а затем покажем, как аналогичные результаты могут быть получены более элементарными методами.

4а. Предварительные замечания. *Аксиомой Мартина* или кратко **MA** называется следующее предложение.

MA. Если $\langle P;\leq\rangle$ — форсинг, удовлетворяющий УСА, а $\mathcal{D}$ — некоторая совокупность плотных множеств[33] $D\subseteq P$, причем $\mathtt{card}\,\mathcal{D}<\mathfrak{c}$, то найдется P-генерическое над $\mathcal{D}$ множество, другими словами, множество $G\subseteq P$, удовлетворяющее следующим трем условиям: 1) если $p,q\in G$, то найдется $r\in G$ такое, что $r\leq p$ и $r\leq q$; 2) если $p\in G$ и $q\in P$, $p\leq q$, то $q\in G$; 3) $G\cap D\neq\varnothing$ для любого $D\in\mathcal{D}$.

Во многих случаях генерическое множество G, приносимое применением **MA**, порождает точку $\mathcal{N}$ (или, например, подмножество $\mathbb{N}$) с определенными свойствами, так что аксиому **MA** можно считать аксиомой особой "полноты" $\mathcal{N}$. Известно, что **MA** не противоречит аксиомам $\mathbf{ZFC}+\neg\mathbf{CH}$ даже вместе с предположением, что $\omega_1=\omega_1^{\mathbf{L}}$. (Доказательство посредством трансфинитной итерации УСА-форсингов дано в [20, 27]; на русском языке см. [6, гл. 4] или [7].) Тем самым любое следствие $\mathbf{MA}+\neg\mathbf{CH}$ также непротиворечиво и совместимо с $\omega_1=\omega_1^{\mathbf{L}}$.

4б. Аддитивность свойств регулярности.

Теорема 4.1 (MA). *Идеалы $\mathcal{I}_{\mathrm{cat}}$ и $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\lambda}}$ являются $<\mathfrak{c}$-аддитивными, т.е. объединение множеств из $\mathcal{I}_{\mathrm{cat}}$ (или $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\lambda}}$) в числе $<\mathfrak{c}$ принадлежит $\mathcal{I}_{\mathrm{cat}}$ (соответственно $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\lambda}}$). Следовательно, всякое множество $X\subseteq\mathcal{N}$ мощности $<\mathfrak{c}$ имеет $\boldsymbol{\lambda}$-меру 0 и является тощим.*

Как и для многих типичных следствий **MA**, теорема тривиальна в предположении **CH** — тогда $<\mathfrak{c}$-аддитивность превращается в обычную счетную аддитивность. Если же $\mathfrak{c}>\omega_1$, то **MA** влечет как минимум $\aleph_1$-аддитивность указанных идеалов (это означает, что объединение $\aleph_1$ множеств данного идеала накрывается множеством опять из этого идеала), следовательно, тот факт, что любое множество мощности $\leq\aleph_1$, например $\mathcal{N}\cap\mathbf{L}$, тощее и имеет меру 0.

Следствие 4.2. *Утверждение о том, что идеалы $\mathcal{I}_{\mathrm{cat}}$ и $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\lambda}}$ $\aleph_1$-аддитивны, а всякое множество $X\subseteq\mathcal{N}$ мощности $\aleph_1$ имеет $\boldsymbol{\lambda}$-меру 0 и является тощим, не противоречит аксиомам* **ZFC**.

Доказательство теоремы 4.1 было впервые дано в [20]. Следствие 4.2 было получено независимо Любецким [18] посредством итерации подходящей трансфинитной последовательности УСА-форсингов, но без обращения к аксиоме Мартина (см. п. 4г ниже). Разные мощностные характеристики, связанные с идеалами $\mathcal{I}_{\mathrm{cat}}$ и $\mathcal{I}_{\boldsymbol{\lambda}}$, были предметом ряда исследований в теории множеств в 70–80-х годах. Результаты этих исследований и исчерпывающие ссылки можно найти в книге [1].

Доказательство теоремы 4.1. *Мера.* Мы докажем в предположении **MA**, что при $\lambda<\mathfrak{c}$ объединение $X=\bigcup_{\alpha<\lambda}X_\alpha$ множеств $X_\alpha\subseteq\mathcal{N}$ $\boldsymbol{\lambda}$-меры 0 само удовлетворяет $\boldsymbol{\lambda}(X)=0$. Задавшись вещественным $\delta>0$, докажем, что X накрывается открытым множеством $U\subseteq\mathcal{N}$ меры $\boldsymbol{\lambda}(U)\leq\delta$. Для этого рассмотрим множество $\mathcal{P}$ всех открытых множеств $U\subseteq\mathcal{N}$ с $\boldsymbol{\lambda}(U)<\delta$, упорядоченное обратно включению; в частности, U, V совместны в $\mathcal{P}$, когда $\boldsymbol{\lambda}(U\cup V)<\delta$.[34]

Мы утверждаем, что $\mathcal{P}$ удовлетворяет УСА. В самом деле, пусть $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{P}$ несчетно; докажем, что $\mathcal{A}$ не является антицепью. Можно считать, что для некоторого $n\geq 1$ выполнено $\boldsymbol{\lambda}(A)<\delta-\frac{1}{n}$ $\forall\,A\in\mathcal{A}$. Заметим, что каждое $A\in\mathcal{A}$ есть счетное объединение бэровских интервалов, т.е. множеств вида $\mathcal{N}_s=\{x\in\mathcal{N}\colon s\subset x\}$, так что объединение A' некоторой *конечной* совокупности этих интервалов удовлетворяет $\boldsymbol{\lambda}(A\setminus A')<\frac{1}{2n}$. Однако существует лишь счетное число множеств вида A' (т.е. конечных объединений бэровских интервалов), так что вследствие несчетности $\mathcal{A}$ найдутся множества $A\neq B$ в $\mathcal{A}$ такие, что $A'=B'$. Тогда

[33] В контексте этой аксиомы *плотность* множества $D\subseteq P$ можно понимать следующим образом: для всякого $p\in P$ должно существовать $q\in D$ такое, что $q\leq p$.

[34] Переходя к дополнительным множествам, мы получаем *ε-случайный форсинг*, где $\varepsilon=1-\delta$, т.е. множество всех борелевских $X\subseteq\mathcal{N}$ с $\boldsymbol{\lambda}(X)>\varepsilon$, упорядоченное по включению.

$\boldsymbol{\lambda}(A \cup B) \le \boldsymbol{\lambda}(B) + \boldsymbol{\lambda}(A \setminus A') \le \delta - \frac{1}{2n}$, следовательно, A, B совместны в $\mathcal{P}$ и $\mathcal{A}$ не антицепь. Свойство УСА установлено.

Для каждого $\alpha < \lambda$ множество D_α всех $U \in \mathcal{P}$ таких, что $X_\alpha \subseteq U$, плотно в $\mathcal{P}$. В самом деле, если $U \in \mathcal{P}$, то $\boldsymbol{\lambda}(U) < \delta$, а так как $\boldsymbol{\lambda}(X_\alpha) = 0$, найдется открытое множество V меры все еще меньше δ такое, что $U \cup X_\alpha \subseteq V$. Следовательно, согласно **MA** найдется $\mathcal{P}$-генерическое над $\mathcal{D} = \{D_\alpha : \alpha < \lambda\}$ множество $G \subseteq \mathcal{P}$. Итак, G состоит из открытых подмножеств $\mathcal{N}$. Пусть $U = \bigcup G$ — объединение всех этих открытых множеств. Тогда $X \subseteq U$; в самом деле, для любого $\alpha < \lambda$ найдется $U_\alpha \in G \cap D_\alpha$, тогда $X_\alpha \subseteq U_\alpha \subseteq U$.

Остается проверить, что $\boldsymbol{\lambda}(U) \le \delta$. Предположим противное: $\boldsymbol{\lambda}(U) > \delta$. Это означает, что найдется *конечное* множество $G' = \{U_1, \dots, U_n\} \subseteq G$ такое, что объединение $U' = U_1 \cup \ldots \cup U_n$ все еще удовлетворяет $\boldsymbol{\lambda}(U') > \delta$. Однако вследствие генеричности множество G' совместно в $\mathcal{P}$, а это означает в сущности, что U' должно принадлежать $\mathcal{P}$, т.е. $\boldsymbol{\lambda}(U') < \delta$ — противоречие с предыдущим.

Категория. Доказываем в предположении **MA**, что объединение $X = \bigcup_{\alpha<\lambda} X_\alpha$ замкнутых нигде не плотных множеств $X_\alpha \subseteq \mathcal{N}$ является тощим в $\mathcal{N}$ при $\lambda < \mathfrak{c}$. Это можно выполнить несколькими разными способами, например при помощи почти дизъюнктных множеств, как в [6, гл. 6], или при помощи доминирующего форсинга. Мы изложим этот последний вариант.

Сначала докажем, что $X \ne \mathcal{N}$. Рассмотрим множество $P = \mathbb{N}^{<\omega}$ с порядком, обратным включению (одно из представлений коэновского форсинга). Каждое из множеств $D_\alpha = \{s \in \mathbb{N}^{<\omega} : \mathcal{N}_s \cap X_\alpha = \varnothing\}$ плотно в $\mathbb{N}^{<\omega}$, так как множество X_α нигде не плотно в топологии $\mathcal{N}$. Таким образом, **MA** влечет существование P-генерического над $\{D_\alpha : \alpha < \lambda\}$ множества $G \subseteq P$. Тогда $G = \{a \restriction n : n \in \mathbb{N}\}$ для некоторой (единственной) точки $a = a_G \in \mathcal{N}$, причем мы имеем $a \notin X_\alpha$ для всех α, так как $G \cap X_\alpha \ne \varnothing$. Другими словами, $a \notin X$, что и требовалось.

Элементарная модификация этого рассуждения показывает, что дополнительное множество $\mathcal{N} \setminus X$ плотно в топологии $\mathcal{N}$. Отсюда следует, что найдется счетное множество $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{N} \setminus X$, плотное в $\mathcal{N}$. Пусть $\alpha < \lambda$. Тогда для любого n $b_n \notin X_\alpha$, а потому найдется число k такое, что $\mathcal{N}_{b_n \restriction k} \cap X_\alpha = \varnothing$ (использовано предположение о том, что X_α замкнуто). Наименьшее из таких k обозначается через $f_\alpha(n)$; таким образом, $f_\alpha \in \mathcal{N}$.

Напомним, что порядок *финального доминирования* на множестве $\mathcal{N} = \mathbb{N}^\omega$ определяется так: $f \le^* g$, когда $f(n) \le g(n)$ для почти всех (т.е. кроме конечного числа) n. Мы утверждаем, что *найдется* $h \in \mathcal{N}$ *такая, что* $f_\alpha \le^* h$ *для всех* $\alpha < \omega_1$. Имея такую h, мы легко получаем счетное множество $\{h_m : m \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{N}$, удовлетворяющее $\forall \alpha < \omega_1 \; \exists m \; (f_\alpha \le h_m)$, где $\le$ обозначает простое доминирование, т.е. $f \le g$, когда $f(n) \le g(n)$ для всех n. Положим $Y_m = \mathcal{N} \setminus \bigcup_n \mathcal{N}_{b_n \restriction h_m(n)}$. Легко видеть, что при $f_\alpha \le h_m$ будет $X_\alpha \subseteq Y_m$, так что X накрывается множеством $Y = \bigcup_m Y_m$. Однако каждое Y_m, очевидно, нигде не плотно в $\mathcal{N}$.

Остается доказать утверждение о существовании g. Для этого используется *доминирующий форсинг* — множество $\mathbf{D}$ всех пар вида $\langle s, f\rangle$ таких, что $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $f \in \mathcal{N}$, $s \subset f$, с порядком $\langle s, f\rangle \le \langle t, g\rangle$ ($\langle s, f\rangle$ "сильнее"), если $t \subseteq s$ и $g \le f$. Множество $\mathbf{D}$ удовлетворяет УСА, поскольку любые два "условия" $\langle s, f\rangle$, $\langle s, g\rangle$ (с одной и той же первой компонентой), очевидно, совместны в $\mathbf{D}$. Отметим, что

($*$) для совместности[35] "условий" $\langle s, f\rangle$, $\langle s', f'\rangle$ в $\mathbf{D}$ необходимо и достаточно, чтобы было выполнено хотя бы одно из двух: $s \subseteq s' \subset f$ или $s' \subseteq s \subset f'$.

Легко видеть, что каждое из множеств $D_\alpha = \{\langle s, f\rangle \in \mathbf{D} : f_\alpha \le^* f\}$ плотно в $\mathbf{D}$. Поэтому согласно **MA** найдется $\mathbf{D}$-генерическое над $\{D_\alpha : \alpha < \lambda\}$ множество $G \subseteq \mathbf{D}$. По определению любые два "условия" $\langle s, f\rangle$, $\langle s', f'\rangle$ из G совместны, откуда следует согласно ($*$), что $s \subseteq s'$ или $s' \subseteq s$. Отсюда вытекает, что $h = \bigcup\{s : \exists f \; (\langle s, f\rangle \in G)\}$ принадлежит $\mathcal{N}$. Покажем, что

[35] Совместность здесь означает, что найдется "условие" $\langle t, g\rangle \in \mathbf{D}$ такое, что $\langle t, g\rangle \le \langle s, f\rangle$ и $\langle t, g\rangle \le \langle s', f'\rangle$.

$f_\alpha \le^* h\ \forall\,\alpha$. Вследствие генеричности найдется "условие" $\langle s,f\rangle \in G\cap D_\alpha$; таким образом, $f_\alpha \le^* f$.

Остается проверить, что $f \le h$. Предположим противное: $h(j) < f(j)$ для некоторого j. По определению h найдется "условие" $\langle s',f'\rangle \in G$ такое, что $j < \mathtt{lh}\, s'$ и $s'(j) = h(j) < f(j)$. Но в этом случае согласно $(*)$ "условия" $\langle s,f\rangle$, $\langle s',f'\rangle$ не могут быть совместными — противоречие. $\square$

Очевидно, что доказательства $<\mathfrak{c}$-аддитивности для меры и категории в теореме 4.1 в предположении **MA** основаны на разных идеях. Данный в [20] пример σ-УСА-идеала $\mathcal{I}$ в алгебре борелевских множеств, доказуемо в **ZFC** *не* являющегося $\aleph_1$-аддитивным, показывает, что случаи меры и категории вряд ли могут быть сведены к некоторому разумному общему знаменателю. В то же время, как показано в [20], более слабое утверждение, именно что $\mathcal{N}$ не есть объединение множеств из $\mathcal{I}$ в числе $<\mathfrak{c}$, справедливо в предположении **MA** для любого σ-УСА-идеала $\mathcal{I}$ в алгебре борелевских множеств $\mathcal{N}$, удовлетворяющего $\mathcal{N}\notin\mathcal{I}$.

4в. Определимость множеств мощности $\aleph_1$. В отличие от ряда других следствий **MA** следующая теорема [20] не распространяется на множества произвольной мощности $<\mathfrak{c}$ независимо от положения $\mathfrak{c}$ в шкале алефов: в самом деле, каждое $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество, и даже каждое множество класса $\mathbf{\Sigma}^1_2$, имеет мощность $\le\aleph_1$ или ровно $\mathfrak{c}$, так что никакое множество мощности λ, $\aleph_1<\lambda<\mathfrak{c}$, не может иметь класс $\mathbf{\Pi}^1_1$, и даже $\mathbf{\Sigma}^1_2$.

Теорема 4.3 (**MA** $+\neg$**CH**). *Если $\omega_1 = \omega_1^{\mathbf{L}[a]}$ для некоторого $a\in\mathcal{N}$, то всякое множество $C\subseteq\mathcal{N}$ мощности $\le\aleph_1$ имеет класс $\mathbf{\Pi}^1_1$.*

Доказательство. Можно предполагать, что $C\subseteq 2^\omega$; пусть $C=\{c_\xi\colon \xi<\omega_1\}$ (без повторений). Зафиксируем точку $a\in\mathcal{N}$ такую, что $\omega_1=\omega_1^{\mathbf{L}[a]}$. Тогда $X = 2^\omega\cap\mathbf{L}[a]$ является $\varSigma^1_2(a)$-множеством (предложение 1.11) мощности ровно $\aleph_1$. По теореме униформизации Новикова–Кондо–Аддисона (см., например, [25, 7.11]) найдется униформное множество $P\subseteq\mathcal{N}^2$ класса $\varPi^1_1(a)$, проекция которого совпадает с X, а тогда P также имеет мощность $\aleph_1$. Отсюда следует, что существует $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $A\subseteq 2^\omega$ мощности ровно $\aleph_1$. Пусть $A=\{a_\xi\colon\xi<\omega_1\}$ (без повторений).

Положим $w_n=\{2^k(2n+1)-1\colon k\in\mathbb{N}\}$; таким образом, $\mathbb{N}=\bigcup_n w_n$ есть разбиение $\mathbb{N}$ на попарно не пересекающиеся множества. Положим $S_{xn}=\{x\restriction m\colon m\in w_n\}$ для всех $x\in\mathcal{N}$, $m\in\mathbb{N}$; каждое S_{xn} есть бесконечное подмножество $\mathbb{N}^{<\omega}$, и $s\in S_{xn} \Rightarrow \mathtt{lh}\,s\in w_n$. Понятно, что $S_{xn}\cap S_{yn'}=\varnothing$ при $n\ne n'$, а если $n=n'$, то $S_{xn}\cap S_{yn}$ конечно (т.е. множества S_{xn}, S_{yn} *почти дизъюнктны*) при $x\ne y$. Мы утверждаем, что найдется множество $S\subseteq\mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющее

$(*)$ для всех $\xi<\omega_1$ и $n\in\mathbb{N}$: $a_\xi(n)=1 \Leftrightarrow S_{c_\xi,2n}\cap S$ конечно и $c_\xi(n)=1\Leftrightarrow S_{a_\xi,2n+1}\cap S$ конечно.

Предположив, что такое множество S построено, определим $a[x], c[x]\in 2^\omega$ для любого $x\in\mathcal{N}$ так, чтобы для всех n было выполнено

$$a[x](n)=1 \Leftrightarrow S_{x,2n}\cap S \text{ конечно} \qquad \text{и} \qquad c[x](n)=1\Leftrightarrow S_{x,2n+1}\cap S \text{ конечно}.$$

Таким образом, согласно $(*)$ мы имеем $a_\xi=a[c_\xi]$ и $c_\xi=c[a_\xi]$. Отсюда немедленно следует $C=\{c\in 2^\omega\colon a[c]\in A\wedge c=c[a[c]]\}$. Значит, C есть $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество, поскольку таковым является A, а функции $x\mapsto a[x]$ и $x\mapsto c[x]$, очевидно, борелевские. А существование множества S, удовлетворяющего $(*)$, вытекает из следующей леммы, которая применяется здесь при $X=\{S_{c_\xi,2n}\colon\xi<\omega_1\}\cup\{S_{a_\xi,2n+1}\colon\xi<\omega_1\}$ и

$$Y=\bigl\{S_{c_\xi,2n}\colon \xi<\omega_1\wedge a_\xi(n)=1\bigr\}\cup\bigl\{S_{a_\xi,2n+1}\colon \xi<\omega_1\wedge c_\xi(n)=1\bigr\}.$$

Лемма 4.4 ($\mathbf{MA} + \neg\mathbf{CH}$). *Если $X \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\omega})$ состоит из попарно почти дизъюнктных бесконечных множеств,* $\mathtt{card}\, X < \mathfrak{c}$ *и $Y \subseteq X$, то найдется $S \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ такое, что $S \cap x$ конечно для всех $x \in Y$, но бесконечно для всех $x \in X \setminus Y$.*

Доказательство. Используется идея *почти дизъюнктного форсинга.* Рассмотрим множество $\mathbb{P}_Y$ всех пар вида $p = \langle s_p, U_p \rangle$, где $s_p \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ и $U_p \subseteq Y$ конечны. Упорядочим $\mathbb{P}_Y$ так: $p \le q$, когда $s_p \subseteq s_q$, $U_p \subseteq U_q$ и мы имеем $s_q \cap y = s_p \cap y$ для любого $y \in U_p$. Любые два "условия" $p, q \in \mathbb{P}_Y$ с $s_p = s_q$, очевидно, совместны в $\mathbb{P}_Y$ (возьмем $r = \langle s_p, U_p \cup U_q \rangle$), так что $\mathbb{P}_Y$ есть УСА-форсинг.

Легко видеть, что множества вида $D_y = \{p \in \mathbb{P}_Y : y \in U_p\}$, где $y \in Y$, и

$$D_{mx} = \{p \in \mathbb{P}_Y : \mathtt{card}\,(s_p \cap x) \ge m\}, \qquad \text{где} \quad m \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad x \in X \setminus Y,$$

плотны в $\mathbb{P}_Y$. Именно пусть $q \in \mathbb{P}_Y$ и $y \in Y$. Для построения "условия" $p \in D_Y$ с $p \le q$ просто добавим y к U_q. Для построения "условия" $p \in D_{mx}$ ($x \in X \setminus Y$) с $p \le q$ добавим к s_q достаточное число элементов множества $d = x \setminus \bigcup U_q$. (Заметим, что каждое $y \in U_q$ принадлежит Y, следовательно, имеет конечное пересечение с $x \in X \setminus Y$ и само U_q конечно, так что множество d бесконечно.)

Таким образом, поскольку оба семейства имеют мощность $< \mathfrak{c}$, найдется $\mathbb{P}_Y$-генерическое над каждым из указанных семейств множество $G \subseteq \mathbb{P}_Y$. Положим $S = \bigcup_{p \in G} s_p$; таким образом, $S \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$. Из того что G непусто пересекает множества вида D_{mx}, $x \in X \setminus Y$, следует, что $S \cap x$ бесконечно для любого $x \in X \setminus Y$. С другой стороны, если $y \in Y$, то по выбору G найдется "условие" $p \in G \cap D_y$. Тогда из определения порядка на $\mathbb{P}_Y$ следует, что $s_r \cap y \subseteq s_p \cap y$ для любого "условия" $r \in \mathbb{P}_Y$, совместного с p. Тем самым $S \cap y = s_p \cap y$ конечно. $\square$

Теорема 4.3 доказана. $\square$

В [20] отмечено, что условие $\exists\, a \in \mathcal{N}\ (\omega_1^{\mathbf{L}[a]} = \omega_1)$ является в предположении $\mathbf{MA} + \neg\mathbf{CH}$ не только достаточным, но и необходимым для того, чтобы каждое множество $X \subseteq \mathcal{N}$ мощности $\aleph_1$ было $\mathbf{\Pi}^1_1$. Действительно, если $\omega_1^{\mathbf{L}[a]} < \omega_1$ для каждого $a \in \mathcal{N}$, то согласно теореме 2.6(i) каждое несчетное $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество содержит совершенное подмножество, следовательно, имеет мощность континуума $\mathfrak{c}$. Если при этом $\mathbf{CH}$ неверна, т.е. $\aleph_1 < \mathfrak{c}$ строго, то $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств мощности ровно $\aleph_1$ просто нет, так что заключение теоремы 4.3 также не имеет места.

4г. Непосредственное построение моделей. Для многих следствий аксиомы Мартина можно построить модели, по своей природе значительно более простые, чем известные модели для самой аксиомы $\mathbf{MA}$. Помимо самой простоты, эти специальные модели часто позволяют разобраться во взаимоотношениях различных следствий $\mathbf{MA}$ между собой. Такие модели строятся при помощи метода итерированного форсинга.

Итерированный форсинг состоит в построении последовательности форсингов $\mathbb{P}_\xi$, $\xi \le \vartheta$, где ϑ — фиксированный ординал заданной транзитивной модели $\mathfrak{M} \models \mathbf{ZFC}$, называемый *длиной итерации*, и последовательности соответствующих генерических расширений $\mathfrak{M}_\xi$ этой модели $\mathfrak{M}$, так что каждая модель $\mathfrak{M}_{\xi+1}$ оказывается генерическим расширением предшествующей модели $\mathfrak{M}_\xi$ некоторого заданного вида. (Подробности см. в литературе, данной в конце п. 4а.)

Две модели такого рода были построены Любецким [18]. Одна из них является итерацией длины $\vartheta = \omega_2^{\mathfrak{M}}$ форсинга $\mathcal{P}$, использованного в первой части доказательства теоремы 4.1, другими словами, каждая модель $\mathfrak{M}_{\xi+1}$, $\xi < \vartheta$, оказывается ε-случайным расширением $\mathfrak{M}_\xi$. В результирующей модели $\mathfrak{M}_\vartheta$ истинно, что $\mathbf{CH}$ не имеет места, а идеал множеств $\boldsymbol{\lambda}$-меры 0 замкнут относительно объединений в числе $\aleph_1$, в частности, каждое множество вида $\mathcal{N} \cap \mathbf{L}[a]$, $a \in \mathcal{N}$, имеет $\boldsymbol{\lambda}$-меру 0. Сверх того, все кардиналы $\mathfrak{M}$ сохраняются в $\mathfrak{M}_\vartheta$, в частности, если исходная модель была $\mathfrak{M} = \mathbf{L}$, то в $\mathfrak{M}_\vartheta$ выполнено $\omega_1 = \omega_1^{\mathbf{L}}$. Вторая модель является итерацией длины $\vartheta = \omega_2^{\mathfrak{M}}$ доминирующего форсинга $\mathbf{D}$. В этом случае в модели $\mathfrak{M}_\vartheta$ истинно, что $\mathbf{CH}$ не имеет места, а идеал тощих множеств замкнут относительно объединений в числе $\aleph_1$, в частности, каждое множество вида $\mathcal{N} \cap \mathbf{L}[a]$ тощее.

Положение дел с мерой и категорией здесь не вполне симметрично. В то время как во второй модели идеал множеств $\boldsymbol{\lambda}$-меры 0 *не* замкнут относительно объединений в числе $\aleph_1$, в частности, существуют $\boldsymbol{\lambda}$-неизмеримые $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множества (а каждое $\mathbf{\Sigma}^1_2$-множество является $\mathbf{\Sigma}^1_2$-объединением борелевских множеств), в первой модели свойством замкнутости относительно объединений в числе $\aleph_1$ обладает и идеал тощих множеств. См. об этих результатах в п. 8б и 8в нашей работы [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bartoszyński T., Judah H.* Set theory, on the structure of the real line. Wellesley: A.K. Peters, 1995.
2. *Коэн П.Дж.* Теория множеств и континуум-гипотеза. М.: Мир, 1969.
3. *Драгалин А.Г., Любецкий В.А.* Независимость некоторых проблем аксиоматической теории множеств // Тезисы докладов на Всесоюзном симпозиуме по математической логике. Алма-Ата, 1969. С. 12–17.
4. *Гёдель К.* Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств // УМН. 1948. Т. 3, №1. С. 96–149.
5. *Groszek M., Slaman T.* A basis theorem for perfect sets // Bull. Symbol. Log. 1998. V. 4, N 2. P. 204–209.
6. Справочная книга по математической логике. М.: Наука, 1983. Ч. 2: Теория множеств.
7. *Йех Т.* Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
8. *Jech T.* Set theory. New York: Acad. Press, 1978.
9. *Кановей В.Г.* О степенях конструктивности и дескриптивных свойствах множества действительных чисел в исходной модели и в ее расширениях // ДАН СССР. 1974. Т. 216, №4. С. 728–729.
10. *Кановей В.Г.* Проективная иерархия Н.Н. Лузина: Современное состояние теории // Справочная книга по математической логике. М.: Наука, 1983. Ч. 2. С. 273–364.
11. *Кановей В.Г.* Развитие дескриптивной теории множеств под влиянием трудов Н.Н. Лузина // УМН. 1985. Т. 40, №3. С. 117–153.
12. *Кановей В.Г., Любецкий В.А.* О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств // УМН. 2003. Т. 58, №5. С. 3–88.
13. *Kechris A.S.* Measure and category in effective descriptive set theory // Ann. Math. Log. 1973. V. 5. P. 337–384.
14. *Любецкий В.А.* Некоторые следствия гипотезы о несчетности множества конструктивных действительных чисел // ДАН СССР. 1968. Т. 182, №4. С. 758–759.
15. *Любецкий В.А.* Из существования неизмеримого множества типа A_2 вытекает существование несчетного множества, не содержащего совершенного подмножества, типа CA // ДАН СССР. 1970. Т. 195, №3. С. 548–550.
16. *Любецкий В.А.* Из существования неизмеримого множества типа A_2 следует существование несчетного множества типа CA, не содержащего совершенного подмножества // Тезисы докладов по алгебре, математической логике и вычислительной математике конференции педагогических вузов центральной зоны РСФСР. Иваново, 1970. С. 22–24.
17. *Любецкий В.А.* Независимость некоторых предложений дескриптивной теории множеств от теории множеств Цермело–Френкеля // Вестн. МГУ. Математика. Механика. 1971. №2. С. 78–82.
18. *Любецкий В.А.* Измеримость и наличие совершенного ядра у проективных множеств: Дис. … канд. физ.-мат. наук. М.: МГУ, 1971.
19. *Любецкий В.А.* Случайные последовательности чисел и A_2-множества // Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М.: Наука, 1976. С. 96–122.
20. *Martin D., Solovay R.M.* Internal Cohen extensions // Ann. Math. Log. 1970. V. 2. P. 143–178.
21. *Mathias A.R.D.* Surrealist landscape with figures (a survey of recent results in set theory) // Periodica Math. Hung. 1979. V. 10. P. 109–175.[36]
22. *Новиков П.С.* О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств // Тр. МИАН. 1951. Т. 38. С. 279–316.

[36] Все наши ссылки на эту работу относятся к ее первоначальной версии, известной под названием: A survey of recent results in set theory. Stanford University. July 1968. Этот препринт содержит предварительные объявления о ранних результатах в теории множеств, за редкими исключениями, без ссылок на публикацию и без (даже набросков) доказательств.

23. *Sacks G.E.* Forcing with perfect closed sets // Proc. Symp. Pure Math. 1971. V. 13, N 1. P. 331–355.
24. *Shoenfield J.* The problem of predicativity // Essays on the foundations of mathematics. Jerusalem: Magnes Press, Hebrew Univ., 1961. P. 132–139.
25. *Шенфилд Дж.* Математическая логика. М.: Наука, 1975. С. 482–519.
26. *Solovay R.M.* A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable // Ann. Math. 1970. V. 92, N 1. P. 1–56.
27. *Solovay R.M., Tennenbaum S.* Iterated Cohen extensions and Suslin's problem // Ann. Math. 1971. V. 94. P. 201–245.
28. *Успенский В.А.* Вклад Н.Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания // УМН. 1985. Т. 40, №3. С. 85–116.
29. *Velickovic B., Woodin W.H.* Complexity of the reals of inner models of set theory // Ann. Pure and Appl. Logic. 1998. V. 92, N 3. P. 283–295.