ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2006, т. 252, с. 94–113

УДК 510.225

Конфинальное семейство отношений эквивалентности и порождающих их борелевских идеалов[1]

©2006 г. В. Г. Викторович Кановей[2,3], В. А. Любецкий[2,4]

Поступило в декабре 2004 г.

Развивая конструкцию К. Розендаля, мы определяем возрастающую ω_1-последовательность борелевских отношений эквивалентности на польском пространстве, конфинальную (в смысле борелевской сводимости) в семействе всех борелевских отношений эквивалентности. Доказывается, что отношения эквивалентности из этой последовательности порождаются явно определенными борелевскими идеалами.

ВВЕДЕНИЕ

В августе 2004 г. в Москве состоялась Международная математическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения Людмилы Всеволодовны Келдыш, среди участников которой были и авторы настоящей работы. Одним из направлений деятельности Л.В. Келдыш в дескриптивной теории множеств было построение эффективных (т.е. определяемых явными формулами) примеров множеств высших борелевских классов. (Эти примеры называли еще “арифметическими”, поскольку они задавались формулами арифметического характера, см. завершающую работу [10] Л.В. Келдыш в этой области.)

В современной дескриптивной теории множеств эффективные примеры борелевских множеств приобрели более сложный характер: обычно речь идет о примере множества с дополнительными свойствами в рамках фиксированной структуры. В этой связи особое внимание привлекает структура борелевской сводимости $\le_{\mathrm{B}}$ отношений эквивалентности на польских (т.е. сепарабельных полных метрических) пространствах. Напомним, что отношение $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{F}$ (где E и F — эквивалентности на польских пространствах X и Y соответственно) означает существование инъекции E-классов в F-классы, допускающей борелевский лифтинг $X \to Y$ (точные определения даны ниже).

Семейство борелевских и затем аналитических отношений эквивалентности вместе с отношением борелевской сводимости $\le_{\mathrm{B}}$ является объектом интенсивного изучения в дескриптивной теории множеств с начала 1990-х годов. Интерес к этой теме обусловлен ее глубокими связями со многими проблемами классификации, когда отношения эквивалентности определяются как изоморфность двух математических структур из некоторого фиксированного класса структур (об этом см., например, монографию Хьерта [5]).

Структура борелевской сводимости начинается с *гладких* борелевских отношений эквивалентности, которые определяются условием $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{D}_{\mathbb{R}}$, где D_X — отношение равенства на X, рассматриваемое как отношение эквивалентности. Их классификация (в смысле $\le_{\mathrm{B}}$) основана непосредственно на числе классов эквивалентности: конечное число, или счетное $\aleph_0$, или континуум $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Отношение эквивалентности Витали на вещественной прямой $\mathbb{R}$ (т.е. когда два числа эквивалентны, если их разность — рациональное число) является $\le_{\mathrm{B}}$-наименьшим среди

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 03-01-00757) и Министерства промышленности и науки РФ (проект 37-053-11-0061).

[2]Институт проблем передачи информации РАН, Москва, Россия.

[3]E-mail: kanovei@sets.mccme.ru

[4]E-mail: lyubetsk@iitp.ru

всех негладких борелевских отношений эквивалентности по теореме Харрингтона, Кехриса и Луво [4] (на русском языке см. изложение в обзоре [7]). Дальнейшие исследования (например, написанный Кехрисом обзор [12]) показали, что существуют математически содержательные борелевские отношения эквивалентности E_1, E_2, E_3, $\le_{\mathrm{B}}$-минимальные над эквивалентностью Витали и $\le_{\mathrm{B}}$-несравнимые друг с другом. Были рассмотрены большие классы борелевских и аналитических отношений эквивалентности, например *счетные* отношения эквивалентности (т.е. такие, у которых все классы эквивалентности счетны [1]), c_0-равенства [2] и многие другие. Общая теорема Луво и Величковича [14] показала, что структура борелевских отношений эквивалентности (как частично упорядоченного множества с отношением $\le_{\mathrm{B}}$) весьма сложна.

На самом верхнем уровне структуры борелевской сводимости аналитических отношений эквивалентности имеется наибольший элемент, называемый *полным* (или универсальным) аналитическим отношением эквивалентности, — его можно легко определить, начиная с универсального аналитического множества (см. пример 6 ниже). Полные аналитические отношения эквивалентности также известны в некоторых классах специальных отношений эквивалентности и особенно тех, которые индуцированы действиями топологических групп на польских пространствах.

С другой стороны, полные *борелевские* отношения эквивалентности (т.е. $\le_{\mathrm{B}}$-наибольшие среди всех борелевских отношений эквивалентности) не существуют (см., например, [3, 6]). Более того, имеются строго $\le_{\mathrm{B}}$-возрастающие $\le_{\mathrm{B}}$-конфинальные ω_1-последовательности борелевских отношений эквивалентности: в самом деле, любое полное аналитическое отношение эквивалентности естественным образом порождает такую последовательность на основе его убывающей последовательности борелевских аппроксимаций сверху (см. теорему 16 в разд. 6).

Целью этой работы является построение конфинальной последовательности такого рода, имеющей ряд дополнительных свойств в соответствии со следующей теоремой.

Теорема 1. *Существует ω_1-последовательность борелевских отношений эквивалентности E_ν, $\nu < \omega_1$, в пространстве 2^ω, $\le_{\mathrm{B}}$-конфинальная в семействе всех борелевских отношений эквивалентности и такая, что отношения E_ν имеют математически содержательные определения, а кроме того*:

(i) *отношение E_ν принадлежит борелевскому классу $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\nu+1}$;*

(ii) *отношение E_ν порождается идеалом $I_\nu \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ класса $\mathbf{\Sigma}^0_{\omega+2\nu+1}$ в том смысле, что для любых $x, y \in D$ отношение $x \mathsf{E} y$ равносильно тому, что множество $\{n \in \mathbb{N} : x(n) \ne y(n)\}$ принадлежит I_ν, причем идеалы I_ν также имеют математически содержательные определения.*

Несколько замечаний, относящихся к теореме 1. Индекс ν входит в определение отношений E_ν через ограничение на ранги некоторых деревьев. А именно каждое E_ν будет определено в сущности как $(\omega\nu + 2)$-я каноническая верхняя борелевская аппроксимация $\mathsf{E}^{\omega\nu+2}_{\mathrm{NT}}$ одного и того же полного аналитического отношения эквивалентности E_{NT} (отношения эквивалентности нормальных деревьев), ранее определенного в [13] и затем исследованного в [17].

Полное аналитическое отношение эквивалентности может быть определено с помощью элементарной конструкции, использующей универсальное аналитическое множество (пример 6). Эта конструкция неприменима к борелевским классам $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ и $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ (хотя они также содержат универсальные множества). Тем не менее полные отношения известны для некоторых начальных борелевских классов, например для класса σ-компактных множеств (часть класса $\mathbf{\Sigma}^0_2 = \mathbf{F}_\sigma$, см., например, [17]). Отношения, "полные" для высших борелевских классов в некотором более слабом смысле (а именно полноты относительно отношений эквивалентности, индуцированных непрерывными действиями группы всех перестановок $\mathbb{N}$), построены в работе [6]. К сожалению, пока наши методы не позволяют построить полные отношения эквивалентности для борелевских классов.

Об организации изложения в статье. Три первых ее раздела содержат вспомогательный материал, главным образом относящийся к разным видам деревьев на счетных множествах и их преобразованиям, включая понятие нормального дерева в разд. 1 и одно ключевое преобразование в разд. 3. Затем вводятся в разд. 4 отношение эквивалентности нормальных деревьев E_{NT} из [13, 17] и в разд. 5 ω_1-последовательность его верхних борелевских аппроксимаций $\mathsf{E}^{\xi}_{\mathrm{NT}}$. Устанавливается, что все $\mathsf{E}^{\xi}_{\mathrm{NT}}$ являются борелевскими отношениями эквивалентности, и оценивается их борелевский класс. Оказывается, что последовательность отношений эквивалентности $\mathsf{E}^{\xi}_{\mathrm{NT}}$ является $\subseteq$-убывающей, $\bigcap_{\xi<\omega_1}\mathsf{E}^{\xi}_{\mathrm{NT}}$ совпадает с E_{NT} и это пересечение обладает важным каноническим свойством пересечения (разд. 6), известным из классических работ по конституантам. Затем в разд. 7 показано, что аппроксимирующие борелевские отношения эквивалентности $\mathsf{E}^{\xi}_{\mathrm{NT}}$ связаны с некоторыми борелевскими идеалами таким же образом, как само E_{NT} связано с некоторым аналитическим идеалом согласно одному результату в [17]. На этом доказательство теоремы 1 фактически заканчивается, так как остается положить $\mathsf{E}_{\nu}=\mathsf{E}^{\omega\nu+2}_{\mathrm{NT}}$.

Затем в разд. 8 мы рассматриваем вопрос о полноте аппроксимирующих отношений эквивалентности в соответствующих борелевских классах.

В заключительном разд. 9 обсуждаются некоторые открытые вопросы.

Для удобства читателя изложение построено так, что, кроме доказательства теоремы 1, приводятся доказательства ряда близких результатов из работ [13, 17], поскольку они получаются в сущности на основе одних и тех же технических лемм. Техника настоящей работы является обобщением соответствующих технических моментов в [13, 17] в том плане, что вместо свойства нефундированности определенных деревьев рассматривается свойство "иметь ранг $\geq\xi$", где ξ — данный счетный ординал (что по определению включает нефундированность).

1. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы используем обычные теоретико-множественные обозначения, включая обозначения, относящиеся к борелевским и проективным классам, а также другие понятия дескриптивной теории множеств (см. [11] или [8] на русском языке). В частности, "аналитический" означает "принадлежащий классу $\mathbf{\Sigma}^1_1$".

Если P — n-арное отношение, то $P(x_1,\dots,x_n)$ означает $\langle x_1,\dots,x_n\rangle\in P$.

Если X — счетное множество, то 2^X рассматривается как топологическое пространство с топологией произведения; это польское пространство (сепарабельное и метризуемое полной метрикой), гомеоморфное канторову дисконтинууму. Множество-степень $\mathcal{P}(X)=\{Y : Y\subseteq X\}$ также рассматривается как польское пространство, изометричное 2^X посредством отображения, которое сопоставляет каждому $Y\subseteq X$ его характеристическую функцию $\chi_Y\in 2^X$.

Симметрическая разность обозначается $X\,\Delta\,Y=(X\setminus Y)\cup(Y\setminus X)$.

Отношения эквивалентности. В части борелевской сводимости отношений эквивалентности запись $\mathsf{E}\leq_{\mathrm{B}}\mathsf{F}$ означает, что E и F — отношения эквивалентности на некоторых польских пространствах X и Y и существует такое борелевское отображение $\vartheta\colon X\to Y$, что выполняется $x\,\mathsf{E}\,x'\Leftrightarrow\vartheta(x)\,\mathsf{F}\,\vartheta(x')$ для всех $x,x'\in X$. Такое отображение ϑ, называемое (борелевской) редукцией E к F, очевидно индуцирует инъекцию E-классов в F-классы, определенную как $[x]_{\mathsf{E}}\mapsto[\vartheta(x)]_{\mathsf{F}}$.

Ассоциированная эквивалентность обозначается $\sim_{\mathrm{B}}$, т.е. $\mathsf{E}\sim_{\mathrm{B}}\mathsf{F}$, если $\mathsf{E}\leq_{\mathrm{B}}\mathsf{F}$ и $\mathsf{F}\leq_{\mathrm{B}}\mathsf{E}$. Наконец, $<_{\mathrm{B}}$ является строгим отношением сводимости, т.е. $\mathsf{E}<_{\mathrm{B}}\mathsf{F}$, когда $\mathsf{E}\leq_{\mathrm{B}}\mathsf{F}$, но не $\mathsf{F}\leq_{\mathrm{B}}\mathsf{E}$.

Идеалы. Любой идеал $\mathcal{I}$ на множестве X ($\mathcal{I}\subseteq\mathcal{P}(X)$, $\mathcal{I}$ замкнут относительно конечных объединений и $\subseteq$-замкнут вниз) порождает отношение эквивалентности $\mathsf{E}_{\mathcal{I}}$ на $\mathcal{P}(X)$ так, что для любых $Y,Z\subseteq X$ отношения $Y\,\mathsf{E}_{\mathcal{I}}\,Z$ и $Y\,\Delta\,Z\in\mathcal{I}$ равносильны. Используя указанное выше отождествление, можно также определить $\mathsf{E}_{\mathcal{I}}$ как отношение эквивалентности на 2^X, для которого при любых $a,b\in 2^X$ отношения $a\,\mathsf{E}_{\mathcal{I}}\,b$ и $\{x\in X : a(x)\neq b(x)\}\in\mathcal{I}$ равносильны.

Деревья. Для любого множества X обозначим через X^n множество всех последовательностей длины n, состоящих из элементов X, и обозначим через $X^{<\omega} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^n$ множество всех конечных последовательностей из элементов X.

Λ — это пустая последовательность; она принадлежит $X^{<\omega}$ для любого $X \neq \varnothing$.

$\mathtt{lh}\, s$ есть длина конечной последовательности s.

$s \subseteq t$ означает, что последовательность t продолжает s (возможно, $t = s$).

$s^\wedge x$ — последовательность, полученная присоединением x как самого правого члена к s.

$x^\wedge s$ понимается аналогично: x становится самым левым членом.

Деревом на множестве X называется любое подмножество $T \subseteq X^{<\omega}$, замкнутое относительно ограничений, т.е. если $t \in T$, $s \in X^{<\omega}$ и $s \subseteq t$, то $s \in T$. Ниже мы будем рассматривать деревья на множествах, являющихся произведениями. В этой связи заметим, что любое $s \in (X_1 \times \ldots \times X_n)^{<\omega}$ формально является последовательностью n-ок $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$, где $x_i \in X_i\ \forall\, i$, но мы будем отождествлять такую s с n-кой $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle$, где все $s_i \in {X_i}^{<\omega}$ имеют ту же длину, что и сама s, и $s(i) = \langle s_1(i), \ldots, s_n(i)\rangle$ для всех i.

Ранги. Пусть ∞ обозначает формальный элемент, больший, чем все ординалы. Известно, что любое дерево $R \subseteq X^{<\omega}$ допускает *функцию ранга* — единственное отображение $\mathtt{rnk}_R\colon R \to \mathtt{Ord} \cup \{\infty\}$, удовлетворяющее следующим требованиям:

(a) $\mathtt{rnk}_R(r) = -1$ для всех $r \notin R$;

(b) $\mathtt{rnk}_R(r) = \sup_{r^\wedge n\in R} \mathtt{rnk}_R(r^\wedge n)$ для всех $r \in R$.[5] В частности, $\mathtt{rnk}_R(r) = 0$ тогда и только тогда, когда $r \in R$ — $\subseteq$-максимальный элемент R;

(c) $\mathtt{rnk}_R(r) = \infty$ тогда и только тогда, когда R имеет бесконечную ветвь, содержащую r, т.е. существует $\gamma \in X^\omega$ такое, что $\gamma \restriction n \in R$ для всех n и $\gamma \restriction \mathtt{lh}\, r = r$.

Дополнительно положим $\mathtt{rnk}(\varnothing) = -1$ для пустого дерева $\varnothing$ и $\mathtt{rnk}(R) = \mathtt{rnk}_R(\Lambda)$ для любого непустого дерева R. (Заметим, что пустая последовательность Λ принадлежит любому дереву $\varnothing \neq R \subseteq X^{<\omega}$.) Дерево R фундировано (т.е. оно не имеет бесконечных ветвей), когда $\mathtt{rnk}(R) < \infty$.

Нормальные деревья. Если X — упорядоченное множество (например, $X = \mathbb{N}$) и $s, t \in X^{<\omega}$, то $s \le_{\mathtt{cw}} t$ означает, что $\mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, t$ и $s(i) \le t(i)$ для всех $i < \mathtt{lh}\, s$. (Это *покомпонентный* порядок, отличный от лексикографического.) Если бинарная операция сложения $+$ определена на X (например, $X = \mathbb{N}$) и $s, t \in X^{<\omega}$, $\mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, t$, то $s +_{\mathtt{cw}} t$ — последовательность той же длины, определенная через покомпонентное сложение $(s +_{\mathtt{cw}} t)(i) = s(i) + t(i)$ для всех i. Следующее определение вводит класс деревьев, играющий ключевую роль в этой работе.

Определение 2 (см. [13, 17]). Дерево T на $2 \times \mathbb{N}$ называется *нормальным*, когда для любых $u \in 2^{<\omega}$ и $s, t \in \mathbb{N}^{<\omega}$ таких, что $\mathtt{lh}\, u = \mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, t$ и $s \le_{\mathtt{cw}} t$, мы имеем $\langle u, s\rangle \in T \Rightarrow \langle u, t\rangle \in T$.

NT есть множество всех непустых нормальных деревьев $T \subseteq (2 \times \mathbb{N})^{<\omega}$. □

Например, само $(2 \times \mathbb{N})^{<\omega}$ — нормальное дерево.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДЕРЕВЬЕВ

Здесь мы рассматриваем некоторые преобразования деревьев на $\mathbb{N}$. Главной целью будет оценка ранга преобразованных деревьев в сравнении с рангом исходных.

Конечное объединение. Рассмотрим любую пару деревьев $S, T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$. *Мы утверждаем, что* $\mathtt{rnk}(S \cup T) = \mathtt{max}\{\mathtt{rnk}(S), \mathtt{rnk}(T)\}$. В самом деле, достаточно доказать равенство

$(*)$ $\mathtt{rnk}_{S\cup T}(r) = \mathtt{max}\{\mathtt{rnk}_S(r), \mathtt{rnk}_T(r)\}$

[5] Мы определяем $\sup\Omega$ для $\Omega \subseteq \mathtt{Ord}$ как наименьший ординал, строго больший, чем все ординалы из Ω. Мы также определяем $\sup\Omega = \infty$, когда Ω содержит ∞.

для всех $r \in S \cup T$. Если $\mathtt{rnk}_{S\cup T}(r) = \infty$, то дерево $S \cup T$ содержит бесконечную ветвь, следовательно, это справедливо по крайней мере для одного из деревьев S, T, так что мы также имеем $\mathtt{max}\{\mathtt{rnk}_S(r), \mathtt{rnk}_T(r)\} = \infty$. Остается проверить $(*)$ при помощи трансфинитной индукции по $\mathtt{rnk}_{S\cup T}(r)$ в случае, когда $\mathtt{rnk}_{S\cup T}(r) < \omega_1$. Если этот ординал равен 0, то r является $\subseteq$-максимальным в $S\cup T$, откуда с очевидностью следует, что $\mathtt{rnk}_S(r) \le 0$, $\mathtt{rnk}_T(r) \le 0$ и по крайней мере один из них есть в точности 0. Если $0 < \mathtt{rnk}_{S\cup T}(r) < \omega_1$, то по индуктивному предположению

$$\mathtt{rnk}_{S\cup T}(r) = \sup_n \bigl\{\mathtt{rnk}_{S\cup T}(r^\wedge n)\bigr\} = \sup_n \mathtt{max}\bigl\{\mathtt{rnk}_S(r^\wedge n), \mathtt{rnk}_T(r^\wedge n)\bigr\} = \mathtt{max}\bigl\{\mathtt{rnk}_S(r), \mathtt{rnk}_T(r)\bigr\},$$

что и требовалось.

Сжатие. Пусть $S \subseteq 2^{<\omega}$ — дерево. Зафиксируем раз и навсегда биекцию $b\colon \mathbb{N}^2 \xrightarrow{\text{на}} \mathbb{N}$. Для любой конечной последовательности $s = \langle k_0, k_1, \dots, k_n\rangle \in 2^{<\omega}$ длины $\mathtt{lh}\, s = n+1 \ge 2$ определим последовательность $\widehat{s} = \langle b(k_0,k_1), k_2, \dots, k_n\rangle$ длины n. Обозначим через $\widehat{S} = \{\Lambda\} \cup \cup \{\widehat{s}\colon s \in S \wedge \mathtt{lh}\, s \ge 2\}$ *сжатое дерево.* Тогда $\mathtt{rnk}(\widehat{S}) = \mathtt{rnk}(S) - 1$, где $\infty - 1 = \infty$, $\lambda - 1 = \lambda$ для любого предельного ординала λ или $\lambda = 0$, и наконец, $(\xi+1) - 1 = \xi$.

Счетное объединение. Равенство $\mathtt{rnk}(S \cup T) = \mathtt{max}\{\mathtt{rnk}(S), \mathtt{rnk}(T)\}$ очевидно нарушается для счетных объединений. Однако имеется другая полезная операция. Для любой последовательности деревьев $T_n \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ пусть $\sum_n^* S_n$ обозначает дерево $T = \{\Lambda\} \cup \{n^\wedge t\colon t \in T_n\}$. Понятно, что $\mathtt{rnk}_T(n^\wedge t) = \mathtt{rnk}_{T_n}(t)$ и потому $\mathtt{rnk}(T) = \mathtt{sup}_n\, \mathtt{rnk}(T_n)$.

Счетное пересечение. Для заданной последовательности деревьев $T_n \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ как определить дерево T, удовлетворяющее $\mathtt{rnk}(T) = \mathtt{inf}_n\, \mathtt{rnk}(T_n)$? В принципе может быть использовано подпроизведение по равной длине обычного декартова произведения $\prod_{n\in\mathbb{N}} T_n$. В самом деле, пусть T состоит из всех $t \in \prod_{n\in\mathbb{N}} T_n$ таких, что $\mathtt{lh}\, t(n) = \mathtt{lh}\, t(m)$ для всех $m, n \in \mathbb{N}$, с покомпонентным порядком ($s \preccurlyeq t$, когда $s(n) \subseteq t(n)$ для всех n) — это дерево T является искомым. Однако эта конструкция не очень полезна для наших целей, поскольку такое дерево T будет, вообще говоря, несчетным.

Чтобы решить эту проблему, мы определяем $\prod_n^* T_n$ как множество всех конечных последовательностей вида $t = \langle t_0, \dots, t_n\rangle$, где $t_n \in T_n$ и $\mathtt{lh}\, t_k = n$ для всех $k \le n$. Мы полагаем $\langle t_0, \dots, t_n\rangle \preccurlyeq \langle s_0, \dots, t_m\rangle$, когда $n \le m$ и $t_k \subseteq s_k$ (в $\mathbb{N}^{<\omega}$) для всех $k \le n$. Дополнительно мы вводим Λ в T, полагая $\Lambda \preccurlyeq t$ для любого $t \in T$. Очевидно, что $\langle T; \preccurlyeq\rangle$ — не более чем счетное дерево, порядково изоморфное некоторому дереву в $\mathbb{N}^{<\omega}$.

Лемма 3. *Допустим, что T_n, $n \in \mathbb{N}$, — деревья в $\mathbb{N}^{<\omega}$ и $T = \prod_n^* T_n$. Тогда $\mathtt{rnk}(T) \le \le \mathtt{min}_{n\in\mathbb{N}}\, \mathtt{rnk}(T_n) + n$. Дополнительно, $\mathtt{rnk}(T) = \infty$ равносильно тому, что $\mathtt{rnk}(T_n) = \infty$ для всех n.*

Доказательство. Простое рассуждение трансфинитной индукцией по $\mathtt{rnk}_T(t)$ показывает, что $\mathtt{rnk}_T(t) \le \mathtt{rnk}_{T_n}(t_n)$ всякий раз, когда $n \le m$ и $t = \langle t_0, \dots, t_m\rangle \in T$. Отсюда следует, что $\mathtt{rnk}(T) \le n + \mathtt{min}_{t\in T_n,\, \mathtt{lh}\, t = n}\, \mathtt{rnk}_{T_n}(t_n)$ и поэтому $\mathtt{rnk}(T) \le \mathtt{rnk}(T_n) + n$. Это неравенство также выполняется в случае, когда $\mathtt{rnk}(T_n) < n$ (так что T_n не содержит последовательностей длины $\ge n$), тогда на самом деле $\mathtt{rnk}(T) \le n$. Таким образом, в любом случае $\mathtt{rnk}(T) \le \mathtt{rnk}(T_n) + n$.

Отметим также, что бесконечная ветвь в T может быть без труда получена, коль скоро бесконечная ветвь имеется в каждом дереве T_n, и, наоборот, из бесконечной ветви в дереве T мы немедленно получаем бесконечные ветви во всех деревьях T_n. $\square$

Дополнительное слагаемое $+n$ в лемме неприятно, но оно мало значит в наиболее важном случае применения леммы в этой работе: $\mathtt{rnk}(T) \le \lambda$ всякий раз, когда λ — предельный ординал и $\mathtt{rnk}(T_n) < \lambda$ для всех n.

Покомпонентная сумма. Положим $S +_{\mathtt{cw}} T = \{s +_{\mathtt{cw}} t \colon s \in S \wedge t \in T \wedge \mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, t\}$ для любых деревьев $S, T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$. Следующая техническая лемма будет несколько раз использована ниже. Она показывает, что покомпонентное сложение деревьев ведет себя до некоторой степени сходно с декартовым произведением по равной длине, т.е. $S \times T = \{\langle s, t\rangle \colon s \in S \wedge t \in T \wedge \mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, t\}$.

Лемма 4. *Пусть* $S, T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ *— любые деревья и* $W = S +_{\mathtt{cw}} T$.

Если $s \in S$, $t \in T$ *и* $\mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, t$, *то* $\mathtt{rnk}_W(s +_{\mathtt{cw}} t) \ge \mathtt{min}\{\mathtt{rnk}_S(s), \mathtt{rnk}_T(t)\}$.

Обратно, для любого $w \in W$ *существуют последовательности* $s \in S$, $t \in T$ *такие, что* $\mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, t = \mathtt{lh}\, w$, $s +_{\mathtt{cw}} t = w$ *и* $\mathtt{rnk}_W(w) = \mathtt{min}\{\mathtt{rnk}_S(s), \mathtt{rnk}_T(t)\}$.

Тем самым $\mathtt{rnk}(W) = \mathtt{min}\{\mathtt{rnk}(S), \mathtt{rnk}(T)\}$.

Доказательство. Индукцией по ординалу $\mu_{st} = \mathtt{min}\{\mathtt{rnk}_S(s), \mathtt{rnk}_T(t)\}$ доказываем первое неравенство. Если $\mu_{st} = 0$, то доказывать нечего. Предположим, что $\mu_{st} = \mu + 1$. По определению существуют числа $i, j \in \mathbb{N}$ такие, что $s' = s^\wedge i \in S$, $t' = t^\wedge j \in T$ и $\mu_{s't'} \ge \mu$. Тогда $\mathtt{rnk}_W(s' +_{\mathtt{cw}} t') \ge \mu$ по индуктивному предположению и, следовательно, $\mathtt{rnk}_W(s +_{\mathtt{cw}} t) \ge \mu + 1$, поскольку $s' +_{\mathtt{cw}} t' = (s +_{\mathtt{cw}} t)^\wedge (i + j)$. Предельный шаг, т.е. когда μ_{st} — предельный ординал $< \omega_1$, и шаг в случае, когда один или оба ранга $\mathtt{rnk}_S(s)$, $\mathtt{rnk}_T(t)$ равны ∞ (случай нефундированных деревьев), рассматриваются аналогично.

Доказываем второе утверждение индукцией по $\mu_w = \mathtt{rnk}_W(w)$.

Если $\mu_w = \mu + 1$ (непредельный индуктивный шаг), то существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $w' = w^\wedge k \in W$. Применяя индуктивное предположение, мы находим $s' = s^\wedge i \in S$ и $t' = t^\wedge j \in T$ такие, что $w' = s' +_{\mathtt{cw}} t'$ и $\mathtt{rnk}_W(w') = \mathtt{min}\{\mathtt{rnk}_S(s'), \mathtt{rnk}_T(t')\}$. Теперь очевидно, что $s +_{\mathtt{cw}} t = w$ и $\mathtt{rnk}_W(w) = \mathtt{min}\{\mathtt{rnk}_S(s), \mathtt{rnk}_T(t)\}$.

Рассмотрим предельный индуктивный шаг: $\mu_w = \lambda < \omega_1$ — предельный ординал. Для любого $\xi < \lambda$ существует $k_\xi \in \mathbb{N}$ такое, что $w^\wedge k_\xi \in S$ и $\mathtt{rnk}_W(w^\wedge k_\xi) \ge \xi$, следовательно, по индуктивному предположению существуют $s'_\xi = s_\xi{}^\wedge i_\xi \in S$ и $t'_\xi = t_\xi{}^\wedge j_\xi \in T$ такие, что $s'_\xi +_{\mathtt{cw}} t'_\xi = w^\wedge k_\xi$ и $\mathtt{min}\{\mathtt{rnk}_S(s'_\xi), \mathtt{rnk}_T(t'_\xi)\} \ge \xi$. Тогда $s_\xi +_{\mathtt{cw}} t_\xi = w$ для всех $\xi < \lambda$, в частности, s_ξ и t_ξ принадлежат конечному множеству $\{t \in \mathbb{N}^{\mathtt{lh}\, w} \colon t \le_{\mathtt{cw}} w\}$. Отсюда следует, что существуют $s \in S$, $t \in T$ такие, что $\mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, t = \mathtt{lh}\, w$, $s +_{\mathtt{cw}} t = w$, и мы имеем $s_\xi = s$ и $t_\xi = t$ для конфинального в λ множества ординалов ξ. Понятно, что эти s, t таковы, как нам нужно.

Наконец, предположим, что $\mu_w = \infty$, таким образом, существует $\gamma \in \mathbb{N}^\omega$ такое, что $\gamma \restriction \mathtt{lh}\, w = w$ и $\gamma \restriction n \in W$ для всех n. Тогда для каждого n существуют $s_n \in S$ и $t_n \in T$ длины n, удовлетворяющие $s_n +_{\mathtt{cw}} t_n = \gamma \restriction n$. Последовательности s_n, t_n принадлежат множеству $\{t \in \mathbb{N}^{<\omega} \colon t \le_{\mathtt{cw}} \gamma \restriction \mathtt{lh}\, t\}$, которое является деревом с конечными ветвлениями. Поэтому по лемме Кёнига имеются бесконечные последовательности $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^\omega$ такие, что $\forall\, m\; \exists\, n \ge m\; (\alpha \restriction m = s_n \restriction m \wedge \beta \restriction m = t_n \restriction m)$. Очевидно, что $\alpha +_{\mathtt{cw}} \beta = \gamma$ и в то же время $\alpha \restriction m \in S$ и $\beta \restriction m \in T$ выполнены для всех m. Определим $s = \alpha \restriction \mathtt{lh}\, w$ и $t = \beta \restriction \mathtt{lh}\, w$; тогда $\mathtt{rnk}_S(s) = \mathtt{rnk}_T(t) = \infty$ и $w = s +_{\mathtt{cw}} t$, что и требовалось. □

3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛУВО–РОЗЕНДАЛЯ

Рассмотрим произвольное $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество A в пространстве $2^\omega \times 2^\omega$. Из элементарной топологии польских пространств известно, что любое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество в польском пространстве S совпадает с проекцией на S некоторого замкнутого подмножества пространства $S \times \mathbb{N}^\omega$. Тем самым существует замкнутое множество $P \subseteq 2^\omega \times 2^\omega \times \mathbb{N}^\omega$, удовлетворяющее $A = \mathtt{dom}\, P = \{\langle x, y\rangle : \exists\, z\; P(x, y, z)\}$. Далее, существует дерево $R \subseteq (2 \times 2 \times \mathbb{N})^{<\omega}$ (дерево на $2 \times 2 \times \mathbb{N}$) такое, что $P = [R] = \{\langle x, y, \gamma\rangle \colon \forall\, n\; R(x \restriction n, y \restriction n, \gamma \restriction n)\}$, и потому

$$\langle x, y\rangle \in A \;\Leftrightarrow\; \exists\, \gamma \in \mathbb{N}^\omega\; \forall\, n\; R(x \restriction n, y \restriction n, \gamma \restriction n) \;\Leftrightarrow\; R_{xy} \text{ не фундировано}, \qquad (1)$$

где для любого дерева $R\subseteq(2\times2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ и любых $x,y\in2^\omega$ $R_{xy}=\{s\in\mathbb{N}^{<\omega}\colon R(x\restriction\mathtt{lh}\,s, y\restriction\mathtt{lh}\,s, s)\}$. (Ясно, что R_{xy} является поддеревом $\mathbb{N}^{<\omega}$.) Если A — произвольное $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество, то, вероятно, мало что может быть установлено относительно структуры дерева R, которое порождает A в смысле (1). Однако, предполагая, что $A=\mathsf{E}$ — отношение эквивалентности на 2^ω, мы можем предполагать лучшее поведение R. И это действительно имеет место.

Теорема 5. *Допустим, что $Q\subseteq(2\times2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ является деревом и множество*

$$\mathsf{E}=\bigl\{\langle x,y\rangle\in2^\omega\times2^\omega\colon\ \exists\gamma\in\mathbb{N}^\omega\,\forall n\,Q(x\restriction n,y\restriction n,\gamma\restriction n)\bigr\}=$$
$$=\bigl\{\langle x,y\rangle\colon\ Q_{xy}\ \text{не фундировано, т.е. } \mathtt{rnk}(Q_{xy})=\infty\bigr\}\tag{2}$$

является отношением эквивалентности на 2^ω. Тогда существует дерево $R\subseteq(2\times2\times\mathbb{N})^{<\omega}$, удовлетворяющее следующим условиям:

(i) *симметрия*: $R(u,v,s)\Leftrightarrow R(v,u,s)$ *и тогда* $R_{xy}=R_{yx}$ *для всех* $x,y\in2^\omega$;

(ii) *если* $u\in2^\omega$, $s\in\mathbb{N}^\omega$, $\mathtt{lh}\,s=\mathtt{lh}\,u$, *то* $R(u,u,s)$;

(iii) *нормальность, как в разд.* 1: *если* $R(u,v,s)$, $t\in\mathbb{N}^\omega$, $s\le_{\mathtt{cw}}t$, *то* $R(u,v,t)$;

(iv) *транзитивность*: *если* $R(u,v,s)$ *и* $R(v,w,t)$, *то* $R(u,w,s+_{\mathtt{cw}}t)$;

(v) *для любых* $x,y\in2^\omega$ $\mathtt{rnk}(R_{xy})=\infty$ *тогда и только тогда, когда* $\mathtt{rnk}(Q_{xy})=\infty$, *и поэтому* (2) *выполнено и для дерева R вместо Q.*

Эта теорема равносильна теореме 4 в [13].

Доказательство. *Часть* 1. Заметим, что дерево

$$\widehat{Q}=Q\cup\bigl\{\langle u,u,s\rangle\colon\ u\in2^\omega\wedge s\in\mathbb{N}^\omega\wedge\mathtt{lh}\,s=\mathtt{lh}\,u\bigr\}\cup\{\langle u,v,s\rangle\colon Q(v,u,s)\}$$

удовлетворяет $\widehat{Q}_{xy}=Q_{xy}\cup Q_{yx}\cup D_{xy}$, где $D_{xy}=\mathbb{N}^{<\omega}$ при $x=y$, а иначе $D_{xy}=\varnothing$. Однако если $x=y$, то $x\,\mathsf{E}\,y$ (поскольку E — отношение эквивалентности) и потому $\mathtt{rnk}(Q_{xy})=\infty$. Отсюда следует, что $\mathtt{rnk}(\widehat{Q}_{xy})=\mathtt{max}\{\mathtt{rnk}(Q_{xy}),\mathtt{rnk}(Q_{yx})\}$ для всех x, y (мы ссылаемся на результат для объединений в разд. 2), следовательно, (2) все еще выполнено для $\widehat{Q}$. Кроме того, очевидно, что $\widehat{Q}$ удовлетворяет как (i), так и (ii) и $\widehat{Q}$ ξ-ограничено, если таковым является Q.

Таким образом, *мы можем с самого начала предполагать, что Q удовлетворяет* (i) *и* (ii).

Часть 2. В этом предположении, чтобы выполнить (iii), положим

$$\widehat{Q}=\bigl\{\langle u,v,t\rangle\in(2\times2\times\mathbb{N})^{<\omega}\colon\ \exists\,\langle u,v,s\rangle\in Q\ (s\le_{\mathtt{cw}}t)\bigr\}.$$

Это все еще является деревом на $2\times2\times\mathbb{N}$, включающим Q и удовлетворяющим (i), (ii), (iii). Кроме того, мы имеем $\widehat{Q}_{xy}=Q_{xy}+_{\mathtt{cw}}2^{<\omega}$ для всех $x,y\in2^\omega$, поэтому $\mathtt{rnk}(Q_{xy})=\mathtt{rnk}(\widehat{Q}_{xy})$ согласно лемме 4, следовательно, (2) выполнено для $\widehat{Q}$ и $\widehat{Q}$ ξ-ограничено, если таковым является Q.

Таким образом, *мы можем с самого начала предполагать, что Q удовлетворяет условиям* (i), (ii), (iii).

Часть 3. Несколько более сложной задачей является выполнение (iv). Действуя прямолинейно, мы могли бы определить новое дерево R так, что оно содержало бы все тройки вида $\langle u_0,u_{n+1},s_0+_{\mathtt{cw}}\ldots+_{\mathtt{cw}}s_k\rangle$, где $\langle u_i,u_{i+1},s_i\rangle\in Q$ для всех $i=0,1,\ldots,k$. Однако, чтобы все это действовало правильно, такое построение должно быть снабжено счетчиком для числа k шагов в указанной конечной цепочке. Приступим к реализации этой идеи.

Рассуждая в предположении, что Q удовлетворяет (i), (ii), (iii) (см. часть 2), мы определяем дерево $R\subseteq(2\times2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ следующим образом. Допустим, что $n\in\mathbb{N}$, $u,v\in2^n$, $s\in\mathbb{N}^n$, $k\in\mathbb{N}$ и $i,j\in2=\{0,1\}$. Определим, что $\langle u^\wedge i,v^\wedge j,k^\wedge s\rangle\in R$ в случае, когда

$$\exists\,u_0,u_1,\ldots,u_k\in2^n\ \bigl(u_0=u\wedge u_k=v\wedge\forall\,\ell<k\,Q(u_\ell,u_{\ell+1},s)\bigr).\tag{3}$$

Кроме того, мы полагаем, конечно, что $\langle\Lambda,\Lambda,\Lambda\rangle \in R$ (Λ — пустая последовательность). Понятно, что R — дерево на $2\times 2\times \mathbb{N}$, поскольку таковым является Q.

Мы утверждаем, что в наших предположениях дерево R удовлетворяет всем требованиям (i)–(v).

(i) Если $u_0,\dots,u_k$ обеспечивают $R(u^\wedge i, v^\wedge j, k^\wedge s)$, то инвертированная последовательность $u_k,\dots,u_0$ обеспечивает $R(v^\wedge j, u^\wedge i, k^\wedge s)$ в смысле (3), поскольку дерево Q удовлетворяет (i).

(iii) Предположим, что $\langle u^\wedge i, v^\wedge j, k^\wedge s\rangle \in R$, и пусть $u_0,\dots,u_k$ обеспечивают (3). Обозначим $n = \mathtt{lh}\, u = \mathtt{lh}\, v = \mathtt{lh}\, s = \mathtt{lh}\, u_\ell\ \forall \ell$. Допустим, что $k \le k'$ и $s \le_{\mathtt{cw}} s'$ (тем самым $\mathtt{lh}\, s' = n$). Положим $u_\ell = v$ всякий раз, когда $k < \ell \le k'$. Тогда $Q(u_\ell, u_{\ell+1}, s)$ также выполнено при $k < \ell < k'$ согласно (ii) для Q (в самом деле, в этом случае $u_\ell = u_{\ell+1}$). Следовательно, $Q(u_\ell, u_{\ell+1}, s')$ выполнено для всех $\ell < k'$ согласно (iii) для Q. По определению это обеспечивает $\langle u^\wedge i, v^\wedge j, k'^\wedge s'\rangle \in R$, что и требовалось.

(ii) Если $k=0$ и $u=v$, то (3) выполнено по очевидным соображениям (с пустым списком промежуточных последовательностей $u_1,\dots,u_{k-1}$) и потому для всех $u\in 2^\omega$, $s\in\mathbb{N}^\omega$ одинаковой длины имеет место $R(u^\wedge i, u^\wedge j, 0^\wedge s)$, в частности $R(u,u,0^n)$ для всех n и $u\in\mathbb{N}^\omega$ с $\mathtt{lh}\, u = n$. Остается применить только что доказанное свойство (iii).

(iv) Предположим, что тройки $\langle u^\wedge i, v^\wedge j, k^\wedge s\rangle$ и $\langle v^\wedge j, w^\wedge \rho, \kappa^\wedge \sigma\rangle$ принадлежат R, а n является длиной каждой из последовательностей u, v, s, w, σ. Допустим, что $u_0,\dots,u_k$ обеспечивают выполнение $R(u^\wedge i, v^\wedge j, k^\wedge s)$ в смысле (3) и соответственно $v_0,\dots,v_\kappa$ обеспечивают $R(v^\wedge j, w^\wedge\rho, \kappa^\wedge\sigma)$. (Все u_ℓ и v_ℓ принадлежат к 2^n.) Раз Q удовлетворяет (iii), те же самые последовательности обеспечивают $R(u^\wedge i, v^\wedge j, k^\wedge t)$ и $R(v^\wedge j, w^\wedge\rho, \kappa^\wedge t)$, где $t = s +_{\mathtt{cw}} \sigma$ (покомпонентно). Отсюда легко следует, что объединенный комплекс $u_0,\dots,u_{k-1}, u_k = v_0, v_1,\dots,v_\kappa$ обеспечивает $R(u^\wedge i, w^\wedge\rho, (k+\kappa)^\wedge t)$, что и требовалось.

(v) Заметим, что по определению $Q(u,v,s) \Rightarrow R(u^\wedge i, v^\wedge j, 1^\wedge s)$ для всех $i,j = 0,1$. Отсюда следует, что для любых $x,y\in 2^\omega$ $s\in Q_{xy} \Rightarrow 1^\wedge s \in R_{xy}$ и потому R_{xy} является нефундированным, если таковым является Q_{xy}.

Обратная импликация в (v) требует бóльших усилий. Это рассуждение принадлежит Луво и Розендалю [13]. Предположим, что $\mathtt{rnk}(R_{xy}) = \infty$, т.е. существует бесконечная последовательность $\delta\in\mathbb{N}^\omega$ такая, что $\forall n\, R(x\restriction n, y\restriction n, \delta\restriction n)$. Положим $k=\delta(0)$ и $\gamma(m) = \delta(m+1)$ для всех m, так что $\delta = k^\wedge\gamma$. По определению для каждого n существуют последовательности $u_0^n,\dots,u_k^n \in 2^n$, удовлетворяющие $u_0^n = x\restriction n$, $u_k^n = y\restriction n$, и $Q(u_\ell^n, u_{\ell+1}^n, \gamma\restriction n)$ для всех $\ell < k$. Каждая $(k+1)$-ка $\langle u_0^n,\dots,u_k^n\rangle \in (2^n)^{k+1}$ может быть рассмотрена как n-ка в $(2^{k+1})^n$. Согласно лемме Кёнига найдутся бесконечные последовательности $x_0,\dots,x_k\in 2^\omega$ такие, что для любого m существует число $n\ge m$, удовлетворяющее $x_\ell\restriction m = u_\ell^n\restriction m$ для всех $\ell\le k$. Отсюда следует, что $x_0 = x$, $x_k = y$ и, поскольку Q — дерево, $Q(x_\ell\restriction m, x_{\ell+1}\restriction m, \gamma\restriction m)$ выполнено для всех $\ell < k$ и всех m. Мы выводим отсюда $x_\ell \mathsf{E} x_{\ell+1}$ для всех $\ell<k$ согласно (2) для Q, откуда вытекает $x \mathsf{E} y$, так как E — отношение эквивалентности. Окончательно Q_{xy} не фундировано по (2) для Q. □

4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ НОРМАЛЬНЫХ ДЕРЕВЬЕВ

Напомним, что аналитическое (т.е. $\mathbf{\Sigma}^1_1$) отношение эквивалентности U является *полным*, когда $\mathsf{F} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{U}$ выполнено для любого другого аналитического отношения эквивалентности F. Хорошо известна элементарная конструкция, в результате которой возникает такое отношение.

Пример 6 (“универсальное” полное аналитическое отношение эквивалентности)**.** Мы начинаем с $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества $U\subseteq\mathcal{N}^3$, универсального в том смысле, что для любого $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества $P\subseteq\mathcal{N}^2$ найдется $x\in\mathcal{N}$ такое, что P совпадает с сечением $U_x = \{\langle y,z\rangle\colon \langle x,y,z\rangle\in U\}$. (См. [11] о существовании универсальных множеств в борелевских и проективных классах.)

Определим множество $P \subseteq \mathcal{N}^3$ так, что каждое сечение P_x совпадает с замыканием сечения U_x по эквивалентности, т.е. с наименьшим отношением эквивалентности, включающим U_x. Формально $\langle y, z\rangle \in P_x$, когда имеется конечная цепочка $y = y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1} = z$ такая, что для любого $k \le n$ или $\langle y_k, y_{k+1}\rangle$ принадлежит U_x, или $\langle y_{k+1}, y_k\rangle$ принадлежит U_x, или просто $y_k = y_{k+1}$.

Понятно, что P все еще является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством в $\mathcal{N}^3$, а каждое сечение P_x — это (аналитическое) отношение эквивалентности. Сверх того, если уже само U_x — отношение эквивалентности, то просто $P_x = U_x$. Таким образом, семейство всех сечений P_x, $x \in \mathcal{N}$, тождественно семейству всех аналитических отношений эквивалентности на $\mathcal{N}$. Мы утверждаем, что (аналитическое) отношение эквивалентности U на $\mathcal{N}^2$, определенное так, что $\langle x, y\rangle \mathrel{\mathsf{U}} \langle x', y'\rangle$, когда $x = x'$ и $\langle y, y'\rangle \in P_x$, является полным. В самом деле, возьмем любое аналитическое отношение эквивалентности F на $\mathcal{N}$. Тогда $\mathsf{F} = P_x$ для подходящего x согласно сказанному выше, а потому отображение $\vartheta(y) = \langle x, y\rangle$ есть непрерывная редукция F к U, что и требовалось. $\square$

Однако природа свойства полноты отношений эквивалентности, определенных таким общим методом, не очень удобна для некоторых приложений. Именно поэтому иногда рассматриваются другие примеры полных отношений, в которых полнота реализована более специальным образом. Чтобы определить важный пример такого более специального полного аналитического отношения эквивалентности, мы используем понятие нормального дерева (см. определение 2).

Определение 7 (эквивалентность нормальных деревьев [13]). Предположим, что $S, T \in$ $\in \mathbf{NT}$. Через $\textsc{Emb}(S, T)$ будет обозначаться множество всех конечных последовательностей $f \in \mathbb{N}^{<\omega}$ таких, что $\langle u, s\rangle \in S \Rightarrow \langle u, s +_{\mathtt{cw}} (f \restriction n)\rangle \in T$ для всех $n \le \mathtt{lh}\, f$ и $u \in 2^n$, $s \in \mathbb{N}^n$.

Понятно, что $\textsc{Emb}(S, T)$ — дерево в $\mathbb{N}^{<\omega}$, содержащее Λ.

Определяем $S \le_{\mathrm{NT}} T$, когда дерево $\textsc{Emb}(S, T)$ не фундировано, или, что равносильно,

$$\exists\, \gamma \in \mathbb{N}^\omega\, \forall\, n\, \forall\, u \in 2^n\, \forall\, s \in \mathbb{N}^n\, \big(\langle u, s\rangle \in S \Rightarrow \langle u, s +_{\mathtt{cw}} \gamma \restriction n\rangle \in T\big).$$

Определяем $S \mathrel{\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}} T$, когда $S \le_{\mathrm{NT}} T$ и $T \le_{\mathrm{NT}} S$.[6] $\square$

Итак, $S \le_{\mathrm{NT}} T$ указывает на существование определенного сдвигового вложения T в S. Отношение $\le_{\mathrm{NT}}$ является частичным упорядочением $\mathbf{NT}$, соответственно E_{NT} — отношение эквивалентности на $\mathbf{NT}$. Далее, применяя покомпонентное сложение к последовательностям γ, обеспечивающим $\le_{\mathrm{NT}}$, нетрудно доказать, что $S \mathrel{\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}} T$ равносильно существованию $\gamma \in \mathbb{N}^\omega$ такого, что для всех n и всех $u \in 2^n$ и $s \in \mathbb{N}^n$ мы одновременно имеем следующее:

$$\langle u, s\rangle \in S \Rightarrow \langle u, s +_{\mathtt{cw}} \gamma \restriction n\rangle \in T \qquad \text{и} \qquad \langle u, s\rangle \in T \Rightarrow \langle u, s +_{\mathtt{cw}} \gamma \restriction n\rangle \in S. \tag{4}$$

Можно заметить, что по определению любое $T \in \mathbf{NT}$ является подмножеством счетного множества $(2 \times \mathbb{N})^{<\omega}$. Тем самым $\mathbf{NT}$ есть подмножество польского пространства $\mathcal{P}((2 \times \mathbb{N})^{<\omega})$, которое, как обычно, может быть идентифицировано с произведением $2^{(2\times\mathbb{N})^{<\omega}}$. (Элементарные выкладки показывают, что $\mathbf{NT}$ — замкнутое множество.) Таким образом, отношения $\le_{\mathrm{NT}}$ и E_{NT} формально являются подмножествами $\mathcal{P}((2 \times \mathbb{N})^{<\omega}) \times \mathcal{P}((2 \times \mathbb{N})^{<\omega})$.

Теорема 8 ($\approx$ [13, Theorem 5]). *E_{NT} есть полное аналитическое отношение эквивалентности на $\mathbf{NT}$.*

Доказательство. То, что $\le_{\mathrm{NT}}$ и E_{NT} являются $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношениями, может быть проверено непосредственной оценкой. (Главный квантор выражает существование $\gamma \in \mathbb{N}^\omega$ с определенными свойствами.) Для проверки, что E_{NT} — отношение эквивалентности, достаточно убедиться, что $\le_{\mathrm{NT}}$ — транзитивное отношение. Предположим, что $R \le_{\mathrm{NT}} S$ и $S \le_{\mathrm{NT}} T$, где R, S, T —

[6] $\le_{\mathrm{NT}}$ и E_{NT} обозначены соответственно через $\le^*_{\max}$ и $E^*_{\max}$ в [17].

нормальные деревья в $(2\times\mathbb{N})^{<\omega}$. Тогда деревья $U=\textsc{Emb}(R,S)$ и $V=\textsc{Emb}(S,T)$ (деревья на $\mathbb{N}^{<\omega}$) не фундированы, формально $\mathtt{rnk}(U)=\mathtt{rnk}(V)=\infty$. Отсюда согласно лемме 4 следует, что дерево $W=U+_{\mathtt{cw}}V$ удовлетворяет $\mathtt{rnk}(W)=\infty$. С другой стороны, нетрудно проверить, что $W\subseteq\textsc{Emb}(R,T)$. Тем самым дерево $\textsc{Emb}(R,T)$ не фундировано, что и требовалось.

Для доказательства полноты E_{NT} рассмотрим любое аналитическое отношение эквивалентности E на 2^ω. Тогда E является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-подмножеством $2^\omega\times2^\omega$, и потому существует замкнутое множество $P\subseteq2^\omega\times2^\omega\times\mathbb{N}^\omega$ такое, что $\mathsf{E}=\mathtt{dom}\,P=\{\langle x,y\rangle\colon\exists\,z\,P(x,y,z)\}$. Далее, имеется дерево $Q\subseteq(2\times2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ (дерево на $2\times2\times\mathbb{N}$) такое, что $P=[Q]=\{\langle x,y,\gamma\rangle\colon\forall\,n\,Q(x\restriction n,y\restriction n,\gamma\restriction n)\}$. Другими словами,

$$x\,\mathsf{E}\,y\;\Leftrightarrow\;Q_{xy}\;\text{не фундировано}\;\Leftrightarrow\;\mathtt{rnk}(Q_{xy})=\infty\qquad\text{для всех } x,y\in2^\omega. \tag{5}$$

Из теоремы 5 следует, что существует другое дерево $R\subseteq(2\times2\times\mathbb{N})^{<\omega}$, удовлетворяющее требованиям (i)–(v) теоремы 5. В частности, согласно (v) дерево Q_{xy} не фундировано в том и только том случае, когда R_{xy} не фундировано. Мы утверждаем, что отображение

$$x\mapsto\vartheta(x)=\bigl\{\langle u,s\rangle\in(2\times\mathbb{N})^{<\omega}\colon\;R(u,x\restriction\mathtt{lh}\,u,s)\bigr\},\qquad x\in2^\omega, \tag{6}$$

является борелевской редукцией E к E_{NT}. То, что ϑ — борелевское, даже непрерывное отображение, легко проверяется. Из (iii) немедленно следует, что $\vartheta(x)\in\mathbf{NT}$. Свойство же редукции вытекает из следующей леммы.

Лемма 9. *Если дерево $R\subseteq(2\times2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ удовлетворяет требованиям* (i)–(iv) *теоремы* 5 *и $x,y\in2^\omega$, то $\textsc{Emb}(\vartheta(x),\vartheta(y))=R_{xy}$.*

Доказательство. Предположим, что $f\in\textsc{Emb}(\vartheta(x),\vartheta(y))$, $m=\mathtt{lh}\,f$. Тогда мы имеем по определению $R(u,x\restriction m,s)\Rightarrow R(u,y\restriction m,s+_{\mathtt{cw}}f)$ для всех $u\in2^m$ и $s\in\mathbb{N}^m$. Возьмем здесь $u==x\restriction m$ и $s=0^m$ (последовательность из m нулей); тогда $R(x\restriction m,x\restriction m,0^n)\Rightarrow R(x\restriction m,y\restriction m,f)$. Однако левая часть выполнена согласно (ii). Следовательно, и правая часть имеет место, так что $f\in R_{xy}$.

Для доказательства обратного включения допустим, что $f\in R_{xy}$, т.е. имеет место $R(x\restriction m,y\restriction m,f)$, где $m=\mathtt{lh}\,f$, и потому $R(x\restriction n,y\restriction n,f\restriction n)$ выполнено для всех $n\le m$, поскольку R является деревом. Пусть $n\le m$ и $u\in2^n$, $s\in\mathbb{N}^n$. Нам требуется доказать $R(u,x\restriction n,s)\Rightarrow\Rightarrow R(u,y\restriction n,s+_{\mathtt{cw}}(f\restriction n))$. Итак, предполагаем $R(u,x\restriction n,s)$. С другой стороны, как отмечено выше, мы имеем $R(x\restriction n,y\restriction n,f\restriction n)$. Теперь $R(u,y\restriction n,s+_{\mathtt{cw}}(f\restriction n))$ следует из (iv), что и требовалось. $\square$

Чтобы завершить доказательство теоремы 8, рассмотрим произвольные $x,y\in2^\omega$. Тогда $x\mathsf{E}y$ равносильно тому, что дерево Q_{xy} не фундировано, далее тому, что дерево R_{xy} не фундировано, тому (по лемме 9), что $\textsc{Emb}(\vartheta(y),\vartheta(x))$ не фундировано, и наконец, тому, что $\vartheta(x)\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}\vartheta(y)$ (по определению 7). $\square$

5. БОРЕЛЕВСКИЕ АППРОКСИМАЦИИ

Согласно теореме 8 E_{NT} является полным аналитическим отношением эквивалентности на $\mathbf{NT}$, так что любое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношение эквивалентности E удовлетворяет $\mathsf{E}\le_{\mathrm{B}}\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}$. Что можно сказать в этой связи о борелевских отношениях эквивалентности, составляющих собственную часть аналитических отношений? Рассуждение совершенно общего характера (см. ниже разд. 6) показывает, что убывающая ω_1-последовательность канонических борелевских верхних аппроксимаций любого полного аналитического отношения эквивалентности содержит конфинальную подпоследовательность, состоящую из борелевских отношений эквивалентности, и что любая такая подпоследовательность оказывается $\le_{\mathrm{B}}$-конфинальной среди всех борелевских отношений эквивалентности.

Однако в случае отношения эквивалентности E_{NT} оказывается, что такая аппроксимирующая последовательность борелевских отношений эквивалентности может быть определена непосредственным и математически осмысленным образом.

Определение 10. Допустим, что $S, T \in \mathbf{NT}$ и $\xi < \omega_1$.
Положим $S \le^{\xi}_{\mathrm{NT}} T$, когда дерево $\mathrm{Emb}(S,T)$ удовлетворяет $\mathtt{rnk}(\mathrm{Emb}(S,T)) \ge \xi$.
Определим $S \,\mathsf{E}^{\xi}_{\mathrm{NT}}\, T$, когда выполнены $S \le^{\xi}_{\mathrm{NT}} T$ и $T \le^{\xi}_{\mathrm{NT}} S$. □

Подчеркнем, что неравенство $\mathtt{rnk}(\mathrm{Emb}(S,T)) \ge \xi$ означает, что либо $\mathrm{Emb}(S,T)$ (дерево в $\mathbb{N}^{<\omega}$) фундировано и его ранг является счетным ординалом $\ge \xi$, либо же $\mathrm{Emb}(S,T)$ не фундировано и тогда по определению $\mathtt{rnk}(\mathrm{Emb}(S,T)) = \infty$ превосходит любой ординал.

Напомним, что множество $\mathbf{NT}$ всех нормальных деревьев является замкнутым подмножеством польского пространства $\mathcal{P}((2\times\mathbb{N})^{<\omega})$ (отождествляемого с произведением $2^{(2\times\mathbb{N})^{<\omega}}$, гомеоморфным канторову дисконтинууму) и потому $\mathbf{NT}$ само является польским пространством.

Лемма 11. (i) *Отношения $\mathsf{E}^{\xi}_{\mathrm{NT}}$ являются борелевскими отношениями эквивалентности на $\mathbf{NT}$.*

(ii) *Более точно, если $\nu < \omega_1$, то отношение $\mathsf{E}^{\omega\nu}_{\mathrm{NT}}$ является $\mathbf{\Pi}^0_{1+2\nu}$-множеством в пространстве $\mathcal{P}((2\times\mathbb{N})^{<\omega}) \times \mathcal{P}((2\times\mathbb{N})^{<\omega})$,[7] а отношение $\mathsf{E}^{\omega\nu+k}_{\mathrm{NT}}$, $k \ge 1$, является $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\nu+1}$-множеством.*

(iii) *Кроме того, $\le_{\mathrm{NT}} = \bigcap_{\xi<\omega_1} \le^{\xi}_{\mathrm{NT}}$ и $\mathsf{E}_{\mathrm{NT}} = \bigcap_{\xi<\omega_1} \mathsf{E}^{\xi}_{\mathrm{NT}}$.*

Доказательство. (i) Проверку того, что $\mathsf{E}^{\xi}_{\mathrm{NT}}$ — отношение эквивалентности, можно провести, как в доказательстве теоремы 8 со ссылкой на лемму 4.

(iii) Равенства следуют из того, что дерево $R \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$ не фундировано, когда $\mathtt{rnk}(R) = \infty$, т.е. $\mathtt{rnk}(R) \ge \xi$ для каждого $\xi < \omega_1$.

(ii) Для оценки борелевского класса $\le^{\xi}_{\mathrm{NT}}$ и $\mathsf{E}^{\xi}_{\mathrm{NT}}$ рассмотрим множества

$$\mathcal{T}^{\xi} = \{T \in \mathcal{T} \colon \mathtt{rnk}(T) \ge \xi\} \qquad \text{и} \qquad \mathcal{T}^{\xi}_s = \{s \in T \in \mathcal{T} \colon \mathtt{rnk}_T(s) \ge \xi\},$$

где $\xi < \omega_1$, $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, а $\mathcal{T}$ есть множество всех деревьев $T \subseteq \mathbb{N}^{<\omega}$. (Понятно, что $\mathcal{T}$ является замкнутым подмножеством польского пространства $\mathcal{P}(2^{<\omega})$, которое может быть отождествлено с произведением $2^{\mathbb{N}^{<\omega}}$.) Мы утверждаем, что каждое $\mathcal{T}^{\xi}_s$ — борелевское множество; более того,

(∗) $\mathcal{T}^{\omega\nu}_s$ является $\mathbf{\Pi}^0_{2\nu}$-подмножеством $\mathcal{T}$, другими словами, пересечением $\mathcal{T}$ (замкнутого множества) с $\mathbf{\Pi}^0_{2\nu}$-множеством, а $\mathcal{T}^{\omega\nu+k}_s$, $k \ge 1$, является $\mathbf{\Sigma}^0_{2\nu+1}$-подмножеством $\mathcal{T}$.[8]

Это утверждение доказывается индукцией по ξ одновременно для всех s. Если $\xi = 0$, то множество $\mathcal{T}^{\xi}_s = \{T \in \mathcal{T} : s \in T\}$ является, очевидно, даже открыто-замкнутым в $\mathcal{T}$. Индуктивный же шаг без труда осуществляется при помощи равенств $\mathcal{T}^{\xi+1}_s = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{T}^{\xi}_{s^\wedge k}$ для каждого ξ и $\mathcal{T}^{\lambda}_s = \bigcap_{\xi<\lambda} \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{T}^{\xi}_{s^\wedge k}$ для каждого предельного ординала $\lambda < \omega_1$.

Отсюда следует, что каждое множество $\mathcal{T}^{\omega\nu} = \mathcal{T}^{\omega\nu}_{\Lambda}$ принадлежит $\mathbf{\Pi}^0_{2\nu}$ как подмножество $\mathcal{T}$, соответственно каждое множество $\mathcal{T}^{\omega\nu+k}$, $k \ge 1$, принадлежит $\mathbf{\Sigma}^0_{2\nu+1}$ как подмножество $\mathcal{T}$.

Однако по определению $\le^{\xi}_{\mathrm{NT}}$ совпадает с h-прообразом множества $\mathcal{T}^{\xi}$, где $h(S,T) = \mathrm{Emb}(S,T)$ для всех $S, T \in \mathbf{NT}$. Элементарные выкладки показывают, что h как функция из замкнутого множества $\mathbf{NT}\times\mathbf{NT}$ в замкнутое $\mathcal{T}$ является $\mathbf{\Sigma}^0_2$-измеримой функцией, т.е. h-прообразы открытых множеств принадлежат классу $\mathbf{\Sigma}^0_2$. (Более точно, для любого $f \in \mathbb{N}^{<\omega}$

[7] Или в пространстве $\mathbf{NT}\times\mathbf{NT}$, что в данном случае эквивалентно, так как $\mathbf{NT}$ замкнуто.

[8] Напомним, что произведение ординалов $\alpha\nu$ равно сумме ν экземпляров ординала α, что, вообще говоря, отлично от $\nu\alpha$. Например, $2\omega = \omega < \omega\cdot 2 = \omega+\omega$.

множество $\{\langle S,T\rangle\colon s \in \text{Emb}(S,T)\}$ замкнуто, а множество $\{\langle S,T\rangle\colon s \notin \text{Emb}(S,T)\}$ открыто в $\mathbf{NT}\times\mathbf{NT}$.) Таким образом, каждое из отношений $\le^{\omega\nu}_{\text{NT}}$ и, следовательно, из $\mathsf{E}^{\omega\nu}_{\text{NT}}$ является $\mathbf{\Pi}^0_{2\nu}$-комбинацией множеств класса $\mathbf{\Sigma}^0_2$, т.е. множеством из $\mathbf{\Pi}^0_{1+2\nu}$, и аналогично для отношений $\le^{\omega\nu+k}_{\text{NT}}$ и $\mathsf{E}^{\omega\nu+k}_{\text{NT}}$, $k\ge 1$. $\square$

6. КАНОНИЧЕСКОЕ СВОЙСТВО ПЕРЕСЕЧЕНИЯ

Пересечения, упомянутые в лемме 11(iii), принадлежат к замечательному типу.

Определение 12. Пересечение $Z=\bigcap_{\xi<\omega_1} Z_\xi$ множеств Z_ξ фиксированного польского пространства X имеет *каноническое свойство пересечения*, сокращенно CIP, когда для любого $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества C в X, удовлетворяющего $Z\subseteq C$, найдется индекс $\eta<\omega_1$, при котором уже выполнено $\bigcap_{\xi<\eta} Z_\xi\subseteq C$. $\square$

Общий метод построения пересечений, удовлетворяющих CIP, известен из классической дескриптивной теории множеств. Он основан на следующем результате, по существу полученном в [16]. Мы положим

$$\mathcal{T}^\infty=\{T\in\mathcal{T}\colon T \text{ — нефундированное дерево}\}$$

и напомним, что $\mathcal{T}$ обозначает множество всех деревьев $T\subseteq\mathbb{N}^{<\omega}$ и дополнительно $\mathcal{T}^\xi=\{T\in\in\mathcal{T}\colon \mathtt{rnk}(T)\ge\xi\}$ для каждого $\xi<\omega_1$.

Предложение 13. $\mathcal{T}^\infty=\bigcap_{\xi<\omega_1}\mathcal{T}^\xi$, *и это пересечение удовлетворяет* CIP.

Доказательство (набросок). Дополнительное $\mathbf{\Pi}^1_1$-множество $\mathcal{T}_\infty=\{T\in\mathcal{T}\colon T$ фундировано$\}$ допускает разбиение $\mathcal{T}_\infty=\bigcup_{\xi<\omega_1}\mathcal{T}_\xi$ на борелевские конституанты $\mathcal{T}_\xi=\{T\in\mathcal{T}\colon\mathtt{rnk}(T)==\xi\}$. Ключевым результатом [16] является следующая теорема Лузина–Серпинского об ограничении индекса: любое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $Y\subseteq\mathcal{T}_\infty$ накрывается объединением некоторого счетного числа конституант $\mathcal{T}_\xi$. Отсюда немедленно следует CIP для последовательности множеств $\mathcal{T}^\xi$. $\square$

Лемма 14. *Пересечения, указанные в утверждении* (iii) *леммы* 11, *удовлетворяют* CIP.

Доказательство. Для любой пары деревьев $S,T\in\mathbf{NT}$ положим $\varphi(S,T)=\text{Emb}(S,T)$. Тем самым φ — борелевское отображение $\mathbf{NT}^2\to\mathbf{T}$ и из определений немедленно следует, что $S\le_{\text{NT}}T$ равносильно $\varphi(S,T)\in A$. Другими словами, $\le_{\text{NT}}$ совпадает с φ-прообразом множества $\mathcal{T}^\infty$ и аналогично каждое $\le^\xi_{\text{NT}}$ совпадает с φ-прообразом множества $\mathcal{T}^\xi$. Это позволяет нам непосредственно получить CIP для пересечения $\le_{\text{NT}}=\bigcap_{\xi<\omega_1}\le^\xi_{\text{NT}}$ из этого же свойства для пересечения $\mathcal{T}^\infty=\bigcap_{\xi<\omega_1}\mathcal{T}^\xi$. $\square$

Следствие 15. *Если* E — *борелевское отношение эквивалентности на польском пространстве* X, *то существует ординал* $\xi<\omega_1$ *такой, что* $\mathsf{E}\le_{\text{B}}\mathsf{E}^\xi_{\text{NT}}$.

Доказательство. Согласно теореме 8 мы имеем $\mathsf{E}\le_{\text{B}}\mathsf{E}_{\text{NT}}$. Поэтому найдется борелевское отображение $\vartheta\colon X\to\mathbf{NT}$ такое, что $x\,\mathsf{E}\,y\Leftrightarrow\vartheta(x)\,\mathsf{E}_{\text{NT}}\,\vartheta(y)$. Положим $\varphi(x,y)=\langle\vartheta(x),\vartheta(y)\rangle$. Отображение φ также борелевское, причем φ-образ $\varphi(P)$ множества $P=(X\times X)\setminus\mathsf{E}$ есть $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество, не пересекающее E_{NT}. Следовательно, согласно лемме 14 найдется ординал $\xi<\omega_1$ такой, что $\varphi(P)$ не пересекает $\mathsf{E}^\xi_{\text{NT}}$. Это означает, что ϑ является редукцией отношения E не только к E_{NT}, но также и к аппроксимирующему борелевскому отношению эквивалентности $\mathsf{E}^\xi_{\text{NT}}$. $\square$

Мы добавим для удобства читателя элементарное доказательство следующего результата, принадлежащего “фольклору” дескриптивной теории множеств.

Теорема 16. *Предположим, что* E *есть* $\mathbf{\Sigma}^1_1$-*отношение эквивалентности на польском пространстве* X, $\mathsf{E}=\bigcap_{\xi<\omega_1}E_\xi$, *все множества* E_ξ *суть борелевские подмножества* $X\times X$ *и* *последовательность множеств E_ξ является $\subseteq$-убывающей и удовлетворяет* CIP. *Тогда множество всех ординалов $\xi < \omega_1$ таких, что E_ξ — отношение эквивалентности, конфинально в ω_1.*

Если дополнительно известно, что E — полное $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношение эквивалентности, то для любого борелевского отношения эквивалентности E найдется ординал $\xi < \omega_1$ такой, что E_ξ — отношение эквивалентности и $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} E_\xi$.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно проверить, что для любого $\xi < \omega_1$ имеется ординал ν, $\xi < \nu < \omega_1$, такой, что E_ν — отношение эквивалентности.

Шаг 1. Мы утверждаем, что для любого $\xi < \omega_1$ существует ординал $\zeta = \zeta(\xi)$, $\xi < \zeta < \omega_1$, такой, что $\langle x, y\rangle \in E_\zeta \Rightarrow \langle y, x\rangle \in E_\xi$. В самом деле, множество $P = \{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle \in E_\xi\}$ является борелевским надмножеством E в $X \times X$ (поскольку E — симметричное отношение). В этой ситуации каноническое свойство пересечения CIP доставляет нам ординал ζ, $\xi < \zeta < \omega_1$, для которого $E_\zeta \subseteq P$.

Шаг 2. Мы утверждаем, что для любого $\xi < \omega_1$ существует ординал $\eta = \eta(\xi)$, $\xi < \eta < \omega_1$, такой, что $\langle x, z\rangle \in E_\xi$ для всех x, z таких, что для некоторого y пары $\langle x, y\rangle$ и $\langle y, z\rangle$ принадлежат E_η. Рассуждение включает два шага. Сначала мы рассматриваем множество

$$P = \big\{\langle x, y\rangle : \forall\, \langle y, z\rangle\; (\langle y, z\rangle \in \mathsf{E} \Rightarrow \langle x, z\rangle \in E_\xi)\big\}.$$

Оно является $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеством в $X \times X$ и надмножеством E, поскольку E — транзитивное отношение. Тем самым вследствие CIP существует ординал ζ, $\xi < \zeta < \omega_1$, удовлетворяющий $E_\zeta \subseteq P$. Это означает, что мы имеем $\langle x, z\rangle \in A_\xi$ всякий раз, когда $\langle x, y\rangle \in E_\zeta$ и $\langle y, z\rangle \in \mathsf{E}$. Теперь рассмотрим множество

$$Q = \big\{\langle y, z\rangle : \forall\, \langle x, y\rangle\; (\langle x, y\rangle \in E_\zeta \Rightarrow \langle x, z\rangle \in E_\xi)\big\}.$$

Согласно указанному выше оно является $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеством и надмножеством E, а потому найдется ординал η, $\zeta < \eta < \omega_1$, такой, что $E_\eta \subseteq Q$. Ясно, что η обладает искомыми свойствами.

Завершающий аргумент. Положим $\xi_0 = \xi$ и $\xi_{n+1} = \eta(\zeta(\xi_n))$ для каждого n. Ординал $\nu = \mathtt{sup}_n\, \xi_n$ обладает требуемыми свойствами.

Для вывода второго утверждения теоремы можно рассуждать, как в доказательстве следствия 15. $\square$

7. СВЕДЕНИЕ К ИДЕАЛАМ

Из определения 7 сразу совершенно неясно, что отношения эквивалентности E_{NT} и $\mathsf{E}^\xi_{\mathrm{NT}}$ могут быть как-то сведены к идеалам. Но дело обстоит именно так.

Возможность порождения E_{NT} $\mathbf{\Sigma}^1_1$-идеалом была установлена в [17]. Чтобы изложить этот результат, обозначим через $\mathcal{I}$ идеал на $(2 \times \mathbb{N})^{<\omega}$, конечно порожденный всеми множествами вида $S \Delta T$, где $S, T \subseteq (2 \times \mathbb{N})^{<\omega}$ являются нормальными деревьями и $S \mathsf{E}_{\mathrm{NT}} T$. Другими словами, $\mathcal{I}$ состоит из всех подмножеств $(2 \times \mathbb{N})^{<\omega}$, допускающих покрытие объединениями конечного числа симметрических разностей $S \,\Delta\, T$ только что указанного типа.

Теорема 17 (доказана в [17]). *Идеал $\mathcal{I}_{\mathrm{NT}}$ является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством в польском пространстве $\mathcal{P}((2 \times \mathbb{N})^{<\omega})$. Кроме того, отношение эквивалентности E_{NT} совпадает с $\mathsf{E}_{\mathcal{I}} \restriction \mathbf{NT}$; это означает, что $S \,\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}\, T$ равносильно $S \,\Delta\, T \in \mathcal{I}$ для любых $S, T \in \mathbf{NT}$.*

Доказательство. То, что $\mathcal{I}_{\mathrm{NT}}$ принадлежит классу $\mathbf{\Sigma}^1_1$, вполне понятно: главный квантор выражает существование конечной совокупности элементов $\mathbf{NT}$, свойства которых также выразимы $\mathbf{\Sigma}^1_1$-отношением, поскольку E_{NT} является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством.

Предполагая, что $S \,\Delta\, T \in \mathcal{I}$, докажем $S \mathsf{E}_{\text{NT}} T$ (нетривиальное направление). По определению мы имеем $S \,\Delta\, T \subseteq \bigcup_{i=1}^{k}(S_i \,\Delta\, T_i)$, где $S_i, T_i \in \mathbf{NT}$ и $S_i \mathsf{E}_{\text{NT}} T_i$. Тогда по определению деревья $R_i = \textsc{Emb}(S_i, T_i)$ и $R'_i = \textsc{Emb}(T_i, S_i)$ не являются фундированными. Нам требуется вывести, что деревья $\textsc{Emb}(S,T)$ и $\textsc{Emb}(T,S)$ имеют то же самое свойство. Для доказательства нефундированности $\textsc{Emb}(S,T)$ заметим, что дерево $R = R_1 +_{\mathtt{cw}} \ldots +_{\mathtt{cw}} R_k$ удовлетворяет $\mathtt{rnk}(R) \geq \mathtt{min}\{\mathtt{rnk}(R_1), \ldots, \mathtt{rnk}(R_k)\}$ согласно лемме 4 и потому R не фундировано. Таким образом, остается убедиться, что $R \subseteq \textsc{Emb}(S,T)$. Для этого рассмотрим любое $r = r_1 +_{\mathtt{cw}} \ldots +_{\mathtt{cw}} r_k \in R$, где все последовательности $r_i \in R_i$, $i = 1, \ldots, k$, имеют одну и ту же длину, скажем m.

Чтобы доказать $r \in \textsc{Emb}(S,T)$, предположим противное, т.е. $r \notin \textsc{Emb}(S,T)$; другими словами, найдется пара $\langle u, s\rangle \in S$, удовлетворяющая $\langle u, s +_{\mathtt{cw}} (r \restriction n)\rangle \notin T$, где $n = \mathtt{lh}\, u = \mathtt{lh}\, s$. В этом предположении $\langle u, s +_{\mathtt{cw}} t\rangle \notin T$ всякий раз, когда $t \in 2^n$, $t \leq_{\mathtt{cw}} r \restriction n$. В частности, $\langle u, s\rangle \notin T$, откуда $\langle u, s\rangle \in S \,\Delta\, T$ и тем самым $\langle u, s\rangle \in S_{i_1} \,\Delta\, T_{i_1}$ для какого-то $1 \leq i_1 \leq k$. Однако мы знаем, что $r_{i_1} \in R_{i_1} = \textsc{Emb}(S_{i_1}, T_{i_1})$. Это влечет $\langle u, s_1\rangle \in S_{i_1} \cap T_{i_1}$, где $s_1 = s +_{\mathtt{cw}} (r_{i_1} \restriction n)$.

Однако согласно сказанному выше $\langle u, s_1\rangle \in S \setminus T$, и потому, повторив ту же процедуру, мы имеем $\langle u, s_1\rangle \in S_{i_2} \,\Delta\, T_{i_2}$ для какого-то $1 \leq i_2 \leq k$. При этом $i_2 \neq i_1$, поскольку $\langle u, s_1\rangle \in S_{i_1} \cap T_{i_1}$. Это влечет $\langle u, s_2\rangle \in S_{i_2} \cap T_{i_2}$, где $s_2 = s_1 +_{\mathtt{cw}} (r_{i_2} \restriction n)$, так как r_{i_2} принадлежит дереву $R_{i_2} = \textsc{Emb}(S_{i_2}, T_{i_2})$. Кроме того, все еще $\langle u, s_2\rangle \in S_{i_1} \cap T_{i_1}$, поскольку все S_i и T_i — нормальные деревья.

После k шагов этого построения все индексы $1 \leq i \leq k$ будут рассмотрены и заключительная последовательность $s_k = s +_{\mathtt{cw}} (r \restriction n)$ будет удовлетворять $\langle u, s_k\rangle \in S_i \cap T_i$ для всех $i = 1, \ldots, k$. Отсюда следует, что $\langle u, s_k\rangle \notin S \,\Delta\, T$. Однако $\langle u, s_k\rangle \in S$, так как $\langle u, s\rangle \in S$ и S является нормальным деревом. Таким образом, $\langle u, s_k\rangle$ принадлежит T, что противоречит нашим предположениям. $\square$

Как обстоят дела с отношениями эквивалентности $\mathsf{E}^{\xi}_{\text{NT}}$? Если мы заменим E_{NT} на $\mathsf{E}^{\xi}_{\text{NT}}$ в определении $\mathcal{I}$ выше, то теорема останется верной: $\mathsf{E}^{\xi}_{\text{NT}}$ совпадает с $\mathcal{I} \restriction \mathbf{NT}$ для “нового” $\mathcal{I}$. Однако для такого идеала $\mathcal{I}$, зависящего от ξ, представляется невозможным установить класс лучше, чем $\mathbf{\Sigma}^1_1$, а это не очень интересно, поскольку отношения $\mathsf{E}^{\xi}_{\text{NT}}$ борелевские. Однако более сложный вариант этого построения дает борелевские идеалы, порождающие отношения $\mathsf{E}^{\xi}_{\text{NT}}$.

В следующих рассуждениях переменные d, e обозначают натуральные числа.

Определение 18. Для любого $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$, *d-шириной* $\textsc{Wid}_d(X)$ множества $X \subseteq (2 \times \mathbb{N})^{<\omega}$ называется множество всех конечных последовательностей $f \in \mathbb{N}^{<\omega}$ таких, что для любых $n \leq \mathtt{lh}\, f$ и $u \in 2^n$ мы имеем

$$\forall\, s_1 \in \mathbb{N}^n\, \exists\, t_1 \in \mathbb{N}^n\, \forall\, s_2 \in \mathbb{N}^n\, \exists\, t_2 \in \mathbb{N}^n\, \ldots\, \forall\, s_d \in \mathbb{N}^n\, \exists\, t_d \in \mathbb{N}^n$$

$$\Big(\text{если } \langle u, s_1 +_{\mathtt{cw}} t_1 +_{\mathtt{cw}} \ldots +_{\mathtt{cw}} s_{k-1} +_{\mathtt{cw}} t_{k-1} +_{\mathtt{cw}} s_k\rangle \in X \text{ для всех } 1 \leq k \leq d, \text{ то}$$

$$t_1 +_{\mathtt{cw}} \ldots +_{\mathtt{cw}} t_d \leq_{\mathtt{cw}} f \restriction n \text{ и } \tau <_{\mathtt{cw}} s_1 +_{\mathtt{cw}} t_1 +_{\mathtt{cw}} \ldots +_{\mathtt{cw}} s_d +_{\mathtt{cw}} t_d \text{ всякий раз, когда } \langle u, \tau\rangle \in X\Big). \quad \square$$

Понятно, что $\textsc{Wid}_d(X)$ — дерево в $\mathbb{N}^{<\omega}$ (возможно, пустое дерево).

Определение $\textsc{Wid}_d(X)$ может быть интерпретировано в терминах игры $G^d_{fnu}(X)$ длины d, где $n \in \mathbb{N}$, $u \in 2^n$, игрок **I** делает ходы $s_1, \ldots, s_d \in \mathbb{N}^n$, игрок **II** делает ходы $t_1, \ldots, t_d \in \mathbb{N}^n$, **I** должен играть так, чтобы $\langle u, s_1 +_{\mathtt{cw}} t_1 +_{\mathtt{cw}} \ldots +_{\mathtt{cw}} s_{k-1} +_{\mathtt{cw}} t_{k-1} +_{\mathtt{cw}} s_k\rangle \in X$ для всех k, **II** должен играть так, чтобы $t_1 +_{\mathtt{cw}} \ldots +_{\mathtt{cw}} t_d \leq_{\mathtt{cw}} f \restriction n$, и наконец, **II** выигрывает, если $\tau <_{\mathtt{cw}} s_1 +_{\mathtt{cw}} t_1 +_{\mathtt{cw}} \ldots +_{\mathtt{cw}} s_d +_{\mathtt{cw}} t_d$ для любого $\tau \in \mathbb{N}^n$ такого, что $\langle u, \tau\rangle \in X$. Кроме того, **II** также выигрывает, когда для некоторого $k \leq d$ **I** не может сделать ход s_k такой, что $\langle u, s_1 +_{\mathtt{cw}} t_1 +_{\mathtt{cw}} \ldots +_{\mathtt{cw}} s_{k-1} +_{\mathtt{cw}} t_{k-1} +_{\mathtt{cw}} s_k\rangle \in X$, и соответственно **I** выигрывает, когда $t_1 +_{\mathtt{cw}} \ldots +_{\mathtt{cw}} t_k \not\leq_{\mathtt{cw}} f \restriction n$ для некоторого $k \leq d$.

В этой терминологии $f \in \mathrm{W{\small ID}}_d(X)$ равносильно тому, что **II** выигрывает $G^d_{fnu}(X)$ (т.е. имеет выигрывающую стратегию в этой игре), каковы бы ни были $n \le \mathtt{lh}\, f$ и $u \in 2^n$. Таким образом, предложение $f \in \mathrm{W{\small ID}}_d(X)$ можно неформально понимать как возможность покинуть X при помощи не более чем d прыжков, общая длина которых не превосходит f.

Здесь уместно заметить, что $\mathrm{W{\small ID}}_d(X) \subseteq \mathrm{W{\small ID}}_{d+1}(X)$. В самом деле, допустим, что $f \in \mathrm{W{\small ID}}_d(X)$. Тогда для любых $n \le \mathtt{lh}\, f$ и $u \in 2^n$ выигрышной стратегией для игрока **II** в $G^{d+1}_{fnu}(X)$ будет просто следовать любой выигрышной стратегии в игре $G^d_{fnu}(X)$. После d ходов **I** не будет иметь ни одного допустимого хода s_{d+1}, следовательно, **II** выигрывает.

Лемма 19. *Если $X, Y \subseteq (2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ и $d, e \ge 1$, то* $\mathrm{W{\small ID}}_d(X) +_{\mathtt{cw}} \mathrm{W{\small ID}}_e(Y) \subseteq \mathrm{W{\small ID}}_{d+e}(X \cup Y)$.

Доказательство. Рассмотрим любые $f \in \mathrm{W{\small ID}}_d(X)$ и $g \in \mathrm{W{\small ID}}_e(Y)$ с $\mathtt{lh}\, f = \mathtt{lh}\, g$ и докажем, что $h = f +_{\mathtt{cw}} g$ принадлежит $\mathrm{W{\small ID}}_{d+e}(X \cup Y)$. Предположим, что $n \le \mathtt{lh}\, f$ и $u \in 2^n$. Зафиксируем любую выигрышную стратегию для **II** в игре $G^d_{fnu}(X)$ и будем называть ее *X-стратегией.* Зафиксируем любую выигрышную стратегию для **II** в $G^e_{gnu}(Y)$ и будем называть ее *Y-стратегией.* Выигрышная стратегия для **II** в игре $G^{d+e}_{hnu}(X \cup Y)$ может быть определена следующим образом. Пусть $s_1, t_1, \ldots, s_{d+e}, t_{d+e}$ — полная последовательность ходов. По определению $S_k = s_1 + t_1 + \ldots + s_{k-1} + t_{k-1} + s_k \in X \cup Y$ для каждого k. Определим $K = \{k \colon S_k \in X\}$ и $K' = \{k \colon S_k \in Y \setminus X\}$. Пусть $K = \{k_1, \ldots, k_m\}$ и $K' = \{k'_1, \ldots, k'_{m'}\}$ в порядке возрастания. Очевидно, что $m + m' = d + e$.

(а) Рассмотрим производную последовательность $\sigma_1, \tau_1, \ldots, \sigma_m, \tau_m$, определенную так, что $\tau_i = t_{k_i}$ и

$$\sigma_i = s_{k_{i-1}+1} +_{\mathtt{cw}} t_{k_{i-1}+1} +_{\mathtt{cw}} s_{k_{i-1}+2} +_{\mathtt{cw}} t_{k_{i-1}+2} +_{\mathtt{cw}} \ldots +_{\mathtt{cw}} s_{k_i-1} +_{\mathtt{cw}} t_{k_i-1} +_{\mathtt{cw}} s_{k_i}$$

для всех $1 \le i \le m$. Примем, что **II** играет в $G^{d+e}_{hnu}(X \cup Y)$ так, что *каждый ход $t_{k_i} = \tau_i$ делается в соответствии с X-стратегией, примененной к подпоследовательности* $\sigma_1, \tau_1, \ldots, \sigma_{i-1}, \tau_{i-1}, \sigma_i$. Этим определены все ходы t_k, $k \in K$, и, приняв, что **II** следует этой стратегии, мы немедленно получаем $m \le d$.

(б) Определим другую производную последовательность $\sigma'_1, \tau'_1, \ldots, \sigma'_{m'}, \tau'_{m'}$ так, что $\tau'_i = t_{k'_i}$ и

$$\sigma'_i = s_{k'_{i-1}+1} +_{\mathtt{cw}} t_{k'_{i-1}+1} +_{\mathtt{cw}} s_{k'_{i-1}+2} +_{\mathtt{cw}} t_{k'_{i-1}+2} +_{\mathtt{cw}} \ldots +_{\mathtt{cw}} s_{k'_i-1} +_{\mathtt{cw}} t_{k'_i-1} +_{\mathtt{cw}} s_{k'_i}$$

для всех $1 \le i \le m'$. Примем, что **II** играет в $G^{d+e}_{hnu}(X \cup Y)$ так, что *каждый ход $t_{k'_i} = \tau'_i$ делается в соответствии с Y-стратегией, примененной к подпоследовательности* $\sigma'_1, \tau'_1, \ldots, \sigma'_{i-1}, \tau'_{i-1}, \sigma'_i$. Этим определены все ходы $t_{k'}$, $k' \in K'$, и, приняв, что **II** следует этой стратегии, мы немедленно получаем $m' \le e$.

Пункты (а) и (б) полностью определяют стратегию для **II** в игре $G^{d+e}_{hnu}(X \cup Y)$. Покажем, что эта стратегия выигрышная. В самом деле, из сказанного выше следует, что $m = d$ и $m' = e$. Более того, мы имеем $\tau <_{\mathtt{cw}} \tau_m$ и $\tau <_{\mathtt{cw}} \tau'_{m'}$ всякий раз, когда соответственно $\langle u, \tau\rangle \in X$ и $\langle u, \tau\rangle \in Y$ (по выбору X- и Y-стратегий). Поэтому t_{d+e} (независимо от того, τ_m это или $\tau'_{m'}$) удовлетворяет $\tau <_{\mathtt{cw}} t_{d+e}$ для каждого τ такого, что $\langle u, \tau\rangle \in X \cup Y$, что и требовалось. $\square$

Определение 20. Пусть $\mathcal{I}_{\text{NT}}$ — совокупность всех множеств $X \subseteq (2 \times \mathbb{N})^{<\omega}$ таких, что для некоторого $d \ge 1$ (и тогда для всех $d' \ge d$) дерево $\mathrm{W{\small ID}}_d(X)$ не фундировано.

Для любого $\xi < \omega_1$ пусть $\mathcal{I}^{\xi}_{\text{NT}}$ — совокупность всех множеств $X \subseteq (2 \times \mathbb{N})^{<\omega}$ таких, что $\mathtt{rnk}(\mathrm{W{\small ID}}_d(X)) \ge \xi$ для некоторого $d \ge 1$. $\square$

Напомним, что каждый идеал $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(D)$ на множестве D порождает отношение эквивалентности $\mathsf{E}_{\mathcal{I}}$ на $\mathcal{P}(D)$ такое, что $X \,\mathsf{E}_{\mathcal{I}}\, Y$, когда $X \,\Delta\, Y \in \mathcal{I}$. В следующей теореме $D = (2\times\mathbb{N})^{<\omega}$.

Теорема 21. (i) *Множества* $\mathcal{I}_{\rm NT}$ *и* $\mathcal{I}^{\xi}_{\rm NT}$ (*для любого* $\xi < \omega_1$) *являются идеалами на* $(2\times\mathbb{N})^{<\omega}$.

(ii) *Отношение эквивалентности* $\mathsf{E}_{\rm NT}$ *совпадает с* $\mathsf{E}_{\mathcal{I}_{\rm NT}}\restriction \mathbf{NT}$, *где* $\mathsf{E}_{\mathcal{I}_{\rm NT}}$ — *отношение эквивалентности на* $\mathcal{P}((2\times\mathbb{N})^{<\omega})$, *порожденное идеалом* $\mathcal{I}_{\rm NT}$.

(iii) *Аналогично для любого* ξ $\mathsf{E}^{\xi}_{\rm NT}$ *совпадает с* $\mathsf{E}_{\mathcal{I}^{\xi}_{\rm NT}}\restriction \mathbf{NT}$.

(iv) $\mathcal{I}_{\rm NT}$ *есть* $\mathbf{\Sigma}^1_1$-*множество* (как подмножество польского пространства $\mathcal{P}((2\times\mathbb{N})^{<\omega})$), *а каждое* $\mathcal{I}^{\omega\nu+k}_{\rm NT}$ *есть* $\mathbf{\Sigma}^0_{\omega+2\nu+1}$-*множество, и, следовательно,* $\mathcal{I}^{\omega\nu+k}_{\rm NT}$ *является* $\mathbf{\Sigma}^0_{2\nu+1}$-*множеством при условии, что* $\nu\ge\omega$.

Доказательство. (i) Допустим, что множества $X,Y\subseteq(2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ принадлежат $\mathcal{I}^{\xi}_{\rm NT}$ и, следовательно, деревья $\textsc{Wid}_d(X)$ и $\textsc{Wid}_e(Y)$ имеют ранги $\ge\xi$. Из леммы 19 следует, что $\textsc{Wid}_d(X)+_{\tt cw}\textsc{Wid}_e(Y)\subseteq\textsc{Wid}_{d+e}(X\cup Y)$. Тогда мы получаем $\texttt{rnk}(\textsc{Wid}_{d+e}(X\cup Y))\ge\xi$ согласно лемме 4, и поэтому $X\cup Y\in\mathsf{E}^{\xi}_{\rm NT}$. Наконец, чтобы увидеть, что $Z=(2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ не принадлежит к $\mathcal{I}^{\xi}_{\rm NT}$, заметим, что $\textsc{Wid}_d(Z)=\varnothing$ для любого d по очевидным соображениям.

(ii) Рассмотрим пару деревьев $S,T\in\mathbf{NT}$. Требуется доказать, что $S\,\mathsf{E}_{\rm NT}\,T$ равносильно $S\Delta T\in\mathcal{I}_{\rm NT}$. Допустим, что $S\mathsf{E}_{\rm NT}T$. Тогда деревья $E=\textsc{Emb}(S,T)$ и $F=\textsc{Emb}(T,S)$ не фундированы, и поэтому дерево $G=E+_{\tt cw}F$ также не фундировано согласно лемме 4. Однако понятно, что $G\subseteq E\cap F$. (В самом деле, S и T являются $\le_{\tt cw}$-транзитивными направо.) Таким образом, достаточно доказать, что $E\cap F\subseteq\textsc{Wid}_1(S\,\Delta\,T)$. Рассмотрим любое $f\in E\cap F$. По определению для любой пары $\langle u,s\rangle\in S\cup T$, $\texttt{lh}\,u=\texttt{lh}\,s=n\le\texttt{lh}\,f$, мы имеем $\langle u,s+_{\tt cw}(f\restriction n)\rangle\in S\cap T$. В частности, $\langle u,s\rangle\in S\,\Delta\,T\Rightarrow\langle u,s+_{\tt cw}(f\restriction n)\rangle\notin S\,\Delta\,T$, откуда сразу вытекает $f\in\textsc{Wid}_1(S\,\Delta\,T)$.

Для вывода в обратную сторону допустим, что $S\,\Delta\,T\in\mathcal{I}_{\rm NT}$, т.е. дерево $\textsc{Wid}_d(S\,\Delta\,T)$ не фундировано для некоторого $d\ge1$. Достаточно доказать, что $\textsc{Wid}_d(S\,\Delta\,T)\subseteq\textsc{Emb}(S,T)$. Предполагаем противное, т.е. $f\in\textsc{Wid}_d(S\,\Delta\,T)$, но $f\notin\textsc{Emb}(S,T)$. Последнее означает, что имеется пара $\langle u,s\rangle\in S$, $\texttt{lh}\,u=\texttt{lh}\,s=n\le\texttt{lh}\,f$, такая, что $\langle u,s+_{\tt cw}(f\restriction n)\rangle\notin T$. Тогда также $\langle u,s\rangle\notin T$, и поэтому обе пары $\langle u,s\rangle$ и $\langle u,s+_{\tt cw}(f\restriction n)\rangle$ принадлежат к $S\setminus T$. Отсюда вытекает

$(*)$ $\langle u,s+g\rangle\in S\setminus T$ для каждого $g\in\mathbb{N}^n$, $g\le_{\tt cw}(f\restriction n)$.

Теперь рассмотрим партию в игре $G^d_{fnu}(S\,\Delta\,T)$, в которой игрок **II** следует своей выигрышной стратегии (существующей, поскольку $f\in\textsc{Wid}_d(S\,\Delta\,T)$), а **I** играет $s_k=0^n$ (последовательность из n нулей) на каждом ходу k. Пусть t_k, $1\le k\le d$, — последовательность ходов игрока **II**. Поскольку $s_k=0^n\ \forall\,k$, мы по определению имеем $t_1+_{\tt cw}\ldots+_{\tt cw}t_k\le_{\tt cw}(f\restriction n)$ при условии, что $\langle u,s+_{\tt cw}t_1+_{\tt cw}\ldots+_{\tt cw}t_{k-1}\rangle\in S\,\Delta\,T$, и поэтому согласно $(*)$ $t_1+_{\tt cw}\ldots+_{\tt cw}t_k\le_{\tt cw}(f\restriction n)$ и $\langle u,s+_{\tt cw}t_1+_{\tt cw}\ldots+_{\tt cw}t_k\rangle\in S\,\Delta\,T$ для всех k. В частности, $\langle u,s+_{\tt cw}t_1+_{\tt cw}\ldots+_{\tt cw}t_d\rangle\in S\,\Delta\,T$, что противоречит выбору стратегии.

(iii) То же рассуждение приносит искомый результат. Ссылка на лемму 4 в начале доказательства (ii) будет теперь выглядеть так: деревья $E=\textsc{Emb}(S,T)$ и $F=\textsc{Emb}(T,S)$ имеют ранги $\ge\xi$, следовательно, это же свойство имеет и дерево $G=E+_{\tt cw}F$.

(iv) Для любого $d\ge1$ отображение $X\mapsto\textsc{Wid}_d(X)$ является функцией конечного борелевского уровня. Отсюда следует, что для любого $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$-семейства H подмножеств $(2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ множество

$$\bigl\{X\subseteq(2\times\mathbb{N})^{<\omega}\colon\ \exists\,d\ge1\ (\textsc{Wid}_d(X)\in H)\bigr\}$$

принадлежит $\mathbf{\Sigma}^0_{\omega+\alpha}$. Остается напомнить, что множество $\mathcal{T}^{\omega\nu+k}$ всех деревьев $T\subseteq\mathbb{N}^{<\omega}$, удовлетворяющих $\texttt{rnk}(T)\ge\omega\nu+k$, принадлежит классу $\mathbf{\Sigma}^0_{2\nu+1}$ согласно $(*)$ в доказательстве леммы 11. $\square$

Розендаль доказал в [17], что любое борелевское отношение эквивалентности борелевски сводится к отношению эквивалентности вида $\mathsf{E}_{\mathcal{J}}$, где $\mathcal{J}$ — борелевский идеал. Идеалы $\mathcal{J}$ в этом доказательстве берутся как подходящие верхние борелевские аппроксимации определенного $\mathbf{\Sigma}^1_1$-идеала $\mathcal{I}$. (Идеал $\mathcal{I}$ был определен в начале этого раздела.) Следующий результат показывает, что борелевские идеалы в теореме Розендаля могут быть выбраны более прямым и эффективным способом.

Следствие 22. *Для любого борелевского отношения эквивалентности* E *на польском пространстве найдется ординал* $\xi < \omega_1$ *такой, что* $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathcal{I}^\xi_{\mathrm{NT}}}$.

Доказательство. Согласно следствию 15 имеется ординал $\xi < \omega_1$ такой, что $\mathsf{E} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}^\xi_{\mathrm{NT}}$. С другой стороны, из теоремы 21(iii) следует, что $\mathsf{E}^\xi_{\mathrm{NT}} \le_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathcal{I}^\xi_{\mathrm{NT}}}$. $\square$

Лемма 11, следствие 15 и теорема 21 позволяют нам быстро завершить доказательство теоремы 1: последовательность отношений эквивалентности $\mathsf{E}_\nu = \mathsf{E}^{\omega\nu+2}_{\mathrm{NT}}$, где $\nu < \omega_1$, обладает требуемыми свойствами. (Разумеется, мы должны еще применить любой гомеоморфизм из $\mathcal{P}((2\times\mathbb{N})^{<\omega})$ на пространство 2^ω, который переводит область $\mathbf{NT}$ всех отношений эквивалентности $\mathsf{E}^{\omega\nu+2}_{\mathrm{NT}}$ на некоторое замкнутое множество $D \subseteq 2^\omega$.)

8. ЯВЛЯЮТСЯ ЛИ АППРОКСИМИРУЮЩИЕ ОТНОШЕНИЯ ПОЛНЫМИ ДЛЯ СВОИХ БОРЕЛЕВСКИХ КЛАССОВ?

Отношения эквивалентности $\mathsf{E}^\xi_{\mathrm{NT}}$ ведут к другим вопросам, наиболее интересным из которых является вопрос их полноты в тех борелевских классах, которые указаны в лемме 11(ii), аналогично полноте отношения E_{NT} по теореме 8. Мы не знаем пока ответа, но имеется обещающий подход.

Определение 23. Для любого дерева $R \subseteq (2\times 2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ мы определяем

$$A(R) = \big\{\langle x,y\rangle \in 2^\omega\times 2^\omega\colon \mathtt{rnk}(R_{xy}) = \infty\big\},$$

$$A^\xi(R) = \big\{\langle x,y\rangle \in 2^\omega\times 2^\omega\colon \mathtt{rnk}(R_{xy}) \ge \xi\big\},$$

где согласно (1) $R_{xy} = \{s\in\mathbb{N}^{<\omega}\colon R(x\restriction \mathtt{lh}\,s, y\restriction \mathtt{lh}\,s, s)\}$. Дерево $R \subseteq (2\times 2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ называется *ξ-ограниченным*, где $\xi<\omega_1$, в случае, когда $A(R) = A^\xi(R)$. $\square$

Таким образом, $A(R)$ является $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеством в $2^\omega\times 2^\omega$, любое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество $A\subseteq 2^\omega\times 2^\omega$ допускает представление в такой форме и пересечение $A(R) = \bigcap_{\xi<\omega_1} A^\xi(R)$ имеет каноническое свойство пересечений CIP. (Чтобы вывести CIP, заметим, что множества $A(R)$ и $A^\xi(R)$ являются прообразами множеств $\mathcal{T}^\infty$ и $\mathcal{T}^\xi$ соответственно в смысле непрерывного отображения $\langle x,y\rangle \mapsto R_{xy}$. Остается напомнить, что $\mathcal{T}^\infty = \bigcap_\xi \mathcal{T}^\xi$ удовлетворяет CIP согласно предложению 13.)

Следующая лемма представляет собой в сущности классический результат. Мы ссылаемся на [15] в отношении весьма схожих результатов и построений. Назовем *m-липшицевым множеством* любое множество $X \subseteq 2^\omega\times 2^\omega$ такое, что $\langle x,y\rangle\in X \Leftrightarrow \langle x',y'\rangle\in X$ выполняется всякий раз, когда $x,x',y,y'\in 2^\omega$ удовлетворяют $x\restriction m = x'\restriction m$ и $y\restriction m = y'\restriction m$. Всякое такое множество, очевидно, открыто-замкнуто в $2^\omega\times 2^\omega$.

Лемма 24. *Если $R\subseteq (2\times 2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ является деревом, $\nu<\omega_1$ и $k\ge 1$, то $A^k(R)$ есть k-липшицево множество, $A^{\omega(1+\nu)}(R)$ принадлежит $\mathbf{\Pi}^0_{1+2\nu}$ и $A^{\omega(1+\nu)+k}(R)$ принадлежит $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\nu+1}$.*

Обратно, если $\nu<\omega_1$, $k\ge 1$ и $A\subseteq 2^\omega\times 2^\omega$ — k-липшицево множество, или множество класса $\mathbf{\Pi}^0_{1+2\nu}$, или множество класса $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\nu+1}$, то найдется дерево $R\subseteq(2\times 2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ такое, что $A = A^k(R) = A(R)$, соответственно $A = A^{\omega(1+\nu)}(R) = A(R)$, соответственно $A = A^{\omega(1+\nu)+k}(R) = A(R)$. [9]

[9] Заметим, что $1+\nu = \nu$ и $1+2\nu = 2\nu$ при $\nu\ge\omega$.

Доказательство. Проверка первого утверждения аналогична оценке борелевского класса отношений $\mathsf{E}^{\xi}_{\text{NT}}$ в доказательстве леммы 11(ii). Положим

$$R^s_{xy} = \{t \in \mathbb{N}^{<\omega} \colon s^\wedge t \in R_{xy}\} \qquad \text{и} \qquad A^{\xi}_s(R) = \{\langle x,y\rangle \in 2^\omega \times 2^\omega \colon \mathtt{rnk}(R^s_{xy}) \geq \xi\}$$

для всех $x,y \in 2^\omega$, $s \in \mathbb{N}^{<\omega}$, $\xi < \omega_1$. Мы утверждаем, что в условиях леммы $A^k_s(R)$ является $(\mathtt{lh}\, s + k)$-липшицевым множеством, $A^{\omega(1+\nu)}_s(R)$ принадлежит $\mathbf{\Pi}^0_{1+2\nu}$ и $A^{\omega(1+\nu)+k}_s(R)$ принадлежит $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\nu+1}$. Чтобы проверить первое утверждение, достаточно заметить, что $A^k_s(R)$ равно множеству всех пар $\langle x,y\rangle$ таких, что R_{xy} содержит по крайней мере одну последовательность вида $s^\wedge t$, где $t \in \mathbb{N}^k$. Два других утверждения выводятся по индукции при помощи очевидных равенств

$$A^{\xi+1}_s(R) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A^{\xi}_{s^\wedge j}(R) \qquad \text{и} \qquad A^{\lambda}_S(R) = \bigcap_{\xi<\lambda}\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A^{\xi}_{s^\wedge j}(R) \quad \text{для предельного } \lambda.$$

Наконец, заметим, что $A^\xi(R) = A^\xi_\Lambda(R)$.

Доказательство обратных утверждений леммы проходит индукцией по ν и k.

Случай липшицевых множеств. Рассмотрим k-липшицево множество $A \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$. Существует множество $P \subseteq 2^k \times 2^k$ такое, что

$$A = \{\langle x,y\rangle \in 2^\omega \times 2^\omega \colon \exists\, \langle u,v\rangle \in P\ (u \subset x \wedge v \subset y)\}.$$

Определим R как дерево всех троек $\langle u,v,s\rangle \in 2^{<\omega} \times 2^{<\omega} \times \mathbb{N}^{<\omega}$ таких, что $\mathtt{lh}\, u = \mathtt{lh}\, v = \mathtt{lh}\, s$ и имеется пара $\langle u',v'\rangle \in P$ такая, что u сравнимо с u' (т.е. $u \subseteq u'$ или $u' \subseteq u$) и v сравнимо с v'. Тем самым мы имеем $R_{xy} = \mathbb{N}^{<\omega}$, когда $\langle x,y\rangle \in A$, а иначе R_{xy} не содержит ни одной последовательности длины k. Отсюда следует, что $A = A^k(R) = A^\omega(R) = A(R)$.

Случай $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\nu+1}$. Каждое $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\nu+1}$-множество $A \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ равно объединению вида $A = \bigcup_n A_n$, где все A_n являются множествами из $\mathbf{\Pi}^0_{1+2\nu}$. Тогда по индуктивному предположению для любого n существует дерево $R^n \subseteq (2\times 2\times \mathbb{N})^{<\omega}$ такое, что $A_n = A(R^n) = A^{\omega(1+\nu)}(R^n)$. Определим дерево $R \subseteq (2\times 2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ следующим образом: $R(u^\wedge i, v^\wedge j, n^\wedge s)$, когда $R^n(u,v,s)$ для всех $i,j = 0,1$ и $n \in \mathbb{N}$ (и отдельно $\langle \Lambda,\Lambda,\Lambda\rangle \in R$). Тогда $R_{xy} = \{\Lambda\} \cup \{n^\wedge s \colon s \in {R^n}_{xy}\}$ для всех $x,y \in 2^\omega$ и, следовательно, дерево-сечение R_{xy} совпадает с $\sum^*_n {R^n}_{xy}$ (см. разд. 2 об операции счетной суммы). Отсюда вытекает $\mathtt{rnk}(R_{xy}) = \sup \mathtt{rnk}({R^n}_{xy})$.[10] В частности, $\mathtt{rnk}(R_{xy}) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathtt{rnk}({R^n}_{xy}) = \infty$ для некоторого n. Отсюда следует $A = A(R)$ по выбору деревьев R^n. Далее, если $\langle x,y\rangle \notin A$, то $\langle x,y\rangle \notin A_n$ для всех n, откуда $\mathtt{rnk}({R^n}_{xy}) < \omega(1+\nu)$ и это влечет $\mathtt{rnk}(R_{xy}) < \omega(1+\nu)+1$. Мы заключаем, что $A = A(R) = A^{\omega(1+\nu)+1}(R) = A^{\omega(1+\nu)+k}(R)$ для каждого $k \geq 1$, что и требовалось.

Случай $\mathbf{\Pi}^0_{1+2\nu}$. Здесь $\nu < \omega_1$ может быть как предельным, так и непредельным ординалом. Любое $\mathbf{\Pi}^0_{2\nu}$-множество $A \subseteq 2^\omega \times 2^\omega$ совпадает с пересечением вида $A = \bigcap_n A_n$, каждое A_n — множество класса $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\eta_n+1}$, $\eta_n < \nu$, или просто k_n-липшицево множество для некоторого k_n в случае, когда $\nu = 0$ (тогда $\mathbf{\Pi}^0_1$ — замкнутые множества). По индуктивному предположению для каждого n существует дерево $R^n \subseteq (2\times2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ такое, что $A_n = A(R^n) = A^{\omega(1+\eta_n)+1}(R^n)$ или $A_n = A(R^n) = A^{k_n}(R^n)$ при $\nu = 0$. В этой ситуации нетрудно определить дерево $R \subseteq (2\times2\times\mathbb{N})^{<\omega}$ такое, что при любых $x,y \in 2^\omega$ R_{xy} изоморфно $\prod^*_{n\in\mathbb{N}} {R^n}_{xy}$. (См. разд. 2 об операции счетного произведения. Дерево R может быть определено по существу как множество всех троек вида $\langle u,v,\sigma\rangle$, где для некоторого m u и v принадлежат 2^m, а $\sigma = \langle s_0,\ldots,s_m\rangle$,

[10] Напомним, что $\mathtt{sup}\, X$ обозначает наименьший ординал, строго больший, чем каждый ординал из X, или ∞, если X содержит ∞.

каждое s_k принадлежит $\mathbb{N}^m$ и $\langle u, v, s_k\rangle \in R^k$ с порядком $\langle u, v, \sigma\rangle \preccurlyeq \langle u', v', \sigma'\rangle$ при $u \subseteq u'$, $v \subseteq v'$ и $\sigma \preccurlyeq \sigma'$ в смысле, указанном в разд. 2.)

Согласно лемме 3 $\mathtt{rnk}(R_{xy}) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\mathtt{rnk}({R^n}_{xy}) = \infty$ для всех n. Отсюда следует, что $A = A(R)$ по выбору деревьев R^n. Далее, если $\langle x, y\rangle \notin A$, то $\langle x, y\rangle \notin A_n$ и, следовательно, $\mathtt{rnk}({R^n}_{xy}) \le \omega(1+\eta_n) < \omega(1+\nu)$ (или $< k_n < \omega$ при $\nu = 0$) для по крайней мере одного n. С другой стороны, выполняется $\mathtt{rnk}(R_{xy}) \le \mathtt{min}_n\,\mathtt{rnk}({R^n}_{xy}) + n$ по лемме 3. Тем самым $\mathtt{rnk}(R_{xy}) \le \omega(1+\nu)$. Отсюда следует, что $A = A(R) = A^{\omega(1+\nu)}(R)$, что и требовалось. $\square$

В свете этой леммы мы могли бы попробовать доказать полноту, скажем, отношения $\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}^{\omega(1+\nu)+2}$ для борелевского класса $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\nu+1}$ следующим образом. Рассмотрим какое-нибудь $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\nu+1}$-отношение эквивалентности E на 2^ω. Таким образом, E как множество пар имеет класс $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\nu+1}$ в $2^\omega \times 2^\omega$. Из леммы 24 следует, что существует дерево $Q \subseteq (2\times 2\times \mathbb{N})^{<\omega}$ такое, что $\mathsf{E} = A^{\omega(1+\nu)+1}(Q) = A(Q)$, или, другими словами, для всех $x, y \in 2^\omega$ выполнено

$$x\,\mathsf{E}\,y \;\Leftrightarrow\; \mathtt{rnk}(Q_{xy}) \ge \omega(1+\nu)+1 \;\Leftrightarrow\; \mathtt{rnk}(Q_{xy}) = \infty.$$

В частности, Q является $(\omega(1+\nu)+1)$-ограниченным деревом в смысле определения 23.

Гипотеза 25. В этом частном случае имеется дерево $R \subseteq (2\times 2\times \mathbb{N})^{<\omega}$, удовлетворяющее (i)–(v) теоремы 5 вместе со следующим дополнительным условием: R является $(\omega(1+\nu)+2)$-ограниченным деревом и поэтому для всех $x, y \in 2^\omega$

$$x\,\mathsf{E}\,y \;\Leftrightarrow\; \mathtt{rnk}(R_{xy}) \ge \omega(1+\nu)+2 \;\Leftrightarrow\; \mathtt{rnk}(R_{xy}) = \infty. \quad \square$$

Приняв эту гипотезу, мы получаем

$$x\,\mathsf{E}\,y \;\Leftrightarrow\; \vartheta(x)\,\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}^{\omega(1+\nu)+2}\,\vartheta(y) \;\Leftrightarrow\; \vartheta(x)\,\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}\,\vartheta(y),$$

где отображение ϑ определено согласно (6) в разд. 4. (В самом деле, благодаря лемме 9 для всех x, y выполнено равенство $\mathrm{E}\textsc{mb}(\vartheta(x), \vartheta(y)) = R_{xy}$.) Тем самым, как и в доказательстве теоремы 8, отображение ϑ является борелевской редукцией отношения E к $\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}^{\omega(1+\nu)+2}$. В силу произвольности E в классе $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\nu+1}$ отношение $\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}^{\omega(1+\nu)+2}$ оказывается полным для класса всех $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\nu+1}$-отношений эквивалентности. Тем самым, поскольку само $\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}^{\omega(1+\nu)+2}$ принадлежит $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2(1+\nu)+1}$ согласно лемме 11(ii), мы делаем вывод, что при $\nu \ge \omega$ (тогда $1+\nu = \nu$) класс $\mathbf{\Sigma}^0_{1+2\nu+1}$ содержит полное отношение эквивалентности.

Но это рассуждение базируется на гипотезе 25, которую, к сожалению, доказать или опровергнуть нам пока не удалось.

9. ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

Имеются хорошие основания предполагать, что $\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}^{\eta} <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathrm{NT}}^{\omega\nu} <_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathrm{NT}}^{\omega\nu+n}$ при $\eta < \omega\nu$ и $n \ge 1$. Основная идея здесь состоит в том, что не существует $\le_{\mathrm{B}}$-наибольших борелевских отношений эквивалентности (отмечено в [6]), а потому последовательность отношений эквивалентности $\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}^{\xi}$ обязана иметь несчетно много индексов $<_{\mathrm{B}}$-возрастания (в строгом смысле). С другой стороны, выглядит правдоподобным, что $\mathsf{E}_{\mathrm{NT}}^{\omega\nu+n} \sim_{\mathrm{B}} \mathsf{E}_{\mathrm{NT}}^{\omega\nu+n+1}$ при $n \ge 1$.

Еще несколько интересных вопросов.

Какие борелевские классы содержат полные отношения эквивалентности?

Здесь можно рассмотреть еще одну близкую проблему. Какое-то время назад казалось достаточно вероятным (см., например, [9]), что отношение эквивалентности T, называемое *равенством счетных множеств вещественных чисел*[11], борелевски не сводится ни к какому

[11] T определяется на множестве $\mathbb{R}^\omega$ всех счетных последовательностей вещественных чисел так, что $x\,\mathsf{T}\,y$ выполнено, когда множества $\{x(n) : n \in \omega\}$ и $\{y(n) : n \in \omega\}$ (счетные множества вещественных чисел) равны одно другому.

отношению эквивалентности $\mathsf{E}_{\mathcal{I}}$, порожденному борелевским идеалом $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Однако Розендаль [17] опроверг эту гипотезу: существует борелевский идеал вида $\mathcal{I}^{\xi}_{\text{NT}}$ такой, что $\mathsf{T} \le_{\text{B}} \mathsf{E}_{\mathcal{I}^{\xi}_{\text{NT}}}$ (см. следствие 22 выше). Какой наименьший ординал ξ обеспечивает это соотношение?

В заключение отметим, что все оценки борелевских классов отношений эквивалентности в этой работе касались только действительных борелевских классов в пространствах типа канторова дисконтинуума. В чем-то более глубокая концепция “потенциальных” борелевских классов отношений эквивалентности в [6] может потребовать соответствующей корректировки доказательств.

Благодарности. Идея этого исследования возникла после того, как один из авторов (В.Г. Кановей) познакомился с последними результатами К. Розендаля в ходе конференции по теории множеств в Люмини (сентябрь 2004). Авторы благодарны А.С. Кехрису и К. Розендалю за ряд ценных замечаний и Алану Луво за критику первой версии настоящей статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Adams S., Kechris A.S.* Linear algebraic groups and countable Borel equivalence relations // J. Amer. Math. Soc. 2000. V. 13, N 4. P. 909–943.
2. *Farah I.* Basic problem for turbulent actions. II: c_0-equalities // Proc. London Math. Soc. 2001. V. 82. P. 1–30.
3. *Friedman H., Stanley L.* A Borel reducibility theory for classes of countable structures // J. Symb. Logic. 1989. V. 54, N 3. P. 894–914.
4. *Harrington L.A., Kechris A.S., Louveau A.* A Glimm–Effros dichotomy for Borel equivalence relations // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 310. P. 293–302.
5. *Hjorth G.* Classification and orbit equivalence relations. Providence (RI): Amer. Math. Soc., 2000. (Math. Surv. and Monogr.; V. 75).
6. *Hjorth G., Kechris A.S., Louveau A.* Borel equivalence relations induced by actions of the symmetric group // Ann. Pure and Appl. Logic. 1998. V. 92. P. 63–112.
7. *Кановей В.Г.* Топологии, порожденные эффективно суслинскими множествами, и их приложения в дескриптивной теории множеств // УМН. 1996. Т. 51, №3. С. 17–52.
8. *Кановей В.Г., Любецкий В.А.* О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств // УМН. 2003. Т. 58, №5. С. 3–88.
9. *Кановей В.Г., Реекен М.* Некоторые новые результаты о борелевской несводимости отношений эквивалентности // Изв. РАН. Сер. мат. 2003. Т. 67, №1. С. 59–82.
10. *Келдыш Л.В.* Структура B-множеств. М.: Изд-во АН СССР, 1944. 74 с. (Тр. МИАН; Т. 17).
11. *Kechris A.S.* Classical descriptive set theory. Berlin: Springer, 1995. (Grad. Texts Math.; V. 156).
12. *Kechris A.S.* New directions in descriptive set theory // Bull. Symb. Logic. 1999. V. 5, N 2. P. 161–174.
13. *Louveau A., Rosendal C.* Complete analytic equivalence relations // Trans. Amer. Math. Soc. 2005. V. 357, N 12. P. 4839–4866.
14. *Louveau A., Velickovic B.* A note on Borel equivalence relations // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120. P. 255–259.
15. *Lusin N.* Sur les classes des constituantes des complementaires analytiques // Ann. Scuola Norm. Super. Pisa. Ser. 2. 1933. V. 2, N 3. P. 269–282.
16. *Lusin N., Sierpiński W.* Sur quelques proprietes des ensembles (A) // Bull. Intern. Acad. sci. Cracovie. 1928. V. 4. P. 35–48.
17. *Rosendal C.* Cofinal families of Borel equivalence relations and quasiorders // J. Symb. Logic. 2005. V. 70, N 4. P. 1325–1340.