1985 г. май—июнь т. 40, вып. 3(243)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 510.225

РАЗВИТИЕ ДЕСКРИПТИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ ПОД ВЛИЯНИЕМ ТРУДОВ Н. Н. ЛУЗИНА

В. Г. Кановей

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

В математической науке можно найти не так уж много примеров того, чтобы открытия, идеи, исследования одного ученого оказывали в течение десятилетий определяющее влияние на становление и развитие целой области математики. Такое под силу только ученым огромного таланта и интуиции, и именно это с полным на то основанием говорится об основателе дескриптивной теории множеств Николае Николаевиче Лузине.

Н. Н. Лузин пришел в дескриптивную теорию во втором десятилетии XX в. молодым, но уже известным математиком, автором признанных работ по теории функций. В то время дескриптивная теория была, в сущности, еще в зачаточном состоянии. Анри Лебег в 1905 г. предложил изучать «называемые» точечные множества, т. е. такие множества, которые можно определить вполне недвусмысленным образом, не прибегая к аксиоме выбора. Первоначально систематические исследования «называемых» математических объектов ограничивались борелевскими множествами евклидовых пространств и бэровскими функциями одного или нескольких действительных аргументов (эти множества и функции были открыты Эмилем Борелем и Рене Бэром в самом конце прошлого века в связи с развитием математического анализа и теории функций). Несмотря на некоторые успехи (выразившиеся, в частности, в построении трансфинитной классификации бэровских функций и борелевских множеств и доказательстве Лебегом в [28] того факта, что эта классификация продолжается по всем счетным трансфинитам), долгое время никак не удавалось решить проблему мощности борелевских множеств.

Проблема эта была поставлена Н. Н. Лузиным перед участниками организованного им еще до первой мировой войны в Московском университете семинара по теории функций. Решение было найдено в 1916 г. одним из участников семинара, будущим великим топологом П. С. Александровым. П. С. Александров показал, что несчетное борелевское множество евклидова пространства необходимо включает совершенное подмножество, а потому имеет мощность континуума. Другими словами, континуум-гипотеза Кантора выполняется на борелевских множествах.

Введенная П. С. Александровым для решения проблемы мощности борелевских множеств A-операция позволила М. Я. Суслину — также участнику лузинского семинара — построить новый класс «называемых» множеств, содержащий все борелевские множества, но не исчерпывающийся ими. М. Я. Суслин именовал эти новые множества «множествами (A)», но они также известны как A-множества, аналитические множества (термин Лузина), суслинские множества (термин Хаусдорфа). В сущности, только после открытия A-множеств и первых исследований М. Я. Суслина и Н. Н. Лузина по A-множествам (результаты этих исследований изложены в заметках [31] и [2] и в более подробной статье [24]) дескриптивная теория становится самостоятельной областью математики. С этого момента и в течение более чем двух десятилетий развитие дескриптивной теории проходит под идейным руководством и при непосредственном участии Н. Н. Лузина. Деятельность Н. Н. Лузина была определяющим стержнем классического этапа развития дескриптивной теории, в ходе которого был определен предмет изучения (борелевские, A-множества, проективные множества и некоторые другие типы «называемых» множеств), созданы специфические методы исследования этих множеств (такие, как решето), получены глубокие результаты об этих множествах и, наконец, сформулированы не поддававшиеся решению проблемы, наметившие границы применения средств классической математики и создавшие предпосылки для современного развития дескриптивной теории.

Составители и редакторы изданного в 1958 г. второго тома сочинений Н. Н. Лузина (книга [23]) — ученики Н. Н. Лузина П. С. Новиков и Л. В. Келдыш — выделили три цикла лузинских работ по дескриптивной теории. К первому, главному циклу они отнесли исследования конкретных типов «называемых» множеств. Внутри этого цикла можно указать несколько основных направлений.

Во-первых, это изучение открытых М. Я. Суслиным A-множеств, где Н. Н. Лузиным получены такие важные результаты, как теоремы об их измеримости и свойстве Бэра (см. конец § 2 нашего обзора) и теоремы отделимости (§ 3).

Во-вторых, это изыскания по различным типам плоских множеств (в другой терминологии — по неявным функциям), в частности, в связи с проблемой униформизации. Здесь Н. Н. Лузин и П. С. Новиков получили ряд фундаментальных результатов (см. § 4), позже нашедших дальнейшее развитие и в работах других специалистов.

В-третьих, это разработка операции решета и разложения на конституанты — главного технического аппарата теории A-множеств и дополнительных к ним CA-множеств. Решетам и конституантам посвящен § 3 нашего обзора.

Четвертым направлением мы называем углубленное изучение структуры классов борелевской иерархии, где Н. Н. Лузиным получены такие важные результаты, как теоремы отделимости. Многое было сделано также учениками Н. Н. Лузина — М. А. Лаврентьевым и Л. В. Келдыш. Об этом будет рассказано в § 1.

Наконец, в-пятых, открытие проективных множеств и построение проективной иерархии (см. § 2). Уже довольно хорошо изученные к моменту открытия проективных множеств (1924—1925 гг.) A-множества и CA-множества составляют только первый уровень проективной иерархии. Естественно, что Н. Н. Лузин попытался исследовать множества, появляющиеся на более высоких уровнях. Итог был совершенно отрицательный: те методы, которые хорошо «работали» в области A-множеств и CA-множеств, ничего, в общем, не давали для «произвольного» проективного множества. В частности, оставался открытым вопрос об измеримости, свойстве Бэра и мощности проективных множеств. Однако была нужна, несомненно, интуиция великого математика, чтобы увидеть, как это сделал Н. Н. Лузин, за этим явлением не следствие неразвитости технического аппарата теории, а значительно более глубокий феномен принципиальной неполноты и недостаточности традиционных математических средств и способов рассуждений в применении к проективным множествам, и предсказать, что «невозможно и никогда не будет возможно» достижение решения проблем измеримости по Лебегу, свойства Бэра и мощности проективных множеств. Предсказание это, сделанное Н. Н. Лузиным в 1925 г., подтвердилось дальнейшим развитием дескриптивной теории, причем строгое доказательство неразрешимости указанных проблем о проективных множествах было получено П. С. Новиковым (1951 г.) и Р. Соловеем (1970 г.) только после разработки методов доказательства неразрешимости в рамках аксиоматической теории множеств.

Проективные множества до настоящего времени остаются в центре внимания специалистов по дескриптивной теории. О главных направлениях современных изысканий по проективным множествам мы расскажем в § 6.

Таков первый цикл лузинских работ по дескриптивной теории. К нему примыкают работы Е. А. Селивановского, П. С. Новикова, А. Н. Колмогорова, А. А. Ляпунова по C-множествам и R-множествам — своеобразным категориям «называемых» множеств, расположенных между первым и вторым уровнями проективной иерархии, и исследования П. С. Новикова по самому второму проективному уровню (§ 5).

В 30-е годы, когда идеи классической дескриптивной теории множеств были уже близки к своему исчерпанию и довольно определенно просматривались границы их применимости, Н. Н. Лузин постепенно отходит от прямых исследований различных типов проективных множеств и обращает свое внимание на важнейшие проблемы дескриптивной теории, такие как проблема мощности CA-множеств и проблема эффективного существования точечного множества мощности $\aleph_1$. Работы в этом направлении составляют второй цикл лузинских исследований. Пытаясь определить природу трудностей на пути решения этих проблем и знаменитой проблемы континуума, Н. Н. Лузин вводит в математику фундаментальное понятие совокупности борелевских множеств ограниченных классов (сейчас говорят: ограниченного ранга) и формулирует несколько проблем о построении таких совокупностей, в том числе и с помощью решет и конституант. Проблемы этой серии Н. Н. Лузин рассматривал как «ослабленные формы» проблемы континуума; на деле же они оказались значительно более трудными и глубокими, чем последняя, и нашли свое решение только в работах самых последних лет. Эти проблемы и связанные с ними результаты мы рассмотрим в § 7.

В последнее время в дескриптивной теории интенсивно развивается направление, связанное с изучением отношений эквивалентности, причем и здесь выявлена фундаментальная роль борелевских множеств ограниченных классов. Этой тематике посвящен § 8. Сам Н. Н. Лузин серьезно не занимался отношениями эквивалентности, однако он, можно сказать, стоял у истоков этого направления, ибо еще в 1927 г. выделил такие главные проблемы, как подсчет числа классов эквивалентности и эффективное существование множества, выбирающего ровно по одной точке из каждого класса эквивалентности. Адекватный технический аппарат для исследования этих проблем был разработан только в 70-е годы.

Наконец, третий цикл работ Н. Н. Лузина в дескриптивной теории связан с приложениями аксиомы выбора. Н. Н. Лузин относился в основном критически к использованию этой аксиомы в математических рассуждениях из-за ее крайне неконструктивного характера, выражающегося в том, что доказательства существования, проведенные с помощью аксиомы выбора, не дают конкретных, «называемых» множеств с требуемыми свойствами. Однако и он отдал некоторую дань изысканиям по выводу из аксиомы выбора следствий о существовании точечных множеств с такими необычными свойствами, которые нельзя было надеяться реализовать на более эффективных конструкциях. О работах Н. Н. Лузина в связи с аксиомой выбора и о вызванных ими более поздних исследованиях мы расскажем в заключительном § 9.

Говоря о роли Н. Н. Лузина для развития дескриптивной теории, нельзя не отметить, что Н. Н. Лузин уделял много внимания философско-математическим проблемам оснований математики и высказал ряд глубоких идей о природе трудностей в этой области. К сожалению, отечественная философия науки обошла вниманием эту сторону лузинского творчества. Нельзя не упомянуть также об исключительно важной и плодотворной научно-педагогической деятельности Н. Н. Лузина, о чем хорошо сказано в статьях, опубликованных в УМН, 1974, т. 29, вып. 5, а также в газете Кемеровского государственного университета «Путь в науку», номер от 7 сентября 1983 г. и в Вестн. АН СССР, 1984, № 11.

Заканчивая это предисловие, автор считает необходимым указать на то большое влияние на отбор и размещение материала для настоящей статьи (особенно это касается §§ 1—5, посвященных классическому — лузинскому этапу в дескриптивной теории), которое имели для него обзорные работы [49], [50], [51], [59], [61], [71], [74], [77], написанные учениками Н. Н. Лузина и его последователями в дескриптивной теории, а также беседы с В. А. Успенским и А. Д. Таймановым.

Содержательной части нашей статьи предпосылается нулевой параграф, в котором речь идет о взаимоотношениях между различными пространствами, рассматриваемыми в работах по дескриптивной теории.

§ 0. Евклидовы и бэровские пространства

Поначалу дескриптивная теория множеств развивалась почти исключительно в евклидовых пространствах $\mathbb{R}^m$. Но уже к концу 20-х годов выяснилось, что результаты, методы и способы рассуждений, свойственные дескриптивной теории в евклидовых пространствах, без изменений (либо — в отдельных случаях — с изменениями, обычно упрощающими суть дела) и довольно легко переносятся на множества бэровского пространства $\mathscr{N}$ и пространств $\mathscr{N}^m$, где $m \geqslant 1$.

Бэровское пространство $\mathscr{N}$ (счетного веса) образовано всевозможными бесконечными последовательностями $\langle a_1, a_2, a_3, \ldots \rangle$ натуральных чисел a_i и является, таким образом, топологическим произведением счетного числа экземпляров натурального ряда (см. [30], с. 155, где это пространство обозначено через $B_{\aleph_0}$). Пространство $\mathscr{N}$ гомеоморфно множеству всех иррациональных точек действительной прямой $\mathbb{R}$ (либо любого отрезка $\mathbb{R}$) ([30], с. 155).

Все пространства $\mathscr{N}^m$, где $m \geqslant 1$, условимся в дальнейшем называть *бэровскими пространствами* (все они гомеоморфны $\mathscr{N}$).

Развитие дескриптивной теории показало, что бэровские пространства лучше согласованы с главными дескриптивными конструкциями, чем евклидовы (см., например, [50], замечание 42). Уже в «Лекциях» [11] Н. Н. Лузина пространство $\mathscr{N}$ (реализованное в виде множества иррациональных точек) играет роль основного дескриптивного пространства («основная область» по Лузину). Также для бэровских пространств построено изложение в обзорах [61], [77], в известном смысле подводящих итоги классическому этапу дескриптивной теории. Несколько позже Дж. Аддисон [80] показал, что бэровские пространства, в отличие от евклидовых, допускают использование формул специального довольно простого языка для описания точечных множеств и формализации выкладок, с помощью которого удалось весьма существенно сократить классические «геометрические» доказательства, одновременно достигая большей ясности самого существа дела.

Конечно, бэровские пространства проигрывают евклидовым с точки зрения геометрической наглядности, однако этот момент не носит принципиального характера вследствие возможности отождествить точки пространства $\mathcal{N}$ с иррациональными точками действительной прямой. Благодаря этой же возможности, построение дескриптивной теории в евклидовых и бэровских пространствах приводит к одинаковым по существу теоремам (лишь в отдельных случаях, скажем, замкнутости соответствует компактность, непрерывности — счетная разрывность и т. п.).

Изложение в настоящем обзоре построено так, что им охватываются как бэровские, так и евклидовы пространства, причем мы будем указывать на различия в определениях и результатах для обоих типов пространств в тех немногих случаях, когда такие различия имеют место. Что же касается системы ссылок, то, следуя сложившейся в дескриптивной теории еще с лузинских времен традиции, мы будем указывать на те публикации, в которых приведены первые доказательства (или формулировки) обсуждаемых теорем, независимо от того, множества каких (т. е. евклидовых или бэровских) пространств фактически рассматривались в этих первоначальных работах.

§ 1. Исследования по структуре борелевских классов

Статья В. А. Успенского в настоящем выпуске УМН делает ненужным останавливаться здесь на истории открытия борелевских множеств и на содержании связанных с ними исследований Бореля, Бэра, Лебега. Мы начнем сразу с изложения современной концепции борелевского множества.

Борелевские множества (или B-множества) в данном пространстве образуют наименьший класс множеств этого пространства, содержащий все открытые множества и замкнутый относительно операций дополнения, счетного объединения и счетного пересечения. Борелевские множества организуются в *борелевские классы*, составляющие *борелевскую иерархию*. В настояшее время в работах по дескриптивной теории принято следующее построение борелевской иерархии.

Борелевские классы обозначаются через $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, $\mathbf{\Pi}^0_\xi$, $\mathbf{\Delta}^0_\xi$, где $1 \leqslant \xi < \omega_1$, а ω_1 — первый несчетный трансфинит. Построение классов проходит индукцией по ξ. В начальный класс $\mathbf{\Sigma}^0_1$ зачисляются все открытые множества данного пространства. Если класс $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ уже построен, то к классу $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ относятся все множества, дополнительные к множествам из $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, а к классу $\mathbf{\Delta}^0_\xi$ — все множества, принадлежащие $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ вместе со своими дополнениями, т. е. $\mathbf{\Delta}^0_\xi = \mathbf{\Sigma}^0_\xi \cap \mathbf{\Pi}^0_\xi$. Наконец, если $\xi \geqslant 2$, то класс $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ образуется всевозможными счетными объединениями множеств, принадлежащих классам $\mathbf{\Pi}^0_\eta$, где $1 \leqslant \eta < \xi$.

Как видно, классы $\mathbf{\Pi}^0_1$ и $\mathbf{\Delta}^0_1$ образованы соответственно из замкнутых и открыто-замкнутых множеств, а классы $\mathbf{\Sigma}^0_2$ и $\mathbf{\Pi}^0_2$ тождественны классам F_σ и G_δ.

Каждое борелевское множество принадлежит одному из классов $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$, $\mathbf{\Pi}^0_\xi$, $\mathbf{\Delta}^0_\xi$. В этом случае, заметим, оно будет принадлежать и каждому борелевскому классу с индексом, большим чем ξ, поскольку борелевские классы удовлетворяют условию возрастания:

$$\mathbf{\Sigma}^0_\xi \cup \mathbf{\Pi}^0_\xi \subsetneqq \mathbf{\Delta}^0_\zeta \quad \text{при} \quad 1 \leqslant \xi < \zeta < \omega_1.$$

Известно, что включение здесь строгое, так что ни один из борелевских классов не исчерпывает собой всех борелевских множеств.

В работах по дескриптивной теории в 20-е — 40-е годы обычно рассматривалась другая система классификации борелевских множеств, введенная Валле-Пуссеном и детально разработанная Н. Н. Лузиным. Не останавливаясь на построении иерархии Валле-Пуссена — Лузина (см. статью [77]), отметим лишь то, что каждый класс K_ξ этой иерархии совпадает с классом $\mathbf{\Delta}^0_{\xi+1}$, а множества, называемые элементами класса K_ξ (они часто рассматривались в классических исследованиях), тождественны $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множествам ([77], § 10).

В теории борелевских множеств можно выделить два направления. Это, во-первых, углубленное изучение борелевской классификации и, во-вторых, исследование борелевских множеств в связи с некоторыми другими понятиями дескриптивной теории, такими как проективные множества и решета. В этом параграфе мы ограничимся обзором достижений только в первом направлении, оставив второе до §§ 3 и 4, где будут рассмотрены эти важные понятия и где связанные с ними теоремы о борелевских множествах окажутся более уместными.

1.1. Теоремы отделимости и редукции. Пусть X и Y — пара непересекающихся множеств. Если некоторое третье множество U содержит все точки множества X и не имеет общих точек с Y, то говорят, что множество *U отделяет* X от Y. Понятие отделимости было введено в дескриптивную теорию Н. Н. Лузиным в работе [7].

Обычно в связи с отделимостью рассматривается такая главная задача: выяснить, какие из следующих трех теорем (называемых также принципами) выполняются для данного класса K точечных множеств (например, для борелевского класса $\mathbf{\Pi}^0_{17}$).

Первая теорема отделимости. *Любые два не имеющих общих точек множества класса K можно отделить одно от другого множеством, принадлежащим вместе со своим дополнением, классу K.*

Вторая теорема отделимости. *Если из двух произвольно взятых множеств X, Y класса K удалить их общую часть, то полученные множества-остатки $X - Y$ и $Y - X$ можно будет заключить в непересекающиеся множества, дополнительные к множествам класса K.*

Теорема неотделимости. *Существует пара непересекающихся множеств класса K, которые невозможно заключить в попарно непересекающиеся множества, дополнительные к множествам класса K.*

Проведенное Н. Н. Лузиным в [10] и [11], гл. II, исследование законов отделимости для борелевских классов в бэровских пространствах показало, что, каков бы ни был трансфинит ξ, $1 \leqslant \xi < \omega_1$, для класса $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ выполняется первая теорема отделимости (отделяющее множество из класса $\mathbf{\Delta}^0_\xi$) и вторая теорема отделимости (с отделяющими множествами в классе $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$), а для класса $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ — теорема неотделимости. В евклидовых пространствах почти то же самое — за исключением того, что класс $\mathbf{\Pi}^0_1$ не удовлетворяет теоремам отделимости. Заметим, что борелевские классы $\mathbf{\Delta}^0_\xi$, будучи замкнутыми относительно операций дополнения и разности двух множеств, автоматически удовлетворяют теоремам отделимости.

С отделимостью тесно связана восходящая к работе Куратовского [62] теорема редукции, имеющая такую формулировку:

Ко всякой паре множеств X, Y класса K найдется пара непересекающихся множеств $X' \subseteq X$, $Y' \subseteq Y$ класса K, объединение которых тождественно объединению данных множеств X и Y.

Теорема редукции выполняется для борелевских классов $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ (и, разумеется, для $\mathbf{\Delta}^0_\xi$), но не имеет места для классов $\mathbf{\Pi}^0_\xi$. В такой инверсии по сравнению с теоремами отделимости нет, впрочем, ничего удивительного: дело в том, что теорема редукции, будучи выполненной для некоторого класса K, влечет обе теоремы отделимости для класса дополнительных множеств и (для классов $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$ и проективных классов $\mathbf{\Sigma}^1_n$ и $\mathbf{\Pi}^1_n$) теорему неотделимости для самого K.

1.2. Подклассы. Заметка М. А. Лаврентьева [35] вскрыла очень интересную структуру классов $K_\xi = \Delta^0_{\xi+1}$, допускающих разбиение на подклассы, формируемые на основе наименьшей возможной длины трансфинитной или конечной цепочки Π^0_ξ-множеств, особым образом отделенных друг от друга, и доставляющих в объединении данное множество класса $\Delta^0_{\xi+1}$. Затем подклассы изучались Н. Н. Лузиным в [10], [11], А. А. Ляпуновым [55], В. Серпинским и др.

В книге [63], § 37.IV изложена следующая конструкция, приводящая к подклассам Лаврентьева, но несколько отличающаяся от их первоначального определения. Оказывается, что ко всякому $\Delta^0_{\xi+1}$-множеству X можно подобрать число $\theta < \omega_1$ и $\subseteq$-убывающую последовательность множеств X_ν, где $\nu < \theta$, класса Π^0_ξ такую, что $X = \bigcup_\nu(X_\nu - X_{\nu+1})$, где объединение берется по всем *четным* числам $\nu < \theta$ (причем, если само θ нечетно, то следует дополнительно определить $X_\theta = \varnothing$). Все множества X, которые можно получить этим способом при фиксированных θ и ξ, образуют θ-й подкласс (малый класс θ в [63]) класса $\Delta^0_{\xi+1}$.

Совсем недавно систематическое исследование различных способов формирования подклассов провел А. Луво [119]. Дж. Бэрджес [107] обнаружил интересные приложения подклассов к теории C-множеств и R-множеств.

1.3. Инвариантность классов. М. А. Лаврентьев доказал в [34] следующую теорему о топологической инвариантности борелевских классов. Пусть K — один из борелевских классов (за исключением классов Σ^0_1, Π^0_1, Δ^0_1, Σ^0_2, Δ^0_2). Тогда каждое точечное множество, гомеоморфное какому-то множеству из K, само принадлежит K. Аналогичная теорема справедлива для подклассов борелевских классов, а также для проективных и некоторых других важных классов точечных множеств (см., например, [66], § 36).

Возник вопрос о возможности распространить этот результат на отображения более общего вида, чем гомеоморфизмы. Рассматривая *открытые* (т. е. образ каждого открытого множества должен быть открыт) непрерывные отображения, Л. В. Келдыш установила [69], что всякое борелевское множество есть непрерывный открытый образ подходящего множества класса Δ^0_3 — так что борелевские классы третьего и более высоких уровней не сохраняются при непрерывных открытых отображениях.

Иной оказалась картина для *замкнутых компактных* отображений, характеризующихся такими двумя условиями: 1) образ каждого замкнутого множества замкнут и 2) прообраз каждой точки компактен. А. Д. Тайманов (для $\xi \geqslant \omega$ — см. [94]) и Сан Раймон [100] (для конечных ξ) установили, что при $\xi \geqslant 3$ классы Σ^0_ξ, Π^0_ξ, Δ^0_ξ, а также и класс Π^0_2 сохраняются при непрерывных замкнутых компактных отображениях.

В евклидовых пространствах теоремы Лаврентьева и Тайманова — Сан Раймона остаются в силе и для классов Σ^0_2 и Δ^0_2.

1.4. Канонические множества и проблема универсальности. Работы М. А. Лаврентьева, Л. В. Келдыш и других математиков привлекли внимание к изучению топологических свойств борелевских множеств. Значительный интерес вызывала предложенная Н. Н. Лузиным в [10], [11] задача выделения в каждом классе Π^0_ξ специального семейства *канонических* множеств, достаточно узкого для того, чтобы все множества этого семейства были попарно гомеоморфны, но достаточно богатого для возможности получить каждое Π^0_ξ-множество каким-либо простым способом из канонических множеств класса Π^0_ξ.

В классе Π^0_1 замкнутых множеств имеются три типа канонических множеств: точки, гомеоморфы канторова дисконтинуума и замкнутые гомеоморфы бэровского пространства (а для действительной прямой вместо последних — отрезки). Каждое замкнутое множество есть сумма счетного числа канонических замкнутых множеств.

В классе Π^0_2 ($=G_\delta$) П. С. Александров и П. С. Урысон выделили один тип канонических множеств — гомеоморфы бэровского пространства. Каждое множество из $\mathbf{\Pi}^0_2$ является объединением одного такого канонического множества и счетного числа $\mathbf{\Delta}^0_2$-множеств.

Определение канонического $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множества при $\xi \geqslant 3$ было дано Л. В. Келдыш в [70]. Это определение включает в себя два пункта: 1) данное $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множество X имеет первую категорию на своем замыкании и 2) любое непустое пересечение $X \cap B$ множества X с базовым открыто-замкнутым множеством B рассматриваемого пространства $\mathcal{N}^m$ есть *универсальное* $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множество (требование универсальности означает, что ко всякому $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множеству Y существует совершенное множество P такое, что Y гомеоморфно пересечению $X \cap B \cap P$). Л. В. Келдыш нашла, что при $\xi \geqslant 3$ канонические множества класса $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ попарно гомеоморфны и каждое $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множество является объединением одного канонического множества и счетного числа множеств классов $\mathbf{\Pi}^0_\eta$, где $1 \leqslant \eta < \xi$.

Пока что остается нерешенной следующая проблема, сформулированная в [70] (а также в [50], замечание 50): будет ли универсальным всякое строго $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множество? (*Строго* $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множествами называются множества класса $\mathbf{\Pi}^0_\xi$, не принадлежащие двойственному классу $\mathbf{\Sigma}^0_\xi$. Всякое универсальное $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множество — а такие множества имеются в каждом классе $\mathbf{\Pi}^0_\xi$ — будет и строго $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множеством.) Для утвердительного ответа было бы достаточно доказать, что каждое строго $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множество X включает замкнутую в X часть, гомеоморфную одному из универсальных $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множеств. В связи с этой задачей отметим интересный результат Дж. Стила [121]: в канторовом дисконтинууме при $\xi \geqslant 3$ гомеоморфны друг другу любые два множества первой категории, являющиеся строго $\mathbf{\Pi}^0_\xi$-множествами в пересечении с любым базовым интервалом.

§ 2. Проективные множества. Построение иерархии

Главную роль в построении проективных множеств играет операция *проекции*: имеется в виду проектирование на подпространство с на единицу меньшим числом осей, когда каждая точка $\langle x, y, \ldots, u, v \rangle$ переходит в точку $\langle x, y, \ldots, u \rangle$. Таким образом, проекция множества бэровского пространства $\mathcal{N}^{m+1}$ (или евклидова пространства $\mathbb{R}^{m+1}$) будет расположена в пространстве $\mathcal{N}^m$ (соответственно в $\mathbb{R}^m$).

Проективные множества бэровских пространств $\mathcal{N}^m$, где $m \geqslant 1$, составляют наименьший класс множеств этих пространств, замкнутый относительно операций проекции и дополнения и содержащий все открытые множества. Точно таким же образом определяются проективные множества и в евклидовых пространствах, только вместо открытых множеств следует взять множества класса F_σ.

Проективные множества организуются в иерархию проективных классов на основе числа операций дополнения и проектирования, минимально необходимого для построения данного множества из начальных — открытых (в евклидовом случае — F_σ) множеств. *Проективные классы* в современных работах по дескриптивной теории принято обозначать через $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$, где $n \geqslant 0$ — произвольное натуральное число (эта символика введена Дж. Аддисоном в [80]). В отличие от борелевской иерархии, здесь нет нужды прибегать к трансфинитным индексам, ибо конструкция замыкается уже на шаге ω.

В бэровских пространствах начальный класс $\mathbf{\Sigma}^1_0$ состоит из всех открытых множеств, т.е. он тождествен борелевскому классу $\mathbf{\Sigma}^0_1$. В евклидовых пространствах в класс $\mathbf{\Sigma}^1_0$ следует зачислить все множества F_σ, т. е. $\mathbf{\Sigma}^1_0 = \mathbf{\Sigma}^0_2$.

Далее, при любом n класс $\mathbf{\Pi}^1_n$ образуется дополнениями всех множеств из $\mathbf{\Sigma}^1_n$, а после этого класс $\mathbf{\Sigma}^1_{n+1}$ — проекциями множеств, принадлежащих классу $\mathbf{\Pi}^1_n$. Наконец, подобно построению борелевской иерархии, класс $\mathbf{\Delta}^1_n$ определяется равным пересечению классов $\mathbf{\Sigma}^1_n$ и $\mathbf{\Pi}^1_n$.

В более традиционной системе обозначений, введенной Н. Н. Лузиным, классам $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Delta}^1_n$ соответствовали обозначения A_n, CA_n и B_n. Подробнее о лузинском построении проективных классов см. в статье В. А. Успенского [132].

Открытие Н. Н. Лузиным проективных множеств в 1925 г. (определение проективного множества впервые появилось в заметке [4]) стало одним из наиболее значительных событий в развитии дескриптивной теории множеств. Эти множества до настоящего времени остаются в центре внимания специалистов по дескриптивной теории, вызывая интерес своими необычными свойствами, во многом отличными от свойств более простых «называемых» множеств, таких как борелевские множества. Если теоремы, скажем, о борелевских множествах справедливы, как правило, в равной степени для всех уровней борелевской иерархии, то в отношении проективных множеств, если исключить некоторые простые утверждения (вроде соотношений $\mathbf{\Sigma}^1_n \nsubseteq \mathbf{\Pi}^1_n$, $\mathbf{\Pi}^1_n \nsubseteq \mathbf{\Sigma}^1_n$, $\mathbf{\Sigma}^1_n \cup \mathbf{\Pi}^1_n \subsetneqq \mathbf{\Delta}^1_{n+1}$, отмеченных еще Н. Н. Лузиным в [7], п. 72), содержательные результаты в рамках классической дескриптивной теории удавалось получать только для множеств первого, реже второго проективного уровня (нулевой уровень — классы $\mathbf{\Sigma}^1_0$, $\mathbf{\Pi}^1_0$, $\mathbf{\Delta}^1_0$ — по своим свойствам относится скорее к борелевской иерархии, и мы не будем специально о нем говорить).

В наилучшей же степени был исследован первый проективный уровень, т. е. классы $\mathbf{\Sigma}^1_1$, $\mathbf{\Pi}^1_1$, $\mathbf{\Delta}^1_1$. Изучение множеств этих классов началось, собственно говоря, еще до открытия Н. Н. Лузиным общего понятия проективного множества. В то время множества класса $\mathbf{\Sigma}^1_1$ назывались A-множествами, или аналитическими множествами, или суслинскими множествами. Для множеств класса $\mathbf{\Pi}^1_1$ употребительны такие названия: CA-множество, аналитическое дополнение, коаналитическое множество, ко-суслинское множество. Некоторую дополнительную информацию о названиях и истории открытия этих множеств см. в § 1 статьи В. А. Успенского [132]. Наконец, отметим, что по одной из теорем М. Я. Суслина [31] класс $\mathbf{\Delta}^1_1$ совпадает с классом борелевских множеств.

В обзоре классической теории первого проективного уровня мы выделили три группы результатов. Две группы, особенно богатые интересными теоремами, представлены в отдельных параграфах — § 3 (непосредственные приложения операции решета) и § 4 (множества со специальными сечениями). Третья группа содержит результаты, относящиеся к свойствам регулярности: свойству совершенного ядра, свойству Бэра и свойству измеримости (см. § 3 статьи В. А. Успенского [132] или [125], с. 252). Главные теоремы об этих свойствах таковы:

1) Все $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества (бэровских и евклидовых пространств) имеют свойство совершенного ядра. Ниже мы будем ссылаться на это утверждение как на теорему Александрова — Хаусдорфа — Суслина (историческую информацию см. в статье В. А. Успенского [132]).

2) Все $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множества обладают свойством Бэра — Н. Н. Лузин [2].

3) Каждое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество евклидова пространства измеримо в смысле меры Лебега — Н. Н. Лузин [2].

Последнюю теорему можно перенести на множества бэровских пространств с помощью концепции абсолютной измеримости, т. е. измеримости относительно целого класса мер. *Борелевской σ-конечной мерой* на данном пространстве $\mathscr{X}$ называется любая счетно аддитивная мера, определенная на всех борелевских множествах этого пространства (и ни на каких других множествах) и удовлетворяющая условию того, что $\mathscr{X}$ есть объединение счетного числа множеств, имеющих конечные значения мер (а вообще, среди значений меры допускается и $+\infty$). Множество $X \subseteq \mathscr{X}$ называется измеримым в смысле одной из таких мер m, если существует пара борелевских множеств Y и Z таких, что $Y \subseteq X \subseteq Z$ и $m(Y) = m(Z)$. Наконец, множество X *абсолют-*

но измеримо, когда оно измеримо в смысле любой борелевской σ-конечной меры на данном пространстве.

Пример борелевской σ-конечной меры на действительной прямой $\mathbb{R}$ доставляет обычная мера Лебега, ограниченная борелевскими множествами $\mathbb{R}$. Таким образом, абсолютно измеримые множества действительных чисел будут и измеримыми по Лебегу.

Понятие абсолютной измеримости позволяет переформулировать теорему Лузина об измеримости $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множеств в следующем виде: каждое $\mathbf{\Sigma}^1_1$-множество (в любом евклидовом или бэровском пространстве) абсолютно измеримо. Этот результат, как и результат для свойства Бэра, очевидным образом сохраняет силу и для $\mathbf{\Pi}^1_1$-множеств.

§ 3. Операция решета и ее приложения к проективным множествам первого уровня

Введенная Н. Н. Лузиным операция просеивания через решето (кратко: операция решета) стала главным техническим средством построения классической теории первого, а затем и второго уровня проективной иерархии. Вместе с тем значение этой операции выходит за рамки технического аппарата: сама она стала предметом внимательного изучения в работах Н. Н. Лузина и других математиков и источником поставленных Н. Н. Лузиным важных проблем (о чем см. в § 7).

С целью экономии места мы не будем повторять определения решета, внешнего и внутреннего множеств и конституант, изложенные в § 5 статьи В. А. Успенского [132]. Внешнее и внутреннее множества, определяемые решетом C, ниже будут обозначаться через $[C]$ и $[C]_*$ соответственно, а внешняя и внутренняя конституанты, соответствующие данному индексу $\nu < \omega_1$,— через $[C]_\nu$ и $[C]_{*\nu}$. Дополнительно к этому часто рассматриваются следующие множества, называемые *аппроксимациями*:

$$[C]_{<\nu} = \bigcup_{\mu<\nu} [C]_\mu, \quad [C]_{*<\nu} = \bigcup_{\mu<\nu} [C]_{*\mu}.$$

Несколько слов о важном понятии *индекса*. *Внешний* индекс $\mathrm{Ind}_x\, C$ решета C в каждой точке x внешнего множества $[C]$ определяется равным тому единственному числу $\nu < \omega_1$, для которого $x \in [C]_\nu$. В точках x внутреннего множества $[C]_*$ внешний индекс $\mathrm{Ind}_x\, C$ полагается равным ω_1. Кроме того, в точках внутреннего множества $[C]_*$ определяют *внутренний* индекс $\mathrm{Ind}_{*x}\, C$, равный тому единственному числу $\nu < \omega_1$, для которого выполняется $x \in [C]_{*\nu}$. В точках x внешнего множества $[C]$ внутренний индекс не определен.

Закончив эти замечания и определения, изложим теперь основные теоремы о решетах, конституантах и индексах, останавливаясь попутно на наиболее важных приложениях решет к теории первого проективного уровня.

Теорема просеивания [7]. *Класс $\mathbf{\Sigma}^1_1$ совпадает с классом всех множеств, просеянных через открытые решета, т. е. с классом всех внутренних множеств $[C]_*$, где C — открытое решето. Соответственно, класс $\mathbf{\Pi}^1_1$ совпадает с совокупностью всех внешних множеств $[C]$, задаваемых открытыми решетами.*

Решето $C = \langle C_q\colon\ q \in \mathbb{Q}\rangle$ *открыто*, когда открытыми множествами являются все элементы C_q этого решета. Теорема просеивания сохраняет силу и в случае, когда вместо открытых рассматриваются *борелевские* (т. е. с борелевскими элементами) решета.

Напомним, что через $\mathbb{Q}$ обозначается множество всех рациональных чисел.

Теорема борелевости конституант ([7], [11], гл. III). *Если C — борелевское решето, то при любом $\nu < \omega_1$ множества $[C]_\nu$, $[C]_{*\nu}$, $[C]_{<\nu}$, $[C]_{*<\nu}$ будут борелевскими.*

В 30-е годы Н. Н. Лузин и его ученица Л. В. Келдыш провели детальное изучение положения конституант открытых решет в борелевской иерархии. Н. Н. Лузин рассмотрел специальный класс так называемых универсальных открытых решет и доказал [13], что «сложность» конституант $[C]_\nu$ таких решет C монотонно возрастает при стремлении ν к трансфиниту ω_1: точнее говоря, ко всякому $\xi < \omega_1$ имеется только счетно много индексов ν таких, что конституанта $[C]_\nu$ принадлежит борелевскому классу Δ^0_ξ, а все остальные конституанты появляются только в более высоких борелевских классах.

Л. В. Келдыш получила в [67] следующую верхнюю оценку для классов конституант $[C]_\nu$ открытых решет C. Пусть $\nu < \omega_1$. Можно единственным образом подобрать порядковое число $\lambda < \omega_1$ и натуральное $n \geqslant 1$ так, чтобы выполнялось неравенство $\omega^\lambda \cdot n \leqslant \nu < \omega^\lambda (n + 1)$. Теперь, если $n = 1$, то конституанта $[C]_\nu$ принадлежит классу $\Pi^0_{2\lambda+1}$, а при $n > 1$ эта конституанта является разностью двух $\Pi^0_{2\lambda+1}$-множеств.

Недавно А. Миллеру удалось показать, что эта оценка является точной, т. е. достигается на одном специальном решете — бинарном (или каноническом) решете Лебега, построенном Н. Н. Лузиным в [7], п. 2. Рассматривая это решето C, Миллер обнаружил, что при любом $\nu < \omega_1$, если определить λ и n так, как указано выше, то при $n = 1$ конституанта $[C]_\nu$ будет строго $\Pi_{2\lambda+1}^0$-множеством (это означает, напомним, что $[C]_\nu$ не принадлежит классу $\Sigma_{2\lambda+1}^0$ дополнительных множеств), а при $n > 1$ эта конституанта будет строго разностью двух $\Pi_{2\lambda+1}^0$-множеств в том смысле, что она не принадлежит классу множеств, дополнительных к таким разностям (см. [126]).

В работе [68] Л. В. Келдыш исследовала вопрос о том, какую наименьшую величину для данного борелевского множества X может иметь индекс $\nu < \omega_1$, чтобы существовало открытое решето C, удовлетворяющее соотношению $X = [C] = [C]_{<\nu}$.

Перейдем к другим теоремам о решетах.

К р и т е р и й б о р е л е в о с т и в н е ш н е г о м н о ж е с т в а [7]. *Пусть C — борелевское решето. Тогда для борелевости внешнего множества $[C]$ необходимо и достаточно, чтобы для некоторого числа $\nu < \omega_1$ выполнялось равенство $[C] = [C]_{<\nu}$.*

Отметим, что достаточность немедленно следует из теоремы борелевости конституант. Для внутренних множеств и аппроксимаций аналогичный критерий не имеет места: можно построить (фактически это сделано в [25]) открытое решето C такое, что $[C]_* = \mathscr{N}$ и каждая конституанта $[C]_{*\nu}$ непуста (что препятствует выполнению равенства $[C]_* = [C]_{*<\nu}$, каково бы ни было $\nu < \omega_1$).

П р и н ц и п о г р а н и ч е н и я ([11], гл. III). *Пусть снова C — борелевское решето. Тогда ко всякому Σ^1_1-множеству $Y \subseteq [C]$ найдется порядковое число $\nu < \omega_1$ такое, что $Y \subseteq [C]_\nu$.*

Из этого принципа немедленно следует критерий борелевости, а также и теорема Суслина [31] о тождественности класса Δ^1_1 классу борелевских множеств, хотя первоначально оба эти утверждения были доказаны по-другому. Но главное приложение принципа ограничения состоит в данном Н. Н. Лузиным в [11], гл. III, анализе проблемы мощности — совершенного ядра для Π^1_1-множеств. Напомним, что в классе Σ^1_1 эта проблема была исчерпывающим образом решена рассмотренной в § 2 теоремой Александрова — Хаусдорфа — Суслина.

Пусть $X = [C]$ — произвольное Π^1_1-множество, заданное открытым решетом C. С точки зрения числа непустых конституант $[C]_\nu$ и наличия несчетных конституант возможны три случая.

1) Имеется лишь счетно много непустых конституант $[C]_\nu$, и каждая из этих конституант содержит не более чем счетное множество точек. В этом случае само множество $X = \bigcup\limits_{\nu<\omega_1} [C]_\nu$ *не более чем счетно.*

2) Число непустых конституант $[C]_\nu$ несчетно (по критерию борелевости это равносильном тому, что множество X неборелевское), но каждая конституанта $[C]_\nu$ по-прежнему не более чем счетна. В этом случае X *имеет мощность* $\aleph_1$ как объединение счетных множеств в числе $\aleph_1$. Кроме того, множество X не может включать совершенного подмножества, ибо такое подмножество должно было бы быть включено в объединение некоторого счетного числа конституант, что вступает в противоречие с предположением о счетности каждой конституанты (совершенные множества в бэровских и евклидовых пространствах имеют континуальную мощность).

3) По крайней мере одна из конституант $[C]_\nu$ несчетна. По теореме борелевости конституант, $[C]_\nu$ — борелевское, а значит, и Σ^1_1-множество. Следовательно, конституанта $[C]_\nu$ включает совершенное подмножество по теореме Александрова — Хаусдорфа — Суслина. Но тогда и множество $X = [C]$ включает это совершенное подмножество, а значит, *имеет мощность континуума*.

Особый интерес из этих трех возможностей вызывала вторая из них — когда Π^1_1-множество X имеет мощность ровно $\aleph_1$ и не содержит совершенного подмножества, непустых конституант $[C]_\nu$ несчетно много и каждая из них не более чем счетна. Можно ли реализовать эту возможность на подходящем Π^1_1-множестве X (или, что эквивалентно ввиду теоремы просеивания, на подходящем открытом решете C) или же таких множеств (и решет) не существует? Проблема эта, выделенная Н. Н. Лузиным еще в заметке [2], рассматривалась, пожалуй, как центральная в классической дескриптивной теории. Мы вернемся к этой проблеме в § 6, где расскажем о более поздних исследованиях П. С. Новикова и Р. Соловея, где была установлена ее неразрешимость.

Для внутренних конституант предложение, аналогичное принципу ограничения, не имеет места, а случай, подобный случаю 2), прямо исключается следующей теоремой Е. А. Селивановского [38]: если для борелевского решета C имеется несчетно много непустых внутренних конституант $[C]_{*\nu}$, то по крайней мере одна из этих конституант несчетна.

Еще одним приложением принципа ограничения стала отмеченная Н. Н. Лузиным в [11], гл. III, *регулярность* разбиения внешнего множества на конституанты. Речь идет о следующем. Пусть C — как и выше, борелевское решето. Тогда найдется такой трансфинит $\theta < \omega_1$, при котором множество-разность

$$[C]-[C]_{<\theta}=\bigcup_{\nu\geqslant\theta}[C]_\nu$$

будет множеством первой категории. Другими словами, внешнее множество $[C]$ совпадает, с точностью до первой категории, с объединением некоторого счетного числа конституант $[C]_\nu$. Это означает, что разбиение на внешние конституанты регулярно относительно *категории*. Подобная регулярность имеет место и относительно *меры*: если задана некоторая борелевская σ-конечная (и счетно аддитивная, см. § 2) мера на рассматриваемом пространстве, то множество $[C]$ будет с точностью до множества меры 0 совпадать с объединением некоторого счетного (своего для каждой меры) семейства конституант $[C]_\nu$.

Замечательно, что разбиение внутреннего множества на внутренние конституанты также регулярно относительно категории и меры: этот факт установлен Е. А. Селивановским в [38].

Принцип сравнения индексов (П. С. Новиков, см. [51]). *Пусть C_1 и C_2 — пара борелевских решет для просеивания множеств одного пространства. Тогда множество всех точек x этого пространства, в которых выполняется неравенство* $\mathrm{Ind}_x\, C_1 \leqslant \mathrm{Ind}_x\, C_2$, *принадлежит классу* Σ^1_1.

Этот важный результат позволил исчерпывающим образом исследовать законы отделимости и редукции на первом проективном уровне. Вот содержание этих законов:

а) Для класса Σ_1^1 выполняются обе теоремы отделимости (с борелевскими множествами в качестве отделяющих множеств в первой теореме) — доказано Н. Н. Лузиным в [7] и [11], гл. III.

б) Для класса Π_1^1 выполняется теорема неотделимости (П. С. Новиков [40]) и теорема редукции (К. Куратовский [62]).

Теоремы отделимости и редукции получили разнообразные обобщения на случаи произвольного конечного и счетного числа отделяемых или редуцируемых множеств (кратные теоремы отделимости и редукции). Об этом см. в работах [18], [41], [53], [61], [63], с. 358.

§ 4. Первый проективный уровень: множества со специальными сечениями

Этот раздел дескриптивной теории особенно богат интересными результатами. Главной задачей здесь является выяснение взаимоотношений линейных и плоских множеств. *Линейными* считаются множества действительной прямой $\mathbb{R}$, реализованной в виде оси OX, либо множества бэровского пространства $\mathcal{N}$, понимаемого как «горизонтальная ось». *Плоские* же множества — это те, которые расположены в евклидовой плоскости OXY либо в бэровской плоскости $\mathcal{N}^2$.

Ниже мы будем говорить только о *бэровских* линейных и плоских множествах, указывая, однако, на те изменения, которые возникают при переходе к евклидову случаю.

Линейные и плоские множества связываются операцией проекции, понимаемой аналогично общему случаю § 2 (т. е. каждая точка плоскости $\langle x, y\rangle$ проектируется в точку x), но с элементом геометрической наглядности: проектирование на горизонтальную ось.

Теперь о сечениях. Пусть P — плоское множество; таким образом, $P \subseteq \mathcal{N}^2$. Каждая точка $x \in \mathcal{N}$ определяет вертикальное *сечение* $P_x = \{y: \langle x, y\rangle \in P\}$ множества P. Множество P_x включено в $\mathcal{N}$ и является, следовательно, линейным множеством, однако его следует представлять себе расположенным уже на вертикальной оси $\mathcal{N}$ — второй оси в произведении $\mathcal{N}^2 = \mathcal{N} \times \mathcal{N}$.

В зависимости от характера сечений P_x выделяются разные типы плоских множеств. Например, если каждое сечение P_x данного множества P содержит не более одной точки, то множество P называется *однозначным* (или униформным). Такие множества связаны с одной из важнейших в дескриптивной теории проблемой униформизации (о ней см. в § 4 статьи В. А. Успенского [132]).

4.1. Униформизация на первом проективном уровне. Напомним, что плоское множество P униформизует плоское множество Q, когда $P \subseteq Q$, множество P однозначно и его проекция (в указанном только что смысле, т. е. проекция на горизонтальную ось) совпадает с проекцией множества Q. *Теорема униформизации* для данного (например, проективного) класса K формулируется следующим образом: каждое плоское множество класса K можно униформизовать (однозначным) множеством этого же класса. Исследования по униформизации группируются, в общем, вокруг центральной задачи: доказать или опровергнуть теорему униформизации для рассматриваемого проективного класса.

Сам термин «униформизация» был введен в дескриптивную теорию Н. Н. Лузиным в работе [12], однако некоторые интересные теоремы были получены еще во второй половине 20-х годов (в несколько ином контексте: выделение однозначной ветви в данной многозначной функции). Изложение классических результатов мы начнем с «отрицательной» теоремы П. С. Новикова [40]: существует плоское замкнутое (в евклидовом случае — G_δ) множество, не допускающее униформизации множеством класса Σ_1^1. Таким образом, теорема униформизации не выполняется для классов Π_0^1 (замкнутых множеств), Δ_1^1 (борелевских множеств) и Σ_1^1 (аналитических, или A-множеств).

Напротив, как показал японский математик М. Кондо, класс Π^1_1 удовлетворяет теореме униформизации. Выкладки Кондо [72] были основаны на найденном П. С. Новиковым (см. [27]) методе эффективного выбора точки в непустом Π^1_1-множестве. Еще перед тем, как результат Кондо стал известен, П. С. Новиков [43], [44] и А. А. Ляпунов [54], [56] получили несколько важных теорем об униформизации Π^1_1-множеств и о природе проекций однозначных Π^1_1-множеств.

Вопрос униформизации Σ^1_1-множеств был изучен Н. Н. Лузиным и В. Янковым. Н. Н. Лузин установил, что каждое Σ^1_1-множество можно униформизовать множеством, конструируемым эффективно, т. е. без обращения к аксиоме выбора ([5], гл. V, [11], гл. IV). Анализируя предложенное Н. Н. Лузиным построение, В. Янков показал в [75], что всякое Σ^1_1-множество можно униформизовать множеством, представляющим собой счетное пересечение счетных объединений разностей Σ^1_1-множеств.

4.2. Однозначные и счетнозначные множества. Уже в первых работах по униформизации выявились особые свойства плоских множеств P, удовлетворяющих требованию того, чтобы каждое вертикальное сечение P_x было не более чем счетным — такие множества называются *счетнозначными*. П. С. Новиков обнаружил [40], что каждое счетнозначное множество класса Δ^1_1 (т. е. борелевское) можно униформизовать Δ^1_1-множеством, хотя, как было сказано, вообще теорема униформизации для класса Δ^1_1 не имеет места.

Своеобразие счетнозначных, а также и однозначных множеств проявилось и в связи с вопросом о *классе проекций*. Было обнаружено, что проекция каждого однозначного (Н. Н. Лузин [7]) и даже счетнозначного (П. С. Новиков [40]) множества класса Δ^1_1 необходимо будет Δ^1_1-множеством, тогда как проекции Δ^1_1-множеств (и даже замкнутых множеств) общего вида целиком заполняют более широкий, чем Δ^1_1, класс Σ^1_1. Н. Н. Лузин установил, что и, обратно, каждое линейное Δ^1_1-множество является проекцией подходящего однозначного замкнутого множества [7]. В евклидовом случае вместо замкнутых множеств следует брать множества класса Π^0_2, т. е. G_δ.

Еще две группы интересных результатов составили теоремы *накрытия* и *расщепления*. В. И. Гливенко показал [39], что любое однозначное Σ^1_1-множество можно накрыть однозначным множеством класса Δ^1_1, и в то же время существует однозначное Π^1_1-множество, не допускающее такого накрытия. Н. Н. Лузин нашел [11], гл. IV, что всякое счетнозначное Σ^1_1-множество можно накрыть счетнозначным же Δ^1_1-множеством. Позже были получены и некоторые более тонкие теоремы о накрытии (см. статью [74]).

Наконец, Н. Н. Лузин доказал в [11], гл. IV, теорему расщепления для класса Δ^1_1: всякое счетнозначное Δ^1_1-множество является объединением счетного числа однозначных множеств того же класса, и аналогичную теорему для класса Σ^1_1.

Обработка и систематическое изложение всего этого материала были осуществлены Н. Н. Лузиным в четвертой главе «Лекций» [11]. Отметим, что в доказательствах большинства приведенных в этом пункте теорем принципиальную роль играли доказанные Н. Н. Лузиным первая и вторая теоремы отделимости для класса Σ^1_1.

4.3. Другие типы сечений. В конце 30-х годов внимание специалистов привлекли плоские множества с *компактными* и *σ-компактными* сечениями (в евклидовом случае рассматривались замкнутые сечения и сечения класса F_σ). П. С. Новиков установил в [46], что проекции Δ^1_1-множеств с компактными сечениями сами имеют класс Δ^1_1. В. Я. Арсенин распространил этот результат и на множества с σ-компактными сечениями [73] (см. также [61]). В доказательствах были использованы некоторые теоремы кратной отделимости.

Дальнейшие исследования показали, что плоские Δ^1_1-множества с σ-компактными сечениями допускают униформизацию посредством (однозначного) множества класса Δ^1_1 (Е. А. Щегольков [76]) и расщепление на счетное число множеств класса Δ^1_1 с компактными сечениями (Сан Раймон [101]).

Недавно красивая теорема была получена А. Луво [118]: если $\xi < \omega_1$ и плоское Δ^1_1-множество P таково, что каждое его сечение P_x принадлежит классу $\Sigma^0_{\xi+1}$, то P можно представить как объединение счетного числа Δ^1_1-множеств, каждое сечение каждого из которых является множеством класса Π^0_ξ.

Уже в 70-е годы началось изучение множеств с «большими» — т. е. не первой категории или положительной меры — сечениями. Наиболее сильные результаты в этом направлении получены в работе [120]. Там, в частности, доказано, что Δ^1_1-множество, все непустые сечения которого суть множества не первой категории (либо положительной меры, если зафиксирована некоторая борелевская σ-конечная мера), обязательно имеет проекцию класса Δ^1_1 и допускает униформизацию посредством Δ^1_1-множества.

Еще несколько теорем об униформизации посредством Δ^1_1-множеств приведено в [106] (где униформизующие множества называются *селекторами*).

§ 5. Теория операций над множествами. C-множества и R-множества. Второй проективный уровень

В пятой главе книги [11], изложив определение проективных множеств, Н. Н. Лузин выдвинул следующую общую задачу: выяснить, сохраняют ли силу на втором и более высоких уровнях проективной иерархии теоремы, доказанные к тому времени для первого уровня, такие как теоремы отделимости или теоремы об однозначных и счетнозначных множествах. В начале 30-х годов даже о втором проективном уровне мало что было известно — в сущности, только то, что каждое Σ^1_2-множество есть сумма $\aleph_1$ борелевских множеств, однако, в отличие от аналогичных разбиений Σ^1_1-множеств и Π^1_1-множеств, регулярность относительно меры и категории (см. § 3) для разбиений Σ^1_2-множеств не была установлена. А вопросы об измеримости, свойстве Бэра, свойстве совершенного ядра, как и проблемы, относящиеся к отделимости, специальным сечениям и др., оставались открытыми, и ситуация, как писал Н. Н. Лузин в [19], п. 23, казалась вообще безнадежной.

Проблемы свойств регулярности так и не удалось решить для множеств второго проективного уровня, а позже усилиями П. С. Новикова и Р. Соловея (см. следующий параграф) было установлено, что решение здесь вообще невозможно найти в рамках обычных математических средств. Правда, уже в 20-е годы стали известны два важных вида Δ^1_2-множеств, для которых проблемы измеримости и свойства Бэра оказалось возможным решить положительно: это C-множества и R-множества.

C-множества, введенные Е. А. Селивановским (см. работу [37], где указано, что идеей этих множеств Е. А. Селивановский обязан Н. Н. Лузину), составляют наименьший класс множеств рассматриваемого пространства, замкнутый относительно операции просеивания через решета этого класса (или, что эквивалентно, относительно A-операции) и операции взятия дополнения и содержащий все открытые множества.

Е. А. Селивановский доказал, что все C-множества абсолютно измеримы и обладают свойством Бэра. Подобно борелевским множествам, C-множества образуют иерархию расширяющихся классов, индексированных натуральными и счетными порядковыми числами. Классы этой иерархии обозначаются через C_ξ, CC_ξ и BC_ξ, где $1 \leqslant \xi < \omega_1$. Начальный класс C_1 включает все внутренние множества решет, составленных из открытых множеств данного пространства. При любом ξ класс CC_ξ состоит из дополнений множеств класса C_ξ, а класс BC_ξ представляет собой общую часть C_ξ и CC_ξ. Наконец, при $\xi \geqslant 2$ к классу C_ξ относятся все внутренние множества решет, элементы которых являются множествами из $\bigcup\limits_{1 \leqslant \eta < \xi} CC_\eta$. Е. А. Селивановским установлено в [37], что классы этой иерархии, подобно борелевским и проективным классам, действительно расширяются с возрастанием индекса ξ и охватывают все C-множества.

Законы отделимости в иерархии C-множеств были открыты П. С. Новиковым в [45]. Оказалось, что каждый класс C_ξ удовлетворяет обеим теоремам отделимости, а каждый класс CC_ξ — теореме неотделимости. Как показали Л. В. Канторович и Е. М. Ливенсон в [52], все C-множества принадлежат проективному классу Δ^1_2, но не исчерпывают его. Более широкую часть Δ^1_2 образуют R-множества, открытые А. Н. Колмогоровым при разработке теории операций над множествами. Изложим некоторые положения последней.

Пусть зафиксировано множество индексов I (как правило, счетное; в принципе можно считать, что $I = \omega$, но обычно применяются более сложные индексные множества, лучше раскрывающие существо рассматриваемых операций). Элементы множества I называются индексами, множества индексов — цепями, а множества цепей — базами. Каждая база B задает операцию Φ_{IB}, сопоставляющую всякому I-индексированному семейству $\langle X_i\colon i \in I\rangle$ множество $\Phi_{IB}\langle X_i : i \in I\rangle = \bigcup\limits_{u \in B} \bigcap\limits_{i \in u} X_i$. Операции такого вида называются δs-операциями.

К этой категории операций относятся операции объединения $\bigcup\limits_I$ и пересечения $\bigcap\limits_I$ для I-индексированных семейств. Базой первой из них можно взять множество всех одноэлементных цепей $\{i\}$, где $i \in I$, а база второй содержит единственную цепь $u = I$. Сюда же относится и A-операция П. С. Александрова [29], индексным множеством которой служит множество всех кортежей $\langle a_1, \ldots, a_m\rangle$ произвольной конечной длины $m \geqslant 1$, составленных из натуральных чисел a_k, а база образована цепями вида

$$u = \{\langle a_1\rangle, \langle a_1, a_2\rangle, \langle a_1, a_2, a_3\rangle, \langle a_1, a_2, a_3, a_4\rangle, \ldots\},$$

где $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ — произвольные натуральные числа.

А. Н. Колмогоровым были указаны следующие общие способы построения δs-операций из уже имеющихся операций:

1) Дополнительная операция. Для данной δs-операции $\Phi = \Phi_{IB}$ вводится дополнительная δs-операция Φ^c:

$$\Phi^c\langle X_i\colon i \in I\rangle = C\Phi\langle CX_i\colon i \in I\rangle.$$

(Через CX обозначается дополнение множества X. Предполагаем, что все множества X_i расположены в некотором фиксированном пространстве, относительно которого и берется дополнение.) Базой операции Φ^c может служить множество B^c всех цепей $v \subseteq I$, непусто пересекающихся с каждой цепью $u \in B$. Операции $\bigcup\limits_I$ и $\bigcap\limits_I$ взаимно дополнительны.

2) Композиция. Пусть задана δs-операция $\Phi = \Phi_{IB}$, а каждому $i \in I$ сопоставлена δs-операция $\Phi_i = \Phi_{I_i B_i}$. В этом случае можно определить новую δs-операцию Ψ с индексным множеством $J = \{\langle i, j\rangle\colon i \in I$ и $j \in I_i\}$, действующую следующим образом:

$$\Psi\langle X_{ij}\colon \langle i, j\rangle \in J\rangle = \Phi\langle\Phi_i\langle X_{ij}\colon j \in I_i\rangle\colon i \in I\rangle.$$

База операции Ψ составлена из всех цепей $v \subseteq J$ вида

$$v = \{\langle i, j\rangle\colon i \in u \text{ и } j \in u_i\},$$

где $u_i \in B_i$ для всех $i \in u$, а $u \in B$.

В случае, когда внешняя операция Φ есть $\bigcap\limits_I$, результирующую операцию Ψ уместно обозначить через $\bigcap\limits_{i \in I}\Phi_i$.

3) R-преобразование. По данной δs-операции $\Phi = \Phi_{IB}$ конструируется новая δs-операция $R\Phi$ с индексным множеством RI, образованным всевозможными кортежами $\langle i_1, \ldots, i_m\rangle$ индексов $i_k \in I$. Ее база RB

состоит из всех цепей, которые получаются в ходе построения, похожего на проведенную ω раз композицию. Именно, возьмем некоторую цепь $u \in B$ и каждому кортежу $\langle i_1, \ldots, i_m \rangle \in RI$ сопоставим также некоторую цепь $u_{i_1 \ldots i_m} \in B$. Зачислим в новую цепь v все кортежи $\langle i_1, \ldots, i_n \rangle \in RI$, удовлетворяющие требованиям: $i_1 \in u$ и $i_{m+1} \in u_{i_1 \ldots i_m}$ для любого m, $1 \leqslant m < n$. База RB включает все даваемые этим построением цепи v.

Можно показать, что действие так определенной операции $R\Phi$ совершенно не зависит от выбора конкретной базы B исходной операции Φ, и поэтому обозначение $R\Phi$ без указания на базу B употребляется вполне корректно. Сказанное относится и к обозначениям Φ^c и $\bigcap_{i \in I} \Phi_i$.

Операция $R\Phi$ значительно сильнее операции Φ: любое множество, которое можно получить счетнократным применением Φ в чередовании с дополнением из, скажем, открыто-замкнутых множеств бэровского пространства (или множеств любого другого достаточно «хорошего» семейства), может быть получено всего лишь однократным применением $R\Phi$, причем этим вторым способом получаются и такие множества, которые нельзя получить первым. На этом основана идея нормального ряда R-операций. Этот ряд образован операциями R_ξ и дополнительными к ним операциями R_ξ^c, $1 \leqslant \xi < \omega_1$. Начальной операцией R_1 берется A-операция, а при $\xi \geqslant 2$ определяют $R_\xi = R(\bigcap_{1 \leqslant \eta < \xi} R_\eta^c)$. Отметим, что сама A-операция тождественна R-преобразованию операции $\bigcup_\omega$. Операции R_ξ называются R-операциями.

Через R_ξ обозначается также класс всех множеств, которые можно получить из открытых множеств данного пространства однократным применением операции R_ξ. Далее, CR_ξ — класс всех дополнительных множеств (равный классу тех множеств, которые можно получить операцией R_ξ^c над замкнутыми множествами), а BR_ξ — общая часть классов R_ξ и CR_ξ. Определенные таким образом классы R_ξ, CR_ξ, BR_ξ составляют иерархию R-множеств; R-множеством называется множество, принадлежащее одному из этих классов.

Вся теория δs-операций происходит из двух работ А. Н. Колмогорова, выполненных в начале 20-х годов. В одной из этих работ — статье [36] — А. Н. Колмогоров ввел изложенные здесь понятия, кроме связанных с R-преобразованием, и показал, что с помощью любой δs-операции можно построить иерархию точечных множеств, подобную борелевской или C-иерархии, причем при выполнении определенных требований классы такой иерархии будут расширяться на каждом шаге построения. В другой из упомянутых работ А. Н. Колмогорова — неопубликованном исследовании 1922 г. (см. об этом в [57], введение, или [60], с. 208) было введено R-преобразование и производные от него R-операции и R-множества.

Идеи А. Н. Колмогорова в области операций над множествами получили дальнейшее развитие в более детальных изысканиях других специалистов. Хаусдорф установил, что ко всякому борелевскому классу $\Gamma = \Sigma_\xi^0$ или Π_ξ^0 существует δs-операция Φ, дающая — при однократном применении к открыто-замкнутым множествам данного бэровского пространства — все множества класса Γ, и только эти множества ([66], § 19). Как указано в предисловии к фундаментальному мемуару Л. В. Канторовича и Е. М. Ливенсона [52], ч. I, такие операции имеются и для проективных классов $\Gamma = \Sigma_n^1$ и Π_n^1 (а также для тех классов, которыми проективная иерархия естественно продолжается на трансфинитные нижние индексы). В главе III этого же мемуара впервые опубликовано определение R-преобразования (с указанием на принадлежность этого понятия А. Н. Колмогорову) и получен результат (теорема XXX), из которого следует, что все R-множества принадлежат классу Δ_2^1. Совсем недавно удалось доказать, что R-множества образуют собственную часть класса Δ_2^1 (см. [107]).

Глубокое исследование R-множеств было предпринято А. А. Ляпуновым. Изложив в работе [57] построение R-операций и R-множеств, А. А. Ляпунов показал, что R-множества могут быть получены и другим путем — с помощью открытых им T-операций. В этой же работе приведены доказательства теорем об абсолютной измеримости и свойстве Бэра для R-множеств (А. А. Ляпунов отмечает в предисловии, что еще раньше эти результаты были получены А. Н. Колмогоровым в упоминавшейся неопубликованной работе) и о том, что каждое R-множество допускает регулярное относительно меры и категории разбиение на $\aleph_1$ борелевских множеств. Там же в [57] А. А. Ляпуновым построена теория индексов для R-операций, позволившая доказать теоремы отделимости для классов R_ξ и теорему неотделимости для CR_ξ, и рассмотрено действие R-операций на R-множества определенных уровней, показавшее, в частности, что при любом $\xi \geqslant 2$ класс BR_ξ включает все множества класса $R_{<\xi}$, т.е. наименьшего класса, содержащего все открыто-замкнутые множества и замкнутого относительно операции дополнения и всех операций R_η и R^c_η, $1 \leqslant \eta < \xi$, и не исчерпывается ими. Подробнее об исследованиях по R-множествам см. [57], [59], [60].

C-множества и R-множества, занимая своеобразное «промежуточное» положение между первым и вторым проективными уровнями, тяготеют, пожалуй, к первому уровню с точки зрения результатов и применяемой техники. Серьезные исследования множеств второго уровня проективной иерархии во всей общности были открыты работой П. С. Новикова [42] по проблеме отделимости. Результат получился, как сказано Н. Н. Лузиным в [19], совершенно неожиданный: обе теоремы отделимости выполняются для класса Π^1_2, а теорема неотделимости — для класса Σ^1_2, т.е. наоборот по сравнению с первым уровнем. Для доказательства этого результата П. С. Новиков разработал аппарат минимального индекса, нашедший затем многочисленные применения в изысканиях по проективным множествам.

Теорема униформизации Новикова — Кондо (см. п. 4.1) сильно упрощает и тривиализирует некоторые свойства множеств со специальными сечениями на втором проективном уровне. Именно, проекции однозначных плоских Π^1_1-множеств целиком заполняют класс Σ^1_2, так что здесь нет ничего похожего на интересную группу результатов о проекциях, приведенных в § 4.

Иначе решаются и проблемы накрытия и расщепления. Существует счетнозначное Σ^1_2-множество, не допускающее накрытия никаким счетнозначным множеством класса Π^1_2, и существует счетнозначное Π^1_2-множество, не являющееся счетной суммой однозначных множеств класса Σ^1_2 (см. [128], § 2). Сама же теорема униформизации выполняется для класса Σ^1_2, но не для Π^1_2 ([125], с. 258).

§ 6. Трудности классической теории проективных множеств. Поиск новых путей. Главные направления современного развития дескриптивной теории

Итак, классические исследования проективных множеств ограничились, по существу, только множествами первого и второго уровня проективной иерархии. Более сложные проективные множества (а в отношении многих вопросов — и множества второго уровня, и даже Π^1_1-множества) не поддавались усилиям исследователей. Комментируя в заключении к книге [11] сложившуюся к тому времени в дескриптивной теории множеств ситуацию, Н. Н. Лузин писал:

«Только два случая возможны. Или дальнейшие исследования приведут когда-либо к точным соотношениям между проективными множествами, а также к полному решению вопросов относительно меры, категории и мощности этих множеств... Или указанные проблемы ... останутся навсегда нерешенными, и к ним добавится множество новых проблем, столь же естественных и столь же недоступных. В этом случае ясно, что пришло время провести реформу в наших идеях об арифметическом континууме».

Сейчас уже совершенно ясно, что выполняется как раз вторая из указанных Н. Н. Лузиным альтернативных возможностей. Установлено, что многие проблемы дескриптивной теории (в частности, проблемы измеримости, свойства Бэра и совершенного ядра для проективных множеств) в самом деле нельзя решить при традиционном понимании слов «решить проблему», т.е. с помощью стандартных математических средств и способов рассуждений невозможно дать определенный ответ «да» или «нет» на поставленные вопросы.

Та «реформа» дескриптивной теории, на неизбежность и необходимость которой указывал Н. Н. Лузин в 1930 г., успешно развивается в современных исследованиях по двум главным направлениям, тесно взаимодействующим между собой: это *использование дополнительных аксиом* и *доказательства непротиворечивости*.

Специалистами по математической логике и теории множеств разработано несколько аксиоматических теоретико-множественных систем. Наибольшее признание из них получила теория Цермело — Френкеля ZFC, включающая аксиому выбора AC и, как принято считать, адекватно формализующая все используемые способы математических рассуждений. После разработки этой аксиоматической теории стало возможным в математически точном смысле ставить и решать вопросы о выводимости, непротиворечивости, неразрешимости тех или иных утверждений о множествах. И если мы знаем (или предполагаем с достаточными основаниями), что средствами ZFC невозможно решить большое число проблем из той или иной области (скажем, проблем о проективных множествах), то вполне естественно будет попытаться исправить дело использованием какой-либо новой аксиомы, не входящей в рамки системы Цермело — Френкеля. К такой новой аксиоме предъявляются три главных требования: 1) быть непротиворечивой (т.е. не вступать в противоречие с аксиомами ZFC), 2) быть достаточно приемлемой с точки зрения математической эстетики и интуиции множества и 3) давать решение значительному числу проблем.

В сущности, не так уж много дополнительных аксиом заслужило признание в дескриптивной теории. Это прежде всего аксиома конструктивности вместе с ее вариантами, аксиома детерминированности и ее ослабленные формы, а также, в меньшей степени, аксиома измеримого кардинала и аксиома Мартина.

6.1. Конструктивность. К. Гёдель ввел в [78] понятие *конструктивного* множества, называя так каждое множество, которое допускает трансфинитное построение некоторого специального вида. Он же сформулировал *аксиому конструктивности*, постулирующую конструктивность каждого множества и обозначаемую посредством равенства $V = L$ (V — обычный символ для обозначения класса всех множеств, а через L обозначают класс всех конструктивных множеств).

В работе [78] показано, что аксиома конструктивности влечет обобщенную континуум-гипотезу. В доказательстве этого положения не используется аксиома выбора — более того, сама эта аксиома вытекает из аксиомы $V = L$.

П. С. Новиков получил в [47] приложения конструктивности к проблемам дескриптивной теории. Оказалось, что аксиома $V = L$ влечет:

1) существование несчетного $\mathbf{\Pi}^1_1$-множества, не имеющего совершенных подмножеств;

2) существование $\mathbf{\Delta}^1_2$-множества действительных чисел, не обладающего свойством Бэра и неизмеримого по Лебегу;

3) выполнение теорем отделимости для класса $\mathbf{\Pi}^1_n$ и теоремы неотделимости для класса $\mathbf{\Sigma}^1_n$ при любом $n \geqslant 3$.

Позже Дж. Аддисон показал, что из $V = L$ следует теорема редукции [80], а также и теорема униформизации для каждого класса $\mathbf{\Sigma}^1_n$, $n \geqslant 3$. Автором настоящего обзора получено еще несколько следствий аксиомы конструктивности: в частности, утверждение о том, что при любом $n \geqslant 3$ существует плоское счетнозначное Π^1_{n-1}-множество, не являющееся счетной суммой однозначных Σ^1_n-множеств [128].

В целом же аксиома конструктивности делает все проективные уровни, начиная с третьего, очень похожими на второй уровень — это хорошо видно из сравнения приведенных здесь результатов с теми, о которых было сказано в § 5.

6.2. Аксиома измеримого кардинала. Так называется и обозначается аббревиатурой MC утверждение о существовании несчетного множества, на алгебре всех подмножеств которого можно задать нетривиальную счетно аддитивную двузначную меру ([125], с. 261). Аксиома MC дает несколько следствий в дескриптивной теории, противоположных следствиям аксиомы конструктивности. Так, Р. Соловей доказал в [86], что аксиома измеримого кардинала влечет абсолютную измеримость, свойство Бэра и свойство совершенного ядра для всех множеств класса Σ^1_2. Р. Мэнсфилд вывел из MC утверждение о том, что каждое плоское Π^1_2-множество можно униформизовать множеством класса Π^1_3 [92].

Множество, о котором идет речь в формулировке MC (если оно существует — факт его существования невозможно доказать в ZFC, однако это признается весьма правдоподобным), должно иметь чрезвычайно большую мощность, но это, как видно, не мешает аксиоме измеримого кардинала давать интересные следствия для таких сравнительно «малых» объектов, как множества действительных чисел. По существу же, все известные приложения MC к дескриптивной теории выводятся не из самой этой аксиомы, а из одного из следующих двух предложений, являющихся следствиями MC:

(*) Для всякого множества $u \subseteq \omega$ (где ω — натуральный ряд) имеется лишь счетное число множеств $v \subseteq \omega$, конструктивных относительно u.

(**) («Гипотеза диезов».) Ко всякому $u \subseteq \omega$ существует множество натуральных чисел, обозначаемое через $u^\#$ и некоторым естественным образом кодирующее истинность в классе $L[u]$ всех множеств, конструктивных относительно u.

Приведенный только что результат Соловея [86] доказан именно через посредство (*) по схеме: MC $\to$ (*) $\to$ абсолютная измеримость, свойство Бэра и свойство совершенного ядра для всех Σ^1_2-множеств. Интересно, что предложение (*) не только достаточно, но и необходимо для наличия свойства совершенного ядра у всех Σ^1_2-множеств (и даже у Π^1_1-множеств): это установлено В. А. Любецким (см. [93]).

6.3. Аксиома Мартина. Эта аксиома, обозначаемая через MA, весьма популярна в некоторых разделах топологии (см., например, обзор [134]), но мало что дает для проективных множеств. Можно упомянуть только то, что MA плюс неравенство $\mathfrak{c} > \aleph_1$ (выражающее отрицание континуум-гипотезы) влечет абсолютную измеримость и свойство Бэра для всех Σ^1_2-множеств [88].

Вместе с тем аксиома Мартина приносит массу интересных следствий в том специфическом разделе дескриптивной теории, где изучаются трансфинитные построения с помощью аксиомы выбора (см. ниже п. 7.4 и § 9). В этой же области находит применения и континуум-гипотеза $\mathfrak{c} = \aleph_1$, которую также можно рассматривать как своеобразную дополнительную аксиому. Кстати, аксиома MA (мы опускаем здесь ее довольно громоздкую формулировку, сославшись на [125], гл. 6) следует из континуум-гипотезы и поэтому обычно рассматривается в соединении с неравенством $\mathfrak{c} > \aleph_1$.

6.4. Детерминированность. Аксиомы, связанные с этим понятием, привлекают наибольшее внимание специалистов по дескриптивной теории в последние 15—20 лет.

Пусть зафиксировано некоторое множество A точек бэровского пространства $\mathcal{N}$. Такое множество определяет игру $G(A)$ двух лиц I и II, состоящую в следующем:

игрок I пишет натуральное число a_1;
игрок II, зная «ход» a_1, пишет свое натуральное число a_2;
снова игрок I, зная a_2, пишет натуральное a_3;
игрок II, зная a_3, пишет a_4;
и так далее. В результате этой партии получается точка $\alpha = \langle a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots \rangle \in \mathcal{N}$. Если точка α принадлежит множеству A, то результат считается выигрышем игрока I, а в противном случае — выигрышем игрока II.

Множество A называется *детерминированным*, если один из игроков имеет в описанной игре выигрывающую стратегию, т.е. правило выбора очередного хода в зависимости от предшествующих ходов противника, руководствуясь которым, данный игрок выигрывает, какие бы ходы ни делал противник.

Д. Мартин установил [89], что детерминированными будут все борелевские множества $A \subseteq \mathcal{N}$. И это, пожалуй, наилучший возможный результат, ибо гипотезу Σ^1_1-Det о детерминированности всех Σ^1_1-множеств (как и эквивалентную ей Π^1_1-Det) невозможно доказать в ZFC. Вместе с тем гипотеза Σ^1_1-Det следует из аксиомы измеримого кардинала МС и эквивалентна упоминавшейся в п. 6.2 «гипотезе диезов», а также утверждению о том, что любые два неборелевских Σ^1_1-множества борелевски изоморфны. Об этом см. подробнее в работах [90], [103], [121].

Наибольшего внимания среди «гипотез детерминированности» у специалистов по дескриптивной теории заслужили: *аксиома детерминированности* AD, постулирующая детерминированность всех множеств $A \subseteq \mathcal{N}$, и *аксиома проективной детерминированности* PD, постулирующая детерминированность каждого проективного множества $A \subseteq \mathcal{N}$.

Аксиома AD влечет абсолютную измеримость, свойство Бэра и свойство совершенного ядра для всех множеств и потому противоречит аксиоме выбора AC [83], [85] — собственно, она и была предложена Мычельским и Штейнгаузом [82] в качестве альтернативы к аксиоме выбора. Более ограниченная аксиома проективной детерминированности PD дает указанные свойства только для проективных множеств и, как кажется, не противоречит аксиомам ZFC (см. следующий пункт). Вместе с тем аксиома PD имеет замечательные следствия в области структурной теории проективных классов, например, теоремы отделимости для классов Σ^1_{2n+1} и Π^1_{2n+2} и теоремы неотделимости, редукции и униформизации для классов Π^1_{2n+1} и Σ^1_{2n+2} при любом n [81], [96].

Говоря в целом, аксиома PD делает все нечетные уровни проективной иерархии похожими по своим свойствам на первый уровень, а все четные уровни — на второй уровень. Этот феномен распространения с шагом 2 классических свойств первого и второго уровней на более высокие проективные уровни наблюдается и в отношении теорем о множествах со специальными сечениями [97], [131].

Вместе с тем ряд красивых результатов (среди них — обобщение на нечетные уровни теоремы М. Я. Суслина [31] о тождественности класса Δ^1_1 классу всех борелевских множеств, см. [97], гл. 7) удалось доказать с помощью только полной аксиомы детерминированности AD. В рассуждениях, включающих AD, роль «базовой» теории множеств играет не теория ZFC, а теория ZF + DC, получающаяся заменой в ZFC аксиомы выбора принципом зависимого выбора DC — своеобразным вариантом счетной аксиомы выбора, достаточным для вывода таких «позитивных» следствий AC, как счетность счетной суммы счетных множеств или счетная аддитивность меры Лебега.

Все эти изыскания были завершены во второй половине 70-х годов построением в рамках систем ZF + DC + AD и ZFC + PD достаточно полной теории проективных множеств, решающей практически все главные проблемы о проективных множествах, перед которыми остановилась классическая дескриптивная теория. Более поздние исследования по детерминированности уже сильно отклоняются от классической тематики, и в их отношении мы ограничимся ссылкой на статью [123], ряд работ, опубликованных в сборниках [114], [115], [116], и обзор [136].

6.5. Доказательства непротиворечивости. В теории множеств разработано два главных метода проведения доказательств непротиворечивости утверждений о множествах. Первый метод состоит в выводе рассматриваемого утверждения из дополнительной аксиомы, непротиворечивость которой уже является установленным фактом. Именно таким образом К. Гёдель доказал в [78] непротиворечивость обобщенной континуум-гипотезы GCH: во-первых, он установил, что аксиома конструктивности $V = L$ не противоречит аксиомам ZFC, а во-вторых, представил вывод GCH из аксиомы $V = L$.

Точно так же — посредством вывода из $V = L$ — П. С. Новиков доказал в [47] непротиворечивость утверждений 1), 2), 3) из п. 6.1.

Непротиворечивость нередко доказывается и выводом из конъюнкции: аксиома Мартина MA $+ \mathfrak{c} > \aleph_1$ (отрицание континуум-гипотезы). То, что MA $+ \mathfrak{c} > \aleph_1$ не противоречит аксиомам ZFC, установлено Р. Соловеем и С. Тенненбаумом (см. [125], гл. 4, § 6).

Аксиома измеримого кардинала MC относится к группе так называемых *аксиом больших кардиналов*, постулирующих существование чрезвычайно больших мощностей. Непротиворечивость такого рода аксиом невозможно строго доказать — но она может рассматриваться как факт, в некотором роде экспериментальный, поскольку интенсивная деятельность по выводу следствий из аксиом ZFC + MC не привела пока к противоречию. На основании этого же довода считаются непротиворечивыми системы ZFC + PD и ZF + + DC + AD с аксиомами детерминированности.

Некоторые крупные специалисты по дескриптивной теории склонны рассматривать аксиому MC и аксиомы детерминированности как положения, истинные в мире «настоящих» множеств или в некоторых частях последнего, приводя ряд разумных доводов в пользу такого подхода (см. [97], заключение, [98], [125], гл. 1 и гл. 8, § 6, [129], [131]). В таком же плане трактуются и следствия указанных аксиом.

Вместе с тем аксиомы больших кардиналов и аксиомы AD и PD считаются слишком трансцендентными средствами для «просто» доказательств непротиворечивости.

Другой метод доказательства непротиворечивости был открыт П. Коэном [84] — это *метод вынуждения*, состоящий в прямом построении моделей теории множеств. Для теории проективных множеств наиболее важное значение имеют две модели, построенные с помощью метода вынуждения А. Леви и Р. Соловеем (см. [87]). В первой из этих моделей выполняются все аксиомы ZFC, и в то же время истинно, что каждое проективное множество абсолютно измеримо, имеет свойство Бэра и свойство совершенного ядра.

Существованием такой модели доказывается то, что утверждение об абсолютной измеримости, свойстве Бэра и свойстве совершенного ядра для всех проективных множеств не противоречит аксиомам ZFC. Но в силу сказанного выше в этом пункте и изложенных в п. 6.1 результатов П. С. Новикова утверждения о существовании проективных множеств (даже определенных классов — $\mathbf{\Delta}^1_2$, $\mathbf{\Pi}^1_1$), не обладающих указанными свойствами регулярности, также непротиворечивы. Таким образом, проблемы измеримости, свойства Бэра и свойства совершенного ядра для проективных множеств *неразрешимы* в рамках аксиом ZFC.

Отметим, что этот результат о неразрешимости был предсказан Н. Н. Лузиным еще в 1925 г. (работа [4]), т. е. почти за полстолетия до того, как его удалось окончательно доказать.

Во второй модели Леви — Соловея выполняются все аксиомы системы ZF + DC (но не полная аксиома выбора), и в то же время в ней всякое вообще (не обязательно проективное) множество абсолютно измеримо и т. п. Отсюда видно, что аксиома выбора в несчетной форме совершенно необходима для построения таких «сингулярных» множеств, как, например, неизмеримые по Лебегу множества.

Ряд интересных результатов о непротиворечивости и неразрешимости предложений дескриптивной теории удалось получить с помощью других моделей. Но некоторые важные вопросы все еще остаются открытыми (см. [128], п. 7).

Заканчивая обзор главных направлений и подходов в современной дескриптивной теории множеств, подчеркнем, что именно классические исследования Н. Н. Лузина, его учеников и последователей стали отправным пунктом последующего развития. Действительная ценность той или иной новой концепции или метода в дескриптивной теории проверялась прежде всего на том, как много дает этот метод для решения классических проблем. В следующих трех параграфах мы уже более подробно рассмотрим некоторые разделы современных изысканий, характеризующиеся, с одной стороны, связью с результатами, полученными Н. Н. Лузиным, и поставленными им проблемами, а с другой стороны — большим вниманием со стороны специалистов.

§ 7. Проблемы Лузина о последовательностях конституант

Одним из главных направлений творчества Н. Н. Лузина в 30-е годы становится анализ трудностей, лежащих на пути к решению таких важнейших проблем теории множеств, как проблема континуума, проблема мощности Π_1^1-множеств, проблема эффективного построения множества, содержащего ровно $\aleph_1$ точек. Инструментом своего анализа Н. Н. Лузин избрал последовательности конституант. Им было получено несколько интересных результатов, касающихся положения конституант в борелевской иерархии. Но главным итогом лузинских исследований этого цикла явилась постановка проблем о существовании решет с определенными свойствами конституант и, в более общем плане, о существовании «эффективных» несчетных последовательностей борелевских множеств, удовлетворяющих определенным условиям. Этим проблемам и посвящен настоящий параграф.

7.1. Проблемы о внешних конституантах. Начнем мы с серии из четырех проблем, сформулированных Н. Н. Лузиным в [19], п. 1, и [20], п. 1. Эти проблемы приводятся здесь в том порядке и с той нумерацией, которые им пожелал придать Н. Н. Лузин в указанных трудах.

Проблема I. Существует ли открытое решето C такое, что каждая конституанта $[C]_\nu$ содержит ровно одну точку?

Проблема II. Существует ли неограниченное открытое решето C такое, что каждая конституанта $[C]_\nu$ не более чем счетна?

Решето C называется *неограниченным*, если оно имеет несчетно много непустых внешних конституант $[C]_\nu$. Для открытых (а также и для борелевских) решет требование неограниченности равносильно требованию неборелевости внешнего множества (см. § 3).

Требования, предъявляемые к решету проблемой II, слабее требований, предъявляемых проблемой I, в двух отношениях: во-первых, условие непустоты каждой внешней конституанты, подразумеваемое требованием одноэлементности, заменяется условием непустоты несчетного числа (но не обязательно всех) конституант, и, во-вторых, условие «содержать не более одной точки», подразумеваемое тем же требованием, заменено условием «содержать не более чем счетное множество точек». Принципиальную роль в определении статуса этих проблем играет первый момент, второй же является малосущественным. Можно сформулировать следующую «промежуточную» проблему.

Проблема Iа. Существует ли неограниченное открытое решето C такое, что каждая конституанта $[C]_\nu$ содержит не более одной точки?

П. С. Новиков установил в [44], что проблема Ia эквивалентна проблеме II в том смысле, что из существования решета, удовлетворяющего требованиям одной из этих проблем, логически вытекает существование решета, удовлетворяющего требованиям другой проблемы. (Нетривиальную часть представляет здесь переход от проблемы II к проблеме Ia, и именно это было выполнено П. С. Новиковым.)

Но вернемся к проблемам из лузинских работ [19], [20]. Продолжая дальше ослаблять требования, предъявляемые к решету, Н. Н. Лузин формулирует следующие две проблемы.

Проблема III. Существует ли открытое неограниченное решето C такое, что внешние конституанты $[C]_\nu$ образуют ограниченную по рангу последовательность?

Проблема IV. Существует ли открытое неограниченное решето C такое, что конституанты $[C]_\nu$ можно заключить в попарно непересекающиеся борелевские множества, образующие ограниченную по рангу последовательность?

Ранг (по Лузину — класс) борелевского множества X определяется равным наименьшему числу $\xi < \omega_1$ такому, что X принадлежит классу Δ^0_ξ борелевской иерархии. Таким образом, ранг в определенном смысле характеризует положение данного борелевского множества в борелевской иерархии. Семейство, состоящее из борелевских множеств, *ограничено по рангу*, когда существует один трансфинит $\zeta < \omega_1$ такой, что каждое множество данного семейства имеет ранг, меньший ζ. Ограниченным по рангу будет, в частности, любое семейство, состоящее из не более чем счетных точечных множеств, ибо каждое такое множество принадлежит классу F_σ (т. е. Σ^0_2) и имеет вследствие этого ранг не более чем 3.

Связанная с «ограниченной проблемой Лебега» проблема III (см. об этом в § 5 статьи В. А. Успенского [132]) в особенности привлекала внимание Н. Н. Лузина. В лузинских работах сформулировано несколько вариантов проблемы III, из которых мы приведем здесь два вопроса, присвоив им номера III-А и III-Б.

Проблема III-А ([13], п. 1). Существует ли открытое неограниченное решето C, среди непустых внешних конституант которого можно выбрать несчетное семейство ограниченного ранга?

Отметим, что здесь не требуется, чтобы семейство всех внешних конституант $[C]_\nu$ было семейством ограниченного ранга.

Проблема III-Б ([14], п. 6). Существует ли открытое решето C такое, что каждая конституанта $[C]_\nu$ непуста, и среди множеств $[C]_\nu$ можно выбрать несчетное семейство ограниченного ранга?

Вполне уместно будет прибавить еще один вариант проблемы III.

Проблема III-В. Существует ли открытое решето C такое, что все конституанты $[C]_\nu$ непусты и образуют ограниченную по рангу последовательность?

Естественно, подобные модификации можно рассматривать и для проблем II и IV. А вот проблема I сама является «вариантом В» более слабой проблемы Ia.

7.2. «Основная проблема теории аналитических совокупностей». Проблема с таким названием сформулирована Н. Н. Лузиным в работе [17], п. 5. Состоит она в следующем:

Существует ли открытое решето C такое, что среди конституант $[C]_\nu$ и $[C]_{*\nu}$ (вместе взятых) несчетно много непустых, и все множества $[C]_\nu$ и $[C]_{*\nu}$ вместе образуют ограниченную по рангу совокупность?

В отличие от проблем, рассмотренных в предыдущем пункте, эта проблема связана с лузинской «ограниченной проблемой континуума», которая, напомним, состоит в требовании эффективно разбить континуум (понимаемый как действительная прямая либо как бэровское пространство) на $\aleph_1$ непустых борелевских множеств ограниченного ранга (см. § 2 статьи

В. А. Успенского [132]). Решето C, удовлетворяющее требованиям «основной проблемы теории аналитических совокупностей», немедленно принесло бы нам искомое разбиение, поскольку внешние и внутренние конституанты $[C]_\nu$ и $[C]_{*\nu}$, взятые вместе, попарно не пересекаются, а в объединении дают все точки рассматриваемого пространства.

7.3. Решение проблем. Сначала приведем несколько классических результатов. Проблема II эквивалентна проблеме существования несчетного Π^1_1-множества без совершенного ядра — об этом факте, найденном Н. Н. Лузиным ([11], гл. III), мы уже говорили в § 3.

П. С. Новиков показал в [44], что проблема Iа также эквивалентна проблеме существования несчетного Π^1_1-множества без совершенного ядра, а значит, эквивалентна и проблеме II.

А. А. Ляпунов [56] установил, что положительное решение проблемы II вытекало бы из утверждения о существовании неограниченного открытого решета, все внешние конституанты которого замкнуты.

Е. А. Селивановский получил [38] такой результат: если каждая внутренняя конституанта открытого решета не более чем счетна, то существует лишь счетно много непустых внутренних конституант. Другими словами, аналог проблемы II для внутренних конституант решается отрицательно.

Сам Н. Н. Лузин в связи с проблемами III и IV провел исследование специального класса универсальных открытых решет и обнаружил, что решета этого класса не могут дать положительного решения этих проблем (см. [11], гл. III, [13], [19], [20]). Оказалось, что ранги конституант $[C]_\nu$ таких решет C монотонно стремятся к трансфиниту ω_1, когда ν возрастает до ω_1. Побочным результатом этих лузинских изысканий явилось эффективное построение в [14] трансфинитной последовательности из $\aleph_1$ борелевских множеств, содержащей множества сколь угодно высоких рангов (фактически всех четных рангов). Ранее такие последовательности удавалось строить только при помощи аксиомы выбора.

Проблемы о конституантах уже после отхода Н. Н. Лузина от этой тематики продолжали привлекать внимание его учеников П. С. Новикова, Л. В. Келдыш, А. А. Ляпунова. Они обсуждались, в частности, в работах [49], [50], [51], [56], [71]. Однако средствами классической дескриптивной теории больше ничего, в сущности, сделать не удалось, а более современные изыскания в значительной степени подтвердили высказанную Н. Н. Лузиным в [19], п. 6, мысль о том, что «проблемы такого рода заставляют отказываться от традиционного взгляда на смысл слов: решение проблемы».

Дальнейший прогресс в изучении проблем о конституантах был связан с доказательствами неразрешимости. П. С. Новиков [47] и Р. Соловей [87] установили неразрешимость проблемы несчетного Π^1_1-множества без совершенного ядра (см. § 6). Вместе с этой проблемой неразрешимыми оказываются и эквивалентные ей проблемы II и Iа. Изучение остальных лузинских проблем и их вариантов было проведено автором настоящего обзора в работе [130]. Получены следующие результаты.

Проблемы III и IV, а также варианты А, Б проблем Iа, II, III и IV (включая лузинские проблемы III-А и III-Б) эквивалентны проблеме несчетного Π^1_1-множества без совершенного ядра (и, следовательно, эквивалентны друг другу и проблемам II и Iа) и неразрешимы в аксиоматической теории множеств ZFC.

Напротив, модификации типа В проблем Iа, II, III, IV, в том числе и лузинская проблема I (= Iа-В), оказываются разрешимыми в отрицательном плане: удалось доказать (в обычном смысле этого слова), что решет требуемых видов не существует. Рассмотренная в п. 7.2 «основная проблема теории аналитических совокупностей» также разрешима отрицательно.

Если говорить о внутренних конституантах, то здесь картина несколько другая. Аналоги для внутренних конституант проблем Iа, II, III, IV и модификаций типа В этих проблем (включая и аналог проблемы I) разрешимы отрицательно. Но аналоги модификаций типов А и Б проблем Ia, II, III, IV уже неразрешимы и эквивалентны проблеме несчетного Π_1^1-множества без совершенного ядра.

7.4. Континуум-гипотеза Лузина и связанные с нею проблемы. Наряду с континуум-гипотезой Кантора, выражаемой равенством $\mathfrak{c} = \aleph_1$, в литературе по теории множеств рассматривается другая континуум-гипотеза, выдвинутая Н. Н. Лузиным в [19], п. 9, [20], п. 9, и связанная с его именем. Эта гипотеза заключается в равенстве $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_1}$. Указывая, что обе гипотезы континуума, вероятно, в равной степени свободны от противоречия, Н. Н. Лузин формулирует в названных работах три гипотетических предложения, хорошо согласованные с континуум-гипотезой $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_1}$, но несовместимые с канторовской континуум-гипотезой $\mathfrak{c} = \aleph_1$. Вот эти предложения.

Предложение I. *Всякое точечное множество мощности $\aleph_1$ принадлежит классу Π_1^1.*

Предложение II. *Пусть C — открытое решето. Тогда, каково бы ни было множество U, составленное из порядковых чисел $\nu < \omega_1$, объединение всех конституант $[C]_\nu$ с номерами $\nu \in U$ является Π_1^1-множеством.*

Предложение III. *Сумма произвольно выбранных борелевских множеств в числе $\aleph_1$ есть множество класса Σ_2^1.*

Все три эти предложения Н. Н. Лузин связывал с тем, что он назвал «высшей непрерывностью» континуума, не поясняя, впрочем, эту мысль более подробно.

Каждое из предложений I, II, III влечет континуум-гипотезу Н. Н. Лузина (это нетрудно вывести из того, что имеется ровно континуум множеств в классах Π_1^1 и Σ_2^1), а само следует из аксиомы детерминированности AD. Последний факт для предложения I до некоторой степени тривиален, поскольку из AD следует, что вообще нет точечных множеств мощности ровно $\aleph_1$ (см. [85]). Более сложный вывод предложений II и III из аксиомы AD приведен в [97], гл. 7.

Таким образом, если рассматривать, как об этом говорилось в предыдущем параграфе, AD в качестве в определенном смысле истинной аксиомы о «реальных» множествах, то в той же степени истинными становятся и обсуждаемые предложения (а также и сама континуум-гипотеза Н. Н. Лузина). Отметим, что сам Н. Н. Лузин, комментируя эти предложения, характеризовал первые два из них как несомненно истинные, а третье — как правдоподобное.

Теперь о взаимоотношениях предложений I, II, III и гипотезы $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_1}$ с аксиомами ZFC. Континуум-гипотеза Кантора $\mathfrak{c} = \aleph_1$ влечет отрицание каждого из трех предложений и отрицание континуум-гипотезы Лузина, так что ни предложения, ни гипотезу невозможно доказать средствами аксиом ZFC.

С другой стороны, Мартин и Соловей [88] установили, что равенство $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_1}$ вытекает (в ZFC) из аксиомы Мартина MA плюс соотношение $\mathfrak{c} > \aleph_1$, а предложения I и III вытекают из следующей комплексной гипотезы:

$$\mathrm{MA} + (\mathfrak{c} > \aleph_1) + (\text{отрицание предложения } (*) \text{ из п. } 6.2).$$

Но эта гипотеза не противоречит аксиомам ZFC (см. [88]). Следовательно, предложения I, III и континуум-гипотеза Лузина также не вступают в противоречие с аксиомами ZFC, а потому, в силу сказанного чуть выше, оба предложения и гипотеза неразрешимы.

Иначе обстоит дело с предложением II. В работе [88] указано, что это предложение влечет измеримость кардинала $\aleph_1$ двузначной счетно аддитивной мерой. Но такая измеримость невозможна в ZFC, ибо всякий несчетный измеримый кардинал строго недостижим. Стало быть, предложение II ложно, если мы принимаем аксиому выбора (но, напомним, истинно, когда принимается аксиома детерминированности).

§ 8. Отношения эквивалентности: замечания Н. Н. Лузина и современные исследования

Отправным пунктом обсуждения в этом параграфе является континуум-гипотеза в форме утверждения об отсутствии промежуточных мощностей между счетной мощностью $\aleph_0$ и мощностью континуума $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$. Естественным «носителем» такой промежуточной мощности было бы несчетное, однако неравномощное континууму точечное множество, а подходящими с точки зрения дескриптивной теории кандидатами здесь являются несчетные множества, не содержащие совершенных подмножеств, т. е. множества, не имеющие свойства совершенного ядра (в смысле § 2). Исследования в связи с этими множествами составили одно из наиболее интересных направлений в дескриптивной теории множеств (здесь можно упомянуть теорему Александрова — Суслина из § 2, приведенный в § 3 лузинский анализ мощности Π^1_1-множеств, а также более современные результаты, представленные в § 6).

Но вместе с тем не менее, а, пожалуй, даже более богатый материал для исследований по проблеме континуума дают отношения эквивалентности.

Пусть E — отношение эквивалентности на одном из евклидовых или бэровских пространств $\mathscr{X}$ (все эти пространства совершенно равноправны по отношению к тем вопросам, которые мы будем рассматривать). *Классом E-эквивалентности* называется всякое множество $X \subseteq \mathscr{X}$, удовлетворяющее двум требованиям: во-первых, xEy для любой пары точек x, $y \in X$, и, во-вторых, если $x \in X$, $y \in \mathscr{X}$ и xEy, то y также принадлежит множеству X.

Вероятно, в дескриптивной теории Н. Н. Лузин первый обратил внимание на трудности, связанные с отношениями эквивалентности. Проведенный Н. Н. Лузиным в [7], пп. 64, 65, анализ этого предмета концентрируется вокруг следующих двух главных проблем:

а) Сколько классов эквивалентности имеет данное отношение эквивалентности?

б) Можно ли для заданного отношения эквивалентности эффективно построить точечное множество, содержащее ровно по одной точке в каждом классе эквивалентности?

После мемуара [7] Н. Н. Лузин уже не возвращался к отношениям эквивалентности: развитие дескриптивной теории выдвигало на первый план иные задачи. Серьезное изучение этой темы удалось начать только в 70-е годы.

8.1. Исследования числа классов эквивалентности. В работах в этом направлении отношения эквивалентности подразделяются на три категории:

1) *счетные* отношения — такие, которые имеют лишь счетное (либо конечное) число классов эквивалентности;

2) *континуальные* отношения — те, для которых имеется совершенное множество, состоящее из попарно неэквивалентных элементов (такое отношение обязательно имеет континуум классов эквивалентности);

3) отношения, не принадлежащие к двум первым категориям — их мы будем называть *особыми*.

Ясно, что счетные отношения эквивалентности являются аналогами счетных (и конечных) точечных множеств, континуальные отношения — аналогами множеств, включающих совершенные подмножества, и, наконец, особые отношения — это аналоги тех точечных множеств, которые, будучи несчетными, не включают совершенных подмножеств. И аналогия здесь отнюдь не только чисто внешняя. Каждому точечному множеству X можно сопоставить отношение эквивалентности e_X, определенное следующим образом: xe_Xy, когда $x = y$ или обе точки x, y принадлежат дополнению множества X. Классами эквивалентности отношения e_X будут, во-первых, все одноэлементные множества $\{x\}$, где $x \in X$, и, во-вторых, добавочный класс составит дополнение множества X. Таким образом, счетным множествам X отвечают счетные отношения эквивалентности e_X, множествам, включающим совершенные подмножества,— континуальные отношения e_X и, наконец, несчетным множествам, не включающим совершенных подмножеств,— особые отношения e_X.

Как видно, теория точечных множеств (в связи с вопросами мощности и совершенного ядра) входит специальным частным случаем в более общую теорию отношений эквивалентности. При этом выполняется определенная инверсия: если точечное множество X принадлежит некоторому классу K, то соответствующее отношение e_X как множество пар войдет в класс дополнений к множествам класса K. Это означает, что, например, аналогами точечных Σ^1_1-множеств среди отношений эквивалентности будут Π^1_1-отношения, т. е. такие отношения E, что соответствующее множество пар $\{\langle x, y\rangle\colon xEy\}$ имеет класс Π^1_1. И обратно, Π^1_1-множествам аналогичны Σ^1_1-отношения эквивалентности.

После этих необходимых замечаний перейдем к обзору результатов. Интерес представляют прежде всего особые отношения эквивалентности. Очень важный результат получил Дж. Сильвер [95]: Π^1_1-отношение не может быть особым. В силу только что сказанного, эта теорема является аналогом и обобщением теоремы Александрова—Хаусдорфа—Суслина из § 3 о том, что среди Σ^1_1-множеств нет не обладающих свойством совершенного ядра.

Точно так же следующий результат Дж. Бэрджеса [105] есть аналог и обобщение теоремы Лузина о мощности Π^1_1-множеств, приведенной в § 3. Бэрджес нашел, что любое особое Σ^1_1-отношение эквивалентности необходимо имеет ровно $\aleph_1$ классов эквивалентности. Впрочем, аналогия здесь не совсем полная: если утверждение о существовании несчетного Π^1_1-множества без совершенных подмножеств неразрешимо (см. § 6), то особое Σ^1_1-отношение можно прямо построить. Для построения возьмем открытое решето C, внешнее множество $[C]$ которого — неборелевское. Определим xE^*y, когда либо точки x, y принадлежат внутреннему множеству $[C]_*$, либо найдется индекс $\nu < \omega_1$ такой, что x и y принадлежат конституанте $[C]_\nu$. Нетрудно проверить, что E^* будет Σ^1_1-отношением, классы эквивалентности которого суть все непустые конституанты $[C]_\nu$ (а их несчетно много ввиду неборелевости $[C]$) плюс множество $[C]_*$. Таким образом, отношение E^* не является счетным, но оно согласно принципу ограничения § 3 не может быть и континуальным. Итак, C — особое Σ^1_1-отношение.

Более точная аналогия получится, если мы рассмотрим *ограниченные по рангу* отношения, т. е. такие отношения эквивалентности E, что все классы E-эквивалентности представляют собой борелевские множества, притом ограниченного в совокупности ранга. Изучение таких отношений было проведено Ж. Стерном в [111] и, более полно, в [112]. Стерн установил, что утверждение о существовании ограниченных по рангу особых Σ^1_1-отношений уже неразрешимо в ZFC. В последней из указанных работ найдено много других интересных свойств Σ^1_1-отношений. В частности, по всякому ограниченному по рангу Σ^1_1-отношению эквивалентности E в [112] некоторым регулярным способом удалось построить Π^1_1-множество $A_E \subseteq \mathcal{N}$, обладающее тем свойством, что 1) если игрок I имеет выигрывающую стратегию в игре $G(A_E)$, то отношение E счетно, 2) если игрок II имеет выигрывающую стратегию в этой игре, то отношение E континуально, и 3) если игра $G(A_E)$ не детерминирована, то отношение E является особым.

В статье [111] показано, что аксиома проективной детерминированности PD влечет отсутствие проективных (любого класса) особых ограниченных по рангу отношений эквивалентности, а полная аксиома AD влечет отсутствие любых особых ограниченных по рангу отношений. Кстати, из AD следует и то, что нет совокупностей из $\aleph_1$ борелевских множеств ограниченного ранга [103].

8.2. Инвариантная дескриптивная теория множеств. В основе этого направления лежит тот же подход, что и в исследованиях по подсчету числа классов эквивалентности, а именно, рассматривать классы эквивалентности как некие новые «точки». Пусть на одном из бэровских или евклидовых пространств $\mathscr{X}$ задано отношение эквивалентности E. Множество $X \subseteq \mathscr{X}$ называется *инвариантным* (в смысле E), если любые две точки x, y такие, что xEy, либо одновременно принадлежат, либо одновременно не принадлежат X. Другими словами, инвариантные множества суть объединения классов эквивалентности.

Удалось выяснить, что некоторые теоремы дескриптивной теории остаются в силе в области инвариантных множеств. Например, имеет место следующий инвариантный аналог первой теоремы отделимости для Σ_1^1-множеств: любую пару непересекающихся инвариантных Σ_1^1-множеств можно отделить инвариантным борелевским множеством (см. [108]). Аналогичные результаты получены в [108] и для теорем редукции, униформизации и разложения на борелевские множества. Инвариантная отделимость для классов борелевской иерархии рассмотрена в [113]. Близкие исследования представлены также в [105].

Фундаментальную и часто цитируемую работу по инвариантным множествам опубликовал Р. Воот [99], однако мы воздержимся от обзора ее содержания, так как это потребовало бы изложения здесь специальной теоретико-модельной логической символики.

8.3. Проблема селектора. *Селектором* отношения эквивалентности E называется точечное множество, пересекающееся ровно по одной точке с каждым классом E-эквивалентности. Конечно, селектор можно получить простым применением аксиомы выбора, однако, если мы захотим построить «называемый», например, проективный селектор (как об этом сказано Н. Н. Лузиным в [7], п. 65), то задача становится очень сложной даже для некоторых весьма простых отношений эквивалентности. Например, селектор для отношения эквивалентности Витали (борелевского, как множество пар) является, как известно, неизмеримым множеством (а также и не обладает свойством Бэра), так что это отношение заведомо не имеет селектора в классах Σ_1^1 и Π_1^1, а поиск селекторов для него в более высоких проективных классах можно вести только в смысле непротиворечивости.

Таким образом, если мы хотим изучать селекторы Σ_1^1-отношений эквивалентности, то целесообразно начать с селекторов класса Σ_2^1 (или, что в данном случае одно и то же, класса Δ_2^1: легко видеть, что Σ_2^1-селектор отношения класса Σ_1^1 будет принадлежать и классу Δ_2^1). Дж. Бэрджес сформулировал в [104] следующий принцип селектора, заключающий в себе существо вопроса:

(SP) каждое Σ_1^1-отношение имеет селектор класса Σ_2^1.

Чтобы проиллюстрировать взаимоотношения этого принципа с аксиомами ZFC, воспользуемся еще двумя предложениями:

(1) существует полное упорядочение бэровского пространства, являющееся Σ_2^1-множеством как множество пар;

(2) существует неизмеримое множество класса Δ_2^1.

Будучи применённым к отношению Витали, принцип (SP) влечет (2), но сам он, как нетрудно проверить, вытекает из (1). Вместе с тем предложение (1) не противоречит аксиомам ZFC, ибо следует из аксиомы конструктивности, а предложение (2) невозможно доказать в ZFC [86], [87]. Стало быть, принцип селектора неразрешим: его нельзя ни доказать, ни опровергнуть.

Б. Л. Будинас показал, что принцип (SP) лежит «строго между» предложениями (1) и (2): точнее, (SP) не следует из (2) и не влечет (1) [135].

§ 9. Проблемы и результаты, связанные с аксиомой выбора и трансфинитными построениями

Аксиома выбора, введенная в математику Е. Цермело в 1904 г., немедленно вызвала серьезную критику со стороны многих ведущих математиков того времени (Борель, Бэр, Лебег и др.) в первую очередь своим предельно неэффективным характером, ибо она не содержит никакого правила или закона, по которому действительно можно провести выбор конкретного элемента x в произвольном непустом множестве X из данного семейства множеств. Некоторые другие крупные математики придерживались иного мнения и не видели ничего предосудительного в использовании аксиомы выбора (Адамар, Хаусдорф, позже Серпинский). О некоторых аспектах дискуссии, развернувшейся в начале века в связи с этой аксиомой, см. в книге [11], гл. I, а также в [15], разд. III.

Н. Н. Лузин относился в целом критически к использованию аксиомы выбора в математических рассуждениях, однако не отказывался посмотреть, что может дать эта аксиома в тех случаях, когда провести исследование чисто эффективными средствами представлялось невозможным. К этому циклу лузинских исследований относятся построение и изучение некоторых сингулярных точечных множеств, анализ вопросов, связанных с ограниченной проблемой континуума в неэффективном понимании, а также постановка и анализ проблем о частях натурального ряда. По каждому из этих трех направлений Н. Н. Лузиным получены важные результаты и поставлены глубокие проблемы, ставшие исходными пунктами интересных изысканий более позднего времени.

9.1. Множества Лузина и множества всегда первой категории. *Множеством Лузина* (или ν-множеством в терминологии книги [63], § 40) называется всякое точечное множество, обладающее тем свойством, что его пересечение с любым нигде не плотным множеством данного пространства не более чем счетно (см. [125], с. 70). *Множествами всегда первой категории* Н. Н. Лузин назвал в [16] такие точечные множества X, что пересечение $X \cap P$ имеет первую категорию в P, каково бы ни было совершенное (непустое) множество P.

Разумеется, каждое не более чем счетное точечное множество будет как множеством Лузина, так и множеством всегда первой категории. Поэтому представляют интерес лишь несчетные множества обоих типов. Построение несчетного множества Лузина и несчетного множества всегда первой категории в предположении, что выполняется континуум-гипотеза $\mathfrak{c}=\aleph_1$, проведено Н. Н. Лузиным в заметке [1]. Позже Н. Н. Лузин построил несчетное, а точнее, имеющее мощность ровно $\aleph_1$, множество всегда первой категории, не прибегая к континуум-гипотезе (однако используя аксиому выбора, которая предполагается везде в этом параграфе); см. [6], [16].

Оставалась, однако, открытой сформулированная в [16] проблема существования множества всегда первой категории и мощности континуум, когда континуум-гипотеза не предполагается. Также не было известно, существуют ли несчетные множества Лузина, когда $\mathfrak{c} > \aleph_1$.

Название «*множество Лузина*» следовало бы, пожалуй, дать скорее множествам всегда первой категории, ибо именно таким множествам Н. Н. Лузин посвятил несколько своих работ (включая [1], [6], [16]). Напротив, те множества, которые сейчас называются множествами Лузина, из лузинских работ фигурируют только в заметке [1].

Множества Лузина и множества всегда первой категории, несмотря на некоторое сходство в определениях и тождественность на счетных множествах, имеют весьма разные свойства. Так, несчетное множество Лузина заведомо не обладает свойством Бэра, и никакое несчетное подмножество такого множества нельзя накрыть множеством первой категории. В то же время множества всегда первой категории «предельно малы» в смысле категории. Так что несчетные множества Лузина и несчетные множества первой категории образуют непересекающиеся классы. В то же время из существования множества Лузина некоторой мощности следует существование и множества всегда первой категории той же мощности (это утверждение фактически содержится в [1]).

Теперь о современных изысканиях по этим двум типам множеств. Вскоре после открытия метода вынуждения было установлено, что утверждение о существовании множеств Лузина континуальной мощности, а тогда, в силу только что сказанного, и множеств всегда первой категории той же мощности, не противоречит аксиомам ZFC плюс $\mathfrak{c} > \aleph_1$ (как указано в [134], с. 89, этот результат принадлежит П. Вопенке и К. Хрбасеку). С другой стороны, утверждение об отсутствии несчетных множеств Лузина вытекает, как показал К. Кюнен, из аксиомы Мартина МА плюс $\mathfrak{c} > \aleph_1$, т. е. это утверждение также не противоречит ZFC $+ \mathfrak{c} > \aleph_1$. Наконец, недавно А. Миллер [127] установил непротиворечивость относительно аксиом ZFC $+$ $+ \mathfrak{c} > \aleph_1$ и утверждения о том, что нет множеств всегда первой категории, имеющих мощность строго больше, чем $\aleph_1$. Таким образом, приведенная выше проблема из [16] и проблема существования несчетных множеств Лузина в предположении, что континуум-гипотеза неверна, оказались *неразрешимыми*.

Мы говорили здесь только о множествах бэровских и евклидовых пространств (все они, очевидно, равноправны по отношению к обсуждавшимся вопросам), однако многие результаты остаются в силе и для пространств более общего вида (см. [134], пп. 4.5, 5.5, [127]).

9.2. Снова об ограниченной проблеме континуума. Проблема эта состоит, напомним, в требовании разбить континуум (реализованный как одно из бэровских или евклидовых пространств — они и здесь совершенно эквивалентны друг другу) на $\aleph_1$ непустых борелевских множеств ограниченного ранга. Здесь мы рассмотрим результаты, связанные с этой проблемой при ее неэффективном толковании, при котором допускается не только эффективное построение конкретного разбиения требуемого вида, но и просто доказательство существования такого разбиения с помощью аксиомы выбора.

Положительное решение было получено Ф. Хаусдорфом в [65]. Результат Хаусдорфа состоит в следующем: существует последовательность множеств $X_\xi \subseteq \mathbb{R}$ класса $\mathbf{\Pi}^0_2$ (т. е. G_δ), индексированных числами $\xi < \omega_1$, строго возрастающая ($X_\eta \subsetneqq X_\xi$ при $\eta < \xi$) и такая, что объединение всех множеств X_ξ полностью накрывает действительную прямую $\mathbb{R}$. Удалив из каждого множества X_ξ все точки, принадлежащие объединению предшествующих множеств, мы получаем искомое разбиение континуума на $\aleph_1$ непустых множеств класса $\mathbf{\Pi}^0_3$, т. е. ранга не более чем 4.

Теорема Хаусдорфа оставляет открытым вопрос о возможности разбиения континуума на $\aleph_1$ непустых множеств более простого типа, чем $\mathbf{\Pi}^0_3$. В частности, существует ли разбиение континуума на $\aleph_1$ непустых множеств класса $\mathbf{\Pi}^0_2$? Эта проблема сформулирована Серпинским в [33] (см. также [63], с. 495). Представляет интерес и аналогичная проблема для замкнутых (класс $\mathbf{\Pi}^0_1$) множеств, а также проблема разбиения на $\aleph_1$ нигде не плотных множеств.

Все эти вариации лузинской ограниченной проблемы континуума подверглись интенсивному изучению в работах 70-х годов. Первой была исчерпывающим образом исследована проблема разбиения на нигде не плотные множества. С. Хехлер [91] показал, что утверждение о возможности разбиения континуума на $\aleph_1$ нигде не плотных множеств, а также и отрицание этого утверждения не противоречат аксиомам ZFC $+ \mathfrak{c} > \aleph_1$. Несколько позже точно такой же результат для разбиений на $\aleph_1$ непустых замкнутых множеств получил Ж. Стерн [109]. Таким образом, проблемы разбиения континуума на $\aleph_1$ нигде не плотных множеств и $\aleph_1$ непустых замкнутых множеств неразрешимы в теории ZFC $+ \mathfrak{c} > \aleph_1$. Наконец, Фремлин и Шелах [117] установили, что проблема разбиения на $\aleph_1$ непустых множеств класса $\mathbf{\Pi}^0_2$ эквивалентна первой из только что упомянутых проблем (в том смысле, что из существования разбиения одного типа следует существование разбиения другого типа, и обратно) и, следовательно, также неразрешима в той же теории.

Следует отметить, что континуум-гипотеза $\mathfrak{c} = \aleph_1$ тривиальным образом дает положительное решение для всех трех проблем (посредством разбиения на $\aleph_1$ одноточечных множеств).

После этого экскурса в современные изыскания снова вернемся к результату Хаусдорфа. Внимание Н. Н. Лузина привлек очень интересный механизм доказательства, в ходе которого пришлось преодолеть принципиальную трудность, заключающуюся в необходимости просмотра всех точек континуума за $\aleph_1$ шагов построения, не вводя никаких ограничений на мощность континуума, а также несколько технических трудностей. Серьезный характер последних подчеркивается следующей ограничительной теоремой Н. Н. Лузина [17]: строго возрастающая последовательность длины ω_1, составленная из множеств класса $\mathbf{\Pi}_2^0$, не может возрастать непрерывным образом, т. е. невозможно, чтобы для нее равенство $X_\xi = \bigcup_{\eta<\xi} X_\eta$ выполнялось для всех предельных чисел ξ.

Результатом лузинского анализа конструкции Хаусдорфа явились две статьи [21], [22] с одним общим названием: «О частях натурального ряда», которым посвящен наш следующий пункт.

9.3. Проблемы и исследования о частях натурального ряда. Напомним, что натуральный ряд $\{1, 2, \ldots\}$ обозначается через ω. Два множества $u, v \subseteq \omega$ (т. е. две части натурального ряда в терминологии работ [21], [22]) Н. Н. Лузин назвал *ортогональными*, когда пересечение $u \cap v$ конечно. Два семейства U, V, состоящие из частей натурального ряда, называются *ортогональными*, когда каждое $u \in U$ ортогонально любому $v \in V$. Наконец, два таких семейства названы Н. Н. Лузиным *отделимыми* в том случае, если найдется множество $w \subseteq \omega$ (множество-отделитель) такое, что все разности $u - w$, где $u \in U$, и все пересечения $w \cap v$, где $v \in V$, конечны. Легко видеть, что два отделимых семейства обязательно ортогональны.

Верно ли обратное? Вопрос этот подробно исследован Н. Н. Лузиным в работах [21], [22], причем не только для семейств частей натурального ряда, но и для их (частей) возрастающих последовательностей. Последовательность $\langle u_\xi\colon \xi < \lambda \rangle$ (произвольной конечной или трансфинитной длины λ) множеств $u_\xi \subseteq \omega$ называется возрастающей, если для любой пары индексов $\eta < \xi$ выполняется соотношение $u_\eta \prec u_\xi$, которое означает, что разность $u_\eta - u_\xi$ конечна, а разность $u_\xi - u_\eta$, напротив, бесконечна.

Две счетные последовательности, как и вообще любые два счетных семейства частей натурального ряда, если ортогональны, то и отделимы: это установлено Н. Н. Лузиным. В то же время существуют ортогональные, но неотделимые строго возрастающие последовательности длины ω_1 каждая. Построение такой пары последовательностей впервые было выполнено Хаусдорфом в [65] и, в упрощенной Н. Н. Лузиным форме, приведено в [22] (кстати, в этом построении состоит ключевой момент обсуждавшейся в предыдущем пункте теоремы Хаусдорфа).

Имея существование ортогональных, но неотделимых последовательностей длины ω_1 (а тогда и семейств мощности $\aleph_1$), с одной стороны, и отделимость любой пары счетных (или конечных) ортогональных семейств частей натурального ряда — с другой, Н. Н. Лузин ставит в работе [22] следующие две проблемы «о важном смешанном случае».

П р о б л е м а I. Существует ли пара ортогональных, но неотделимых семейств частей натурального ряда, одно из которых счетно, а другое имеет мощность ровно $\aleph_1$?

П р о б л е м а II. Существует ли пара возрастающих ортогональных, но неотделимых последовательностей, одна из которых имеет счетную длину, а другая — длину ω_1?

Еще две проблемы, поставленные в [22], имеют своим источником некоторую аналогию между фактом существования ортогональных неотделимых последовательностей длины ω_1 и «феноменом Пифагора, состоящим в невозможности вставить между двумя идущими навстречу друг другу специально подобранными последовательностями рациональных точек рациональную точку», как писал об этом Н. Н. Лузин в [22].

Проблема III. Существуют ли две возрастающие ортогональные последовательности длины ω_1 каждая, отделимые и допускающие всего одно (с точностью до присоединения или изъятия конечного количества натуральных чисел) отделяющее множество?

Проблема IV. Существует ли возрастающая последовательность $\langle u_\xi: \xi < \omega_1 \rangle$, не допускающая ни одного множества $u \subseteq \omega$ с бесконечным дополнением такого, что $u_\xi \prec u$ для всех $\xi < \omega_1$?

Между четырьмя поставленными проблемами существуют определенные зависимости. Проблема I эквивалентна проблеме II, т. е. из существования пары множеств, удовлетворяющих требованиям проблемы I, можно вывести существование пары последовательностей, удовлетворяющих проблеме II, и обратно (обратное очевидно). Проблема III в таком же смысле эквивалентна проблеме IV. Более тонкий результат получил Ротбергер [79]: из положительного решения проблемы I (эквивалентно, проблемы II) следует положительное решение проблемы IV (а тогда и проблемы III). Кстати, в этой статье Ротбергера рассмотрены взаимоотношения обсуждаемых вопросов с некоторыми другими интересными задачами по структуре континуума.

Положительное решение всех четырех проблем можно обеспечить принятием континуум-гипотезы $\mathfrak{c} = \aleph_1$ (этот момент был, несомненно, известен Н. Н. Лузину: проблемы, о которых идет речь, названы в [22] дериватами континуум-гипотезы). Следовательно, как и в предыдущих двух пунктах, представляет интерес только анализ взаимоотношений проблем I—IV с аксиомами теории ZFC $+ \mathfrak{c} > \aleph_1$.

Из аксиомы Мартина MA плюс $\mathfrak{c} > \aleph_1$ следует отрицательное решение всех четырех проблем (для проблемы I отмечено в [91]). К этому приводит очень простое рассуждение. Действительно, рассмотрим произвольную возрастающую последовательность $\langle u_\xi: \xi < \omega_1 \rangle$ множеств $u_\xi \subseteq \omega$. Совокупность дополнительных множеств $v_\xi = \omega - u_\xi$ обладает, очевидно, тем свойством, что пересечение любого конечного числа множеств v_ξ бесконечно. В этой ситуации мы можем применить одно из следствий MA $+ \mathfrak{c} > \aleph_1$ — так называемую лемму Буса [134], с. 77 (или [125], гл. 6, следствие 8), которая дает бесконечное множество $v \subseteq \omega$ такое, что разность $v - v_\xi$ конечна для всякого ξ. Определив $u = \omega - v$, мы получим $u_\xi \prec u$ для всех ξ. Таким образом, проблема IV — а тогда, в силу сказанного выше, и остальные три проблемы — решается отрицательно в предположении MA $+ \mathfrak{c} > \aleph_1$, т. е. отрицательные решения всех четырех проблем не противоречат аксиомам системы ZFC $+ \mathfrak{c} > \aleph_1$.

С. Хехлер показал, что и положительные решения этих проблем также не противоречат ZFC $+ \mathfrak{c} > \aleph_1$ (см. [91], [134], с. 87).

Автором настоящего обзора проверено, что из положительного решения проблем III—IV не вытекает положительное решение проблем I—II.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Lusin N. Sur un problème de M. Baire.— C. r. Acad. sci. Paris, 1914, v. 158, p. 1258—1261. (*Рус. пер.*: Об одной проблеме Бэра.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 683—685.)

[2] Lusin N. Sur la classification de M. Baire.— C.r. Acad. sci. Paris, 1917, v. 164, p. 91—94. (*Рус. пер.* в кн.: [23], с 270—272.)

[3] Lusin N. Sur l'existence d'un ensemble non dénomrable qui est de première catégorie dans tout ensemble parfait.— Fund. Math., 1921, v. 2, p. 155—157. (*Рус. пер.*: О существовании несчетного множества первой категории на всяком совершенном множестве.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 692—694.)

[4] Lusin N. Sur les ensembles projectifs de M. Henri Lebesque.— C.r. Acad. sci. Paris, 1925, v. 180, p. 1572—1574. (*Рус. пер.*: О проективных множествах Лебега.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 304—306.)

[5] Lusin N. Mémoire sur les ensembles analytiques et projectifs.— Мат. сб., 1926, т. 33, № 3, с. 237—290. (*Рус. пер.*: Мемуар об аналитических и проективных множествах.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.—М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 317—379.)

[6] Lusin N. Sur une question concernant la propriété de M. Baire.— Fund. Math., 1927, v. 9, p. 116—118. (*Рус. пер.*: Об одном вопросе, касающемся свойства Бэра.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 695—696.)

[7] Lusin N. Sur les ensembles analytiques.— Fund. Math., 1927, v. 10, p. 1—95. (*Рус. пер.*: Об аналитических множествах.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.—М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 380—459.)

[8] Lusin N. Remarques sur les ensembles projectifs.— C.r. Acad. sci. Paris, 1927, v. 185, p. 835—837. (*Рус. пер.*: Замечания о проективных множествах.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.—М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 460—461.)

[9] Lusin N. Sur les voies de la théorie des ensembles.— Atti del Congresso internationale dei matematici, 3—10 septembre, Bologna, 1929, v. 1, p. 295—299. (*Рус. пер.*: О путях развития теории множеств.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР. 1958, с. 464—469.)

[10] Lusin N. Analogies entre les ensembles mesurables B et les ensembles analytiques. — Fund. Math., 1930, v. 26, p. 48—76. (*Рус. пер.*: Аналогии между множествами, измеримыми B, и аналитическими множествами.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.—М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 470—493.)

[11] Lusin N. Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications.— Paris: Gauthiers — Villars, 1930. (*Рус. пер.*: Лекции об аналитических множествах и их приложениях.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 9—269; *Сокр. рус. пер. в кн.*: Лузин Н. Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях.— М.: Гостехиздат, 1953.)

[12] Lusin N. Sur le problème de M. J. Hadamard d'uniformisation des ensembles.— C.r. Acad. sci. Paris, 1930, v. 190, p. 349—351.

[13] Lusin N. Sur une famille des complementaires analytiques.— Fund. Math., 1931. v. 17, p. 4—7. (*Рус. пер.*: Об одном семействе аналитических дополнений.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 624—626.)

[14] Lusin N. Sur les classes des constituantes des complementaires analytiques.— Ann. R. Scuola norm. super. Pisa, sér. 2, 1933, v. 2, № 3, p. 269—282. (*Рус. пер.*: О классах конституант аналитических дополнений.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 627—641.)

[15] Лузин Н. Н. Современное состояние теории функций действительного переменного.— М.; Л.: ГТТИ, 1933; В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 494—536.

[16] Lusin N. Sur les ensembles tujours de première catégorie.— Fund. Math., 1933, v. 21, p. 114—126. (*Рус. пер.*: О множествах всегда первой категории.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 699—708.)

[17] Лузин Н. Н. О стационарных последовательностях.— Тр. физ.-мат. ин-та, отд. мат., 1934, т. 5, с. 125—147; В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 642—661.

[18] Лузин Н. Н. Несколько замечаний о кратной отделимости.— ДАН СССР, 1934, т. 2, № 5, с. 280—284; В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 547—551.

[19] Лузин Н. Н. О некоторых новых результатах дескриптивной теории функций.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935; В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.—М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 552—616.

[20] Lusin N. Sur les ensembles analytiques nuls.— Fund. Math., 1935, v. 25, p. 109—131. (*Рус. пер.*: О пустых аналитических множествах.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 662—680.)

[21] Л у з и н Н. Н. О частях натурального ряда.— ДАН СССР, 1943, т. 40, № 5, с. 195—199; В кн.: Л у з и н Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 709—713.

[22] Л у з и н Н. Н. О частях натурального ряда.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1947, т. 11, № 5, с. 403—410; В кн.: Л у з и н Н. Н. Соб. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 714—722.

[23] Л у з и н Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958.

[24] L u s i n N., S i e r p i n s k i W. Sur quelques proprietes des ensembles (A).— Bull. Int. Acad. sci. Cracowie, 1918, v. 4, p. 35—48. (*Рус. пер.*: О некоторых свойствах A-множеств.— В кн.: Л у з и н Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 273—284.)

[25] L u s i n N., S i e r p i n s k i W. Sur une décomposition du continu.— C.r. Acad. sci. Paris, 1922, v. 175, p. 357—359. (*Рус. пер.*: Об одном разложении континуума.— В кн.: Л у з и н Н. Н. Собр. соч., т. II.— Изд-во АН СССР, 1958, с. 621—623.)

[26] L u s i n N., S i e r p i n s k i W. Sur un ensemble non mesurable B.— J. math. pures et appl. sér. 9, 1923, v. 2, p. 53—72. (*Рус. пер.*: Об одном множестве, неизмеримом B.— В кн.: Л у з и н Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 285—300.)

[27] L u s i n N., N o v i k o f f P. Choix effectif d'un point dans un complementaire analytique donné par un crible.— Fund. Math., 1935, v. 25, p. 559—560. (*Рус. пер.*: Эффективный выбор точки в произвольном аналитическом дополнении, заданном посредством решета.— В кн.: Л у з и н Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 617—618; В кн.: Н о в и к о в П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра.— М.: Наука, 1979, с. 49—50.)

[28] L e b e s g u e H. Sur les fonctions représentable analytiquement.— J. math. pures et appl., Ser. 6, 1905, v. 1, № 2, p. 139—216.

[29] A l e x a n d r o f f P. Sur la puissance des ensembles mesurables B.— C.r. Acad. sci. Paris, 1916, v. 162, p. 323—325. (*Рус. пер.*: О мощности множеств, измеримых по Борелю.— В кн.: А л е к с а н д р о в П. С. Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств.— М.: Наука, 1978, с. 35—39.)

[30] А л е к с а н д р о в П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию.— М.: Наука, 1977.

[31] S o u s l i n M. Sur une definition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis.— C.r. Acad. sci, Paris, 1917, v. 164, p. 89—91.

[32] S i e r p i n s k i W. Sur une classe d'ensembles.— Fund. Math., 1925, v. 7, p. 237—243.

[33] S i e r p i n s k i W. Sur deux consequences d'un théoreme de M. Hausdorff.— Fund. Math., 1945, v. 33, p. 269—272.

[34] L a v r e n t i e f f M. Contribution à la théorie des ensembles homeomorphes.— Fund. Math., 1924, v. 6, p. 149—160.

[35] L a v r e n t i e f f M. Sur les sous-classes et la clas sification de M. Baire.— C.r. Acad. sci. Paris, 1925, v. 180, p. 111—114.

[36] К о л м о г о р о в А. Н. Об операциях над множествами.— Мат. сб., 1928, т. 35, № 3—4, с. 414—422.

[37] С е л и в а н о в с к и й Е. А. Об одном классе эффективных множеств (множества C).— Мат. сб., 1928, т. 35, № 3—4, с. 379—413.

[38] S e l i v a n o v s k i E. Sur les proprietes des constituantes des ensembles analytiques.— Fund. Math., 1933, v. 21, p. 20—28.

[39] G l i v e n k o V. Sur les fonctions implicites.— Мат. сб., 1929, т. 36, № 2, с. 138—142.

[40] N o v i k o f f P. Sur les fonctions implicites mesurables B. Fund. Math., 1931, v. 17, p. 8—25. (*Рус. пер.*: О неявных функциях, измеримых B.— В кн.: Н о в и к о в П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра.— М.: Наука, 1979, с. 13—25.)

[41] Н о в и к о в П. С. Обобщение второго принципа отделимости.— ДАН СССР, 1934, т. 4, № 1, с. 8—11; В кн.: Н о в и к о в П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра.— М.: Наука, 1979, с. 40—42.

[42] Novikoff P. Sur la séparabilite des ensembles projectifs de seconde classe.— Fund. Math., 1935, v. 25, p. 459—466. (*Рус. пер.*: Об отделимости проективных множеств второго класса.— В кн.: Новиков П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра.— М.: Наука, 1979, с. 43—48.)

[43] Новиков П. С. Проекции униформных аналитических дополнений.— Мат. сб., 1937, т. 2, № 1, с. 3—16; В кн.: Новиков П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра.— М.: Наука, 1979, с. 51—63.

[44] Новиков П. С. О взаимоотношении второго класса проективных множеств и проекций униформных аналитических дополнений.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1937, т. 1, № 2, с. 231—252; В кн.: Новиков П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра.— М.: Наука, 1979, с. 64—77.

[45] Новиков П. С. Отделимость C-множеств.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1937, т. 1, № 2, с. 253—264.— В кн.: Новиков П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра.— М.: Наука, 1979, с. 78—85.

[46] Новиков П. С. О проекциях некоторых B-множеств.— ДАН СССР, 1939, т. 23, № 9, с. 863—864; В кн.: Новиков П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра.— М.: Наука, 1979, с. 86—87.

[47] Новиков П. С. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств.— Тр. мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1951, т., 38, с. 279—316; В кн.: Новиков П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра.— М.: Наука, 1979, с. 170—202.

[48] Новиков П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра.— М.: Наука, 1979.

[49] Новиков П. С., Келдыш Л. В. Работы Н. Н. Лузина в области дескриптивной теории множеств.— УМН, 1953, т. 8, вып. 2, с. 93—104.

[50] Новиков П. С., Келдыш Л. В. Комментарии к работам Н. Н. Лузина.— В кн.: Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II.— М.: Изд-во АН СССР, 1958, с. 725—739.

[51] Ляпунов А. А., Новиков П. С. Дескриптивная теория множеств.— В кн.: Математика в СССР за 30 лет.— М.; Л.: Гостехиздат, 1948, с. 243—255; В кн.: Новиков П. С. Избранные труды. Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра.— М.: Наука, 1979, с. 96—107.

[52] Kantorovich L., Livenson E. Memoire on the analytical operations and projective sets.— Fund. Math., 1932, v. 18, p. 214—279; 1933; v. 20, p. 54—97.

[53] Ляпунов А. А. Об отделимости аналитических множеств.— ДАН СССР, 1934, т. 2, № 5, с. 279—280.

[54] Ляпунов А. А. О некоторых униформных аналитических дополнениях.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1937, т. 1, № 2, с. 285—305.

[55] Ляпунов А. А. О подклассах B-множеств.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1937, т. 1, № 3, с. 419—426.

[56] Ляпунов А. А. Некоторые случаи униформизации плоских CA- и A_2'-множеств.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1939, т. 3, № 1, с. 41—52.

[57] Ляпунов А. А. R-множества.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1953, т. 40, с. 1—68; В кн: Ляпунов А. А. Вопросы теории множеств и теории функций.— М.: Наука, 1979, с. 85—131.

[58] Ляпунов А. А. О методе трансфинитных индексов в теории операций над множествами.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1973, т. 133, с. 132—148; В кн.: Ляпунов А. А. Вопросы теории множеств и теории функций.— М.: Наука, 1979, с. 209—223.

[59] Ляпунов А. А. Обзор по дескриптивной теории множеств.— В кн.: Ляпунов А. А. Вопросы теории множеств и теории функций.— М.: Наука, 1979, с. 55—82.

[60] Ляпунов А. А. Вопросы теории множеств и теории функций.— М.: Наука, 1979.

[61] Арсенин В. Я., Ляпунов А. А. Теория A-множеств.— УМН, 1950, т. 5, вып. 5, с. 45—108.

[62] Kuratowski K. Sur les théoremes de séparation dans la théorie des ensembles. — Fund. Math., 1936, v. 26, p. 183—191.

[63] Куратовский К. Топология, т. I.— М.: Мир, 1966.

[64] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств.— М.: Мир, 1970.

[65] Hausdorff F. Summen von $\aleph_1$ Mengen.— Fund. Math., 1936, v. 26, p. 241—255.

[66] Хаусдорф Ф. Теория множеств.— М.; Л.: ОНТИ, 1937.

[67] Келдыш Л. В. Верхние оценки для классов конституант аналитических дополнений.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1937, т. 1, № 2, с. 265—284.

[68] Келдыш Л. В. Структура минимальных решет, определяющих множества, измеримые В.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1938, т. 2, № 2, с. 221—248.

[69] Келдыш Л. В. Об открытых отображениях A-множеств.— ДАН СССР, 1945, т. 49, № 9, с. 646—648.

[70] Келдыш Л. В. Структура B-множеств.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1944, т. 17, с. 1—74.

[71] Келдыш Л. В. Идеи Н. Н. Лузина в дескриптивной теории множеств.— УМН, 1974, т. 29, вып. 5, с. 183—196.

[72] Kondo M. Sur l'uniformisation des complémentaires analytiques et les ensembles projectifs de la seconde classe.— Japan J. Math., 1938, v. 15, p. 197—230.

[73] Арсенин В. Я. О проекциях B-множеств.— Изв. АН СССР, сер. мат., 1939, т. 3, № 2, с. 223—242.

[74] Арсенин В. Я., Козлова З. И., Тайманов А. Д. Вклад А. А. Ляпунова в развитие теории множеств.— В кн.: Ляпунов А. А. Вопросы теории множеств и теории функций.— М.: Наука, 1979, с. 7—30.

[75] Янков В. Об унификации A- и B-множеств.— ДАН СССР, 1941, т. 30, № 7, с. 591—592.

[76] Щегольков Е. А. Об униформизации некоторых B-множеств.— ДАН СССР, 1948, т. 59, № 6, с. 1065—1068.

[77] Щегольков Е. А. Элементы теории B-множеств.— УМН, 1950, т. 5, вып. 5, с. 14—44.

[78] Гёдель К. Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств.— УМН, 1948, т. 3, вып. 1, с. 96—149.

[79] Rothberger F., On some problems of Haussdorff and Sierpinski.— Fund. Math., 1948, v. 35, p. 29—46.

[80] Addison J. W. Separation principles in the hierarchies of classical and effective descriptive set theory.— Fund. Math., 1959, v. 46, № 2, p. 123—135.

[81] Addison J. W., Moschovakis Y. Some consequences of the axiom of definable determinateness.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1968, v. 59, № 3, p. 708—712.

[82] Mycielski J., Steinhaus H. A mathematical axiom contradicting the axiom of choice.— Bull. Acad. Polon. Sci. ser. math., 1962, v. 10, № 1, p. 1—3.

[83] Mycielski J. On the axiom of determinateness.— Fund. Math., 1964, v. 53, № 2, p. 204—224.

[84] Коэн П. Дж. Независимость континуум-гипотезы.— Математика, 1965, т. 9, № 4, с. 141—155.

[85] Davies M. Infinite games of perfect information.— Ann. Math. Studies, 1964, v. 52, p. 85—101.

[86] Solovay R. M. On the cardinality of Σ^1_2 sets of reals.— In: Foundations of Mathematics.— Berlin: Springer, 1969, p. 58—73.

[87] Solovay R. M. A model of set theory in which every set of reals is Lebesgue measurable.— Ann. of Math., 1970, v. 92, № 1, p. 1—56.

[88] Martin D. A., Solovay R. M. Internal Cohen extensions.— Ann. of Math. Logic, 1970, v. 2, № 2, p. 143—178.

[89] Martin D. A. Borel determinacy.— Ann. of Math., 1975, v. 102, № 2, p. 363—371.

[90] Kechris A. S., Martin D. A. Infinite games and effective descriptive set theory.— In: Analytic sets.— London: Academic Press, 1980, p. 403—470.

[91] Hechler S. H. Independence results concerning a problem of N. Lusin.— Math. Systems Theory, 1970, v. 4, № 4, p. 316—321.

[92] M a n s f i e l d R. A Souslin operation for Π^1_2.— Israel J. Math., 1971, v. 9, № 3, p. 367—369.

[93] Л ю б е ц к и й В. А. Из существования неизмеримого множества типа A_2 вытекает существование неизмеримого множества, не содержащего совершенных подмножеств, типа CA.— ДАН СССР, 1970, т. 195, № 3, с. 548—550.

[94] Т а й м а н о в А. Д. О некоторых результатах, связанных с дескриптивной теорией множеств и топологией.— Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1973, т. 133, с. 203—213.

[95] S i l v e r J. Counting the number of equivalence classes of Borel and coanalytic equivalence relations.— Ann. of Math. Logic, 1980, v. 18, № 1, p. 1—28.

[96] M o s c h o v a k i s Y. Uniformisation in a playful universe.— Bull. Amer. Math., Soc., 1971, v. 77, № 5, p. 731—736.

[97] M o s c h o v a k i s Y. Descriptive set theory.— Amsterdam: North Holland, 1980.

[98] F r i e d m a n H. Higher set theory and mathematical practice.— Ann. of Math. Logic, 1971, v. 2, № 3, p. 326—357.

[99] V a u g h t R. L. Invariant sets in topology and logic. — Fund. Math., 1974, v. 82, № 2, p. 269—294.

[100] S a i n t R a y m o n d J. Functions boreliennes sur un quotients.— Bull. Soc. Math. France, 1976, v. 100, № 2, p. 141—147.

[101] S a i n t R a y m o n d J. Boreliens a koupes K_σ.— Bull. Soc. Math. France, 1976, v. 104, № 4, p. 389—400.

[102] H a r r i n g t o n L. Long projective wellorderings.— Ann. of Math. Logic, 1977, v. 12, № 1, p. 1—24.

[103] H a r r i n g t o n L. Analytic determinacy and $0^{\#}$.— J. Symbol. Logic, 1978, v. 43, № 4, p. 685—693.

[104] B u r g e s s J. A selector principle for Σ^1_1 equivalence relations.— Michigan Math. J., 1977, v. 24, № 1, p. 65—76.

[105] B u r g e s s J. Effective enumeration of classes in a Σ^1_1 equivalence relations.— Ind. Univ. Math. J., 1979, v. 28, № 3, p. 353—364.

[106] B u r g e s s J. Careful choices: a last word on Borel selectors.— Notre Dame J. Form. Logic, 1981, v. 22, № 3, p. 219—226.

[107] B u r g e s s J. Classical hierarchies from a modern standpoint.— Fund. Math., 1983, v. 115, № 2, p. 97—105.

[108] B u r g e s s J., M i l l e r D. Invariant descriptive set theory.— Fund. Math., 1975, v. 90, № 1, p. 53—75.

[109] S t e r n J. Partitions of the real line into $\aleph_1$ closed sets.— Lect. Notes in Math., 1978, v. 669, p. 455—460.

[110] S t e r n J. Suites transfinis d'ensembles Boreliens.— C. r. Acad. sci. Paris, ser. A—B, 1979, v. 288, № 10, p. 527—529.

[111] S t e r n J. Effective partitions of the real line into Borel sets of bounded rank.— Ann. of Math. Logic, 1980, v. 18, № 1, p. 29—60.

[112] S t e r n J. Analytic equivalence relations and coanalytic games.— In: Proc. Log. Symp. Patras.— Amsterdam, North Holland, 1982, p. 239—260.

[113] M i l l e r D. The invariant Π^0_α separation principle.— Trans. Amer. Math. Soc., 1978, v. 242, № 1, p. 185—204.

[114] Cabal seminar 76—77 (A. Kechris e.a. eds).— Lect. Notes in Math., 1978, v. 689.

[115] Cabal seminar 77—79 (A. Kechris e.a. eds).— Lect. Notes in Math., 1981, v. 839.

[116] Cabal seminar 79—81 (A. Kechris e.a. eds).— Lect. Notes in Math., 1983, v. 1019.

[117] F r e m l i n D., S h e l a h S. On the partitions of the real line.— Israel J. Math., 1979, v. 32, № 4, p. 299—304.

[118] L o u v e a u A. A separation theorem for Σ^1_1 sets.— Trans. Amer. Math. Soc., 1980, v. 260, № 2, p. 363—378.

[119] L o u v e a u A. Some results in the Wadge hierarchy of Borel sets.— Lect. Notes in Math., 1983, v. 1019, p. 28—55.

[120] C e n z e r D., M a u l d i n R. Inductive definability: measure and category.— Adv. Math., 1980, v. 38, № 1, p. 55—90.

[121] Steel J. R. Analytic sets and Borel isomorphisms.— Fund. Math., 1980, v. 108, № 2, p. 83—88.

[122] Steel J. R., Determinateness and the separation property.— J. Symbol. Logic, 1981, v. 46, № 1, p. 41—44.

[123] Harrington L., Kechris A. On the determinacy of games on ordinals.— Ann. of Math. Logic, 1981, v. 20, № 2, p. 109—154.

[124] Guaspari D. Trees, norms and scales.— London Math. Soc. Lect. Notes, 1983, v. 87, p. 135—161.

[125] Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств.— М.: Наука, 1982.

[126] Miller A. On the Borel classification of the isomorphism class of a countable model.— Notre Dame J. Form. Log., 1983, v. 24, № 1, p. 22—34.

[127] Miller A. Mapping a set of reals onto the reals.— J. Symbol. Logic, 1983, v. 48, № 3, p. 575—584.

[128] Кановей В. Г. Проективная иерархия Н. Н. Лузина: современное состояние теории.— В кн.: Справочная книга по математической логике, часть II. Теория множеств.— М.: Наука, 1982, с. 273—364.

[129] Кановей В. Г. Аксиома выбора и аксиома детерминированности.— М.: Наука, 1984.

[130] Кановей В. Г. Неразрешимые и разрешимые свойства конституант.— Мат. сб., 1984, т. 124 (166), № 4 (8), с. 505—535.

[131] Кановей В. Г. Аксиома детерминированности и современное развитие дескриптивной теории множеств.— В кн.: Современные проблемы математики, т. 23, алгебра, топология, геометрия.— М.: Наука, 1985.

[132] Успенский В. А. Вклад Н. Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания.— УМН, 1985, т. 40, вып. 3, с. 85—116.

[133] Успенский В. А., Кановей В. Г. Проблемы Лузина о конституантах и их судьба.— Вестн. МГУ. Сер. математика, механика, 1983, № 6, с. 73—87.

[134] Малыхин В. И. Топология и форсинг.— УМН, 1983, т. 38, вып. 1, с. 69—118.

[135] Будинас Б. Л. Из принципа селектора для аналитических отношений эквивалентности не следует существование полного A_2-упорядочения континуума.— Мат. сб., 1983, т. 120 (162); № 2, с. 164—179.

[136] Ершов Ю. Л., Лавров И. А., Павилёнис Р. И., Петров В. В., Смирнов В. А. Логика, основания математики и лингвистики (об итогах VII Международного конгресса по логике, методологии и философии науки).— Вопросы философии, 1984, т. 1, с. 45—58.

Московский институт
инженеров железнодорожного
транспорта

Поступила в редакцию
7 мая 1984 г.