

УДК 517.118

О КОРРЕКТНОСТИ ЭЙЛЕРОВА МЕТОДА РАЗЛОЖЕНИЯ СИНУСА
В БЕСКОНЕЧНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ

В. Г. Кановой

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	57
§ 1. Метод Эйлера. Основные положения	58
§ 2. О нестандартном анализе	61
§ 3. Вывод эйлеровых разложений средствами нестандартного анализа	62
§ 4. Конструкция Эйлера в системе нестандартного анализа	65
§ 5. О множителях и коэффициентах в конструкции Эйлера	69
§ 6. О том разложении на множители, которое Эйлер не пожелал завершить	69
§ 7. О суммировании бесконечно малых	71
§ 8. Формальная бесконечность как математический объект	73
§ 9. О представлениях экспоненты в виде ряда и в виде степени	76
§ 10. О сравнении коэффициентов нестандартных многочленов	79
Заключение	80
Список литературы	81

Введение

Один из наиболее замечательных разделов первого тома «Введения в анализ бесконечно малых» [1] Леонарда Эйлера составляют §§ 155—164 девятой главы, где великий автор дает разложение в бесконечное произведение линейных и квадратичных множителей для ряда трансцендентных функций, среди которых — гиперболический и круговой синусы. Для этих последних Эйлер выводит формулы:

$$(1) \quad \operatorname{sh} x = x \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots,$$

$$(2) \quad \sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

Формулы, разумеется, равносильны, ибо могут быть получены одна из другой подстановкой ix вместо x .

Сами по себе разложения синусов вряд ли могли бы вызвать сейчас, т. е. спустя два с половиной века, такой интерес, который оправдал бы публикацию настоящего исследования, если бы не удивительный метод, с помощью которого они получены во «Введении в анализ...». Выкладки Эйлера по данному вопросу поражают таким соединением простоты, легкости и интуитивной убедительности с нестрогостью едва ли не каждого шага рассуждений (происходящей от вольного обращения с бесконечностями), что, если учесть

красоту результата, бывшего для своего времени выдающимся, то всему этому нелегко будет подобрать аналог в математических исследованиях.

Конечно, после Эйлера были найдены вполне строгие и корректные доказательства равенств (1) и (2) как в рамках анализа [3, п. 407], так и средствами теории аналитических функций [4, гл. VII]. Не так давно был получен строгий их вывод с помощью нестандартного анализа — теории, в которой допускаются бесконечно большие и бесконечно малые величины в духе Лейбница (это рассуждение приведено в § 3).

Но все эти доказательства характеризуются тем, что они, корректно принося нужный результат, весьма существенно отклоняются от конструкции из «Введения в анализ...», оставляя тем самым неопределенность в вопросе, вынесенном в заголовок настоящей статьи. Мы предлагаем новый вывод формул (1) и (2), который, в отличие от упомянутых выше, пунктуально следует выкладкам Эйлера. При этом все неясности эйлеровых построений обосновываются и уточняются при помощи общих принципов классического анализа и нестандартного анализа. На основании этого предъявляемого доказательства мы делаем вывод о корректности данного Эйлером способа разложения в бесконечное произведение трансцендентных функций sh и $\sin$.

§ 1. Метод Эйлера. Основные положения

Ход рассуждений во «Введении в анализ...» настолько замечателен, что мы приведем его почти дословно, заключив в кавычки выдержки из [1] и сделав единственное изменение: буква i , которой Эйлер обозначает бесконечно большое число, заменена буквой ω .

Наше изложение для удобства разбито на пункты, соответствующие ключевым элементам эйлеровой конструкции. В тексте «Введения в анализ...» такой разбивки нет.

Великий математик начинает демонстрацию своего метода в § 155 с примера, где искомый результат не достигается непосредственно, однако сама эта относительная неудача неожиданно оказывается дополнительным аргументом в следующих ниже более успешных выкладках:

1. Итак, попытаемся разложить на множители функцию $e^x - 1$ (в этом и состоит пример, о котором идет речь), отправляясь от формулы

$$(3) \quad e^x = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega},$$

где натуральное ω бесконечно велико.

2. Эйлер использует установленную им в § 151 «Введения...» возможность разложить выражение $a^{\omega} - b^{\omega}$ на множители

$$(4) \quad t_k = a^2 + b^2 - 2ab \cos \frac{2k\pi}{\omega}, \text{ где } 0 < 2k < \omega,$$

к которым добавляются: множитель $a - b$ и, если ω — четное число, то множитель $a + b$.

3. В рассматриваемом случае следует взять $a = 1 + \frac{x}{\omega}$ и $b = 1$, и множители (4) принимают вид

$$(5) \quad t_k = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^2 + 1 - 2\left(1 + \frac{x}{\omega}\right) \cos \frac{2k\pi}{\omega}.$$

Дальше происходит преобразование t_k , при котором

$$(6) \quad \text{множитель } \cos \frac{2k\pi}{\omega} \text{ меняется на } 1 - \frac{2k^2\pi^2}{\omega^2}$$

«при обращении в нуль остальных членов вследствие бесконечности ω ». Эйлер имеет в виду, что «дуга $\frac{2k\pi}{\omega}$ бесконечно мала», и потому остальные

члены ряда Маклорена для косинуса «исчезают» по сравнению с первыми двумя, взятыми в (6). Получаем:

$$(7) \quad t_k = \frac{4k^2\pi^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{x^2}{4k^2\pi^2} + \frac{x}{\omega} \right).$$

Дополнительно имеется множитель $a - b = x/\omega$ и, если ω четно, то множитель $a + b = 2 + x/\omega$, Эйлером не рассматриваемый, вероятно, потому, что дробь x/ω бесконечно мала.

4. «Вследствии этого,— пишет Эйлер,— выражение $e^x - 1...$, кроме множителя x , будет иметь бесконечное число множителей

$$(8) \quad \left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2} + \frac{x}{\omega} \right) \left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2} + \frac{x}{\omega} \right) \left(1 + \frac{x^2}{36\pi^2} + \frac{x}{\omega} \right) \dots \text{ и т. д.}$$

Эти множители содержат бесконечно малую часть x/ω ; она входит в отдельные множители, и при перемножении их всех, числом $\omega/2$, производит член $x/2$; поэтому она опущена быть не может.

5. «Во избежание этого неудобства» Эйлер переходит в § 156 к рассмотрению функции

$$(3a) \quad 2 \operatorname{sh} x = e^x - e^{-x} = \left(1 + \frac{x}{\omega} \right)^\omega - \left(1 - \frac{x}{\omega} \right)^\omega,$$

где снова натуральное ω бесконечно велико.

6. Для этой функции возьмем $a = 1 + \frac{x}{\omega}$, $b = 1 - \frac{x}{\omega}$, и тогда

$$(5a) \quad t_k = \left(1 + \frac{x}{\omega} \right)^2 + \left(1 - \frac{x}{\omega} \right)^2 - 2 \left(1 - \frac{x^2}{\omega^2} \right) \cos \frac{2k\pi}{\omega}.$$

После преобразования (6) эти множители принимают вид

$$(7a) \quad t_k = \frac{4k^2\pi^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{\omega^2} \right).$$

7. «Итак, функция $e^x - e^{-x}$ будет делиться на

$$(8a) \quad 1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{\omega^2},$$

где член x^2/ω^2 может быть опущен без опасения, потому что даже после умножения на ω он останется бесконечно малым». Кроме того, $a - b = 2x/\omega$, т. е., продолжает Эйлер, «первый множитель будет равен x . Вследствие этого, после расположения этих множителей по порядку, будет

$$(9a) \quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x \left(1 + \frac{x^2}{\pi^2} \right) \left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2} \right) \left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2} \right) \dots.$$

8. «Отдельным множителям, путем умножения на соответствующую постоянную, я придал такой вид, чтобы при фактическом умножении получился первый член x ». Эйлер апеллирует к ряду Маклорена для гиперболического синуса, получаемому им тут же из ряда для экспоненты

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

9. Итак, разложение на множители функции sh закончено. Затем, в § 157 «Введения в анализ...», подобным же образом на основании исследования множителей выражения $a^\omega + b^\omega$ получено разложение для гиперболического косинуса, а после этого, в § 158, подстановкой «мнимого количества» ix вместо x — и разложение круговых синуса (формула (2)) и косинуса.

Оставшаяся часть (§§ 159—164) главы IX книги [1] содержит разложение на множители для более сложных комбинаций экспонент и тригономет-

рических функций. Полученные результаты Эйлер использует в последующих главах [1], а также в «Дифференциальном исчислении» [2] и других трудах, для суммирования числовых рядов и иных целей.

Но являются ли корректными приведенные выкладки? Вопрос этот представляется довольно-таки наивным, поскольку едва ли не каждый пункт рассуждений встречает возражения в плане строгости и обоснованности. В самом деле, современный математик мог бы задать автору «Введения в анализ...» как минимум следующие вопросы:

(А) Что такое бесконечно большое число и как следует понимать равенства (3) и (3а)?

(Б) Если мы условимся понимать бесконечно большое число как некое особое числовое образование, большее любого обычного, «конечного» числа, то на каком основании можно применять к такому числу указанный в п. 2 факт о разложении на множители?

(В) Еще как-то можно поверить в законность преобразования (6) и полученных на его основе выражений для t_k (пп. 3 и 6), если иметь в виду только конечные значения k . В этом случае дуга $2k\pi/\omega$ действительно бесконечно мала, и множители (5) и (7), а также (5а) и (7а), имея второй порядок малости относительно ω^{-1} и отличаясь лишь членами четвертого и более высоких порядков, действительно могут быть рассматриваемы в каждой паре один вместо другого (по крайней мере с определенной точки зрения). Но как быть с бесконечными k того же порядка величины, что и ω , когда отношение k к ω уже не будет бесконечно малым? Это наиболее спорный момент, и здесь доказательство Эйлера не согласуется, пожалуй, не только с требованиями строгости, но и с неформальной интуицией.

(Г) Как придать строгий вид положению о невозможности удалить «бесконечно малую часть x/ω » из множителей произведения (6) и о возможности опустить соответствующий член x^2/ω^2 в множителях (6а)? Объяснения Эйлера производят впечатление лишь на интуитивном уровне.

(Д) Правомерно ли определять величину числового множителя в выражении (9а) посредством сравнения коэффициентов при x произведения (9а) и ряда Маклорена для $\operatorname{sh} x$, или, другими словами, распространяется ли известное свойство многочленов на ряды и бесконечные произведения, если их рассматривать как «многочлены бесконечно большой степени»?

(Е) Куда пропадают постоянные коэффициенты $4k^2\pi^2/\omega^2$ (формула (7а) для t_k) и коэффициент $2/\omega$ при x в окончательной записи формулы (9а)? Их произведение, в соответствии с вычисленной величиной коэффициента, должно было бы быть равным числу 2 (или 4 при четном ω , когда еще имеется множитель $a + b = 2$), но простой подсчет при помощи формулы Стирлинга (см. § 5) дает для этого произведения бесконечно большую величину. Как устранить заключенное здесь несоответствие?

(Ж) Можно ли довести до конца прерванные Эйлером выкладки по функции $e^x - 1$? (пп. 3 и 4). В принципе этот вопрос не имеет прямого отношения к анализу вывода равенств (1) и (2), но ответить на него совершенно необходимо, если мы желаем до конца понять эйлеров метод.

(З) В записи формулы (9а) мы подразумевали бы сейчас произведение множителей $1 + x^2/k^2\pi^2$ с конечными натуральными k . Какой точки зрения придерживался на сей счет сам Эйлер — не вполне ясно, однако в любом случае необходимо установить, что происходит с отвечающими бесконечно большим индексам k множителями t_k при составлении окончательной формулы (9а).

Итак, цель настоящей статьи заключается в том, чтобы, найдя исчерпывающие разъяснения всех этих спорных моментов, пунктуально и совершенно строго провести всю конструкцию разложения гиперболического и кругового синусов в бесконечные произведения по Эйлеру. Этого, по нашему мнению, будет достаточно, а также и необходимо, для того, чтобы сделать заключение о корректности эйлерова метода.

§ 2. О нестандартном анализе

Отправным пунктом представленной в § 1 конструкции является использование бесконечно большого натурального числа — и это вообще ключевой момент для того, чтобы избрать путь для обоснования всего рассуждения.

Известно, что постоянные (или, как принято выражаться в логико-философской литературе, «актуальные», т. е. данные в законченном виде) бесконечно большие и бесконечно малые количества широко, хотя и не без некоторых колебаний, применялись Эйлером и его современниками, но были изгнаны из математики в ходе проведенной в XIX веке реконструкции основ анализа. Точнее говоря, эти понятия получили совершенно другой смысл и истолковываются как указания на стремление переменной величины к бесконечности или к нулю.

В принципе, такое современное понимание бесконечности оставляет возможность для строгой и корректной интерпретации эйлерова доказательства формул (1) и (2).

Однако при этом приходится прибегать к столь серьезной реконструкции всех выкладок, что значительно более привлекательной и соответствующей духу и букве трудов Эйлера представляется другая интерпретация математической бесконечности, известная как нестандартный анализ.

Система, получившая это название, была разработана в начале 60-х годов А. Робинсоном [5]. Обстоятельное изложение основ нестандартного анализа читатель может найти в нескольких источниках, в том числе на русском языке [5] — [8] (с обширным указателем литературы в последнем). Мы остановимся здесь лишь на тех положениях нестандартного анализа, которые необходимы для выполнения поставленной задачи, причем изложим их в максимально простом виде, совершенно не претендуя на пунктуальное следование тому или иному варианту строгой аксиоматики нестандартного анализа [10], [11] в деталях формального характера.

В рамках системы, о которой идет речь, обычные вещественные и комплексные числа называются *стандартными*. Но постулируется существование и нестандартных чисел, подразделяемых на три категории:

1) *бесконечно большие* числа. Число ω бесконечно велико, когда $|\omega| > c$ для любого стандартного вещественного c .

2) *бесконечно малые* числа. Число α — бесконечно малое, когда $|\alpha| < \varepsilon$ для любого вещественного стандартного $\varepsilon > 0$. Согласно такому определению, 0 — бесконечно малое число, причем единственное из стандартных чисел, относящееся одновременно и к бесконечно малым.

3) числа вида (стандартное) + (бесконечно малое, отличное от 0), которые уместно назвать *околостандартными*. К этой категории относятся, разумеется, все бесконечно малые, кроме нуля.

Околостандартные числа объединяются со стандартными под общим названием: *конечные* числа, в противоположность числам бесконечно большим.

Очень важно, что расширенный континуум *R нестандартного анализа, включающий нестандартные числа вместе со стандартными, обладает всеми внутренними свойствами стандартного континуума. («Внутренним» считается любое математическое свойство, формулируемое без упоминания о стандартности или нестандартности. Без такой оговорки можно прийти к противоречию, см. ниже.) Это фундаментальное положение — принцип переноса — позволяет вывести существование бесконечно большого натурального числа ω . В самом деле, в стандартном континууме всякое вещественное s мажорируется натуральным ω . Согласно принципу переноса, этот факт верен и в расширенном континууме. Применим его к любому бесконечно большому вещественному $s > 0$ и получим бесконечно большое натуральное $\omega \geq s$.

Для натуральных чисел понятия «стандартное» и «конечное» равносильны, так что нестандартный натуральный ряд начинается со стандартных нату-

ральных чисел, образующих собственный начальный сегмент, а затем продолжается бесконечно большими натуральными числами. Разумеется, среди конечных натуральных чисел нет наибольшего, а среди бесконечно больших — наименьшего (иначе что получится, если мы добавим или вычтем единицу?).

В этом нарушении принципа индукции нет противоречия с принципом переноса, поскольку свойство «быть конечным» не является внутренним. Для тех множеств, которые выделяются из нестандартного натурального ряда внутренними (т. е. обычными математическими) свойствами, принцип индукции справедлив как следствие принципа переноса.

Вообще же, принцип переноса означает, что с нестандартными числами можно оперировать так же, как и с элементами обычного, «стандартного» континуума, по крайней мере когда рассматриваются обычные математические множества и отношения.

Система нестандартного анализа позволила А. Робинсону и его последователям дать на уровне полной математической строгости изложение основ дифференциального и интегрального исчисления по Лейбницу и Эйлеру, т. е. с использованием бесконечно больших и бесконечно малых чисел. В нестандартном изложении некоторые важные математические понятия принимают необычный вид. В частности, нестандартное определение предела дается так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \text{ когда } a_\omega \simeq A \text{ для любого бесконечно большого натурального индекса } \omega.$$

Знак $\simeq$ обозначает бесконечную близость, т. е.

$$u \simeq v, \text{ когда разность } u - v \text{ бесконечно мала (в частности, возможно, точно равна нулю).}$$

Это определение предела эквивалентно стандартному. Теперь становится понятным начало эйлеровых выкладок. Именно, в формулах (3) и (3а) равенство меняется знаком $\simeq$. Итак,

$$(10) \quad e^x \simeq \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega \text{ и } e^x - e^{-x} \simeq 2 \operatorname{sh}_\omega x,$$

где

$$\operatorname{sh}_\omega x = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^\omega - \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^\omega \right],$$

— для любого бесконечно большого натурального ω и любого стандартного вещественного либо комплексного x . Понятна и цель: вывести, что

$$(11) \quad \operatorname{sh} x \simeq x \prod_{k=1}^v \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right)$$

для любого бесконечно большого натурального v и любого стандартного вещественного либо комплексного x . Формула (11) представляет собой нестандартный аналог и эквивалент равенства (1).

Теперь мы изложим доказательство того, что названо целью. Это доказательство, найденное У. А. Дж. Люксембургом [9], отклоняясь весьма значительно от рассуждений Эйлера и не разъясняя всех поставленных выше вопросов, является само по себе довольно простым и послужит хорошим введением в следующий ниже анализ выкладок Эйлера.

§ 3. Вывод эйлеровых разложений средствами нестандартного анализа

Зафиксируем стандартное комплексное x , относительно которого будем предполагать, что $x \neq k\pi i$ для целых k . Это предположение не ограничивает, разумеется, общности рассуждений, поскольку при $x = k\pi i$ равенство (1) можно считать очевидным.

Зафиксируем также бесконечно большое натуральное ν , для которого доказывается формула (11), положим $\omega = 2\nu + 1$ и постараемся разложить на множители многочлен $\text{sh}_\omega x$, приближающий функцию $\text{sh } x$ с бесконечно малой погрешностью на стандартных x согласно (10). Принцип переноса позволяет применить к этому многочлену бесконечно большой степени утверждение о разложении на множители, сформулированное в пункте 2 § 1. При этом множители (5а) приводятся к виду

$$\begin{aligned} t_k &= 2 + 2 \frac{x^2}{\omega^2} - 2 \left(1 - \frac{x^2}{\omega^2} \right) \left(1 - 2 \sin^2 \frac{k\pi}{\omega} \right) = \\ &= 4 \sin^2 \frac{k\pi}{\omega} \left(1 + \frac{x^2}{\omega^2 \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{\omega}} \right) = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{\omega} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2} h_k \right), \end{aligned}$$

где

$$h_k = \frac{k^2 \pi^2}{\omega^2 \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{\omega}}.$$

Вместе с этими множителями (для которых $1 \leq k \leq \nu$) имеется еще множитель $a - b = 2x/\omega$. Поэтому

$$\text{sh}_\omega x = \frac{1}{2} \left[2^\omega \prod_{k=1}^{\nu} \sin^2 \frac{k\pi}{\omega} \right] x \prod_{k=1}^{\nu} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2} h_k \right).$$

Полученное равенство представляет собой тождественное преобразование многочленов от x , и тогда из сравнения коэффициента при x в левой части (где он равен 1) и в правой части вытекает, что выражение в квадратных скобках равно 2, вследствие чего

$$(12) \quad \text{sh}_\omega x = x \prod_{k=1}^{\nu} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2} h_k \right).$$

Возможность устранить член h_k в этом равенстве обеспечивается следующей теоремой, которая, не присутствуя в тексте [9] явно, в общем, параллельна приведенным там аргументам. Напомним, что ν — фиксированное бесконечно большое натуральное число, и для удобства условимся, что знаки $\sum$

и $\prod$ без указания пределов обозначают действия $\sum_{k=1}^{\nu}$ и $\prod_{k=1}^{\nu}$.

Т е о р е м а. Пусть каждому натуральному k , $1 \leq k \leq \nu$, поставлены в соответствие комплексные (возможно, нестандартные) числа p_k и u_k . Тогда, во-первых, если $\sum |p_k| \simeq 0$ и выполнено следующее требование:

(а) найдется вещественное стандартное $\varepsilon > 0$ такое, что $|u_k| > \varepsilon$ для всех k , $1 \leq k \leq \nu$, то при этом будет: $[\prod (u_k + p_k)] / [\prod u_k] \simeq 1$.

Во-вторых, для обеспечения бесконечной малости суммы $\sum |p_k|$ является достаточным выполнение таких двух требований:

(б) $p_k \simeq 0$ для каждого конечного k , и

(в) найдется вещественное стандартное $\gamma > 0$ такое, что $|p_k| \leq \gamma k^{-2}$ для всех бесконечно больших $k \leq \nu$.

З а м е ч а н и е. Соответствие, о котором говорится в условии теоремы, предполагается внутренним в том смысле, как это понятие разъяснено в § 1. Другими словами, закон, определяющий p_k и u_k по значению индекса k , не должен быть связан с понятием стандартности. Такой характер имеют, к примеру, формулы (13) ниже и все прочие приложения теоремы в настоящей статье. Однако если мы определим $p_k = 1$ или 0 в зависимости от того, конечным или бесконечно большим является индекс k , то такое соответствие уже не будет внутренним.

При том способе доказательства теоремы, который здесь предлагается, требование о внутреннем характере соответствия используется только лишь для того, чтобы гарантировать выполнимость таких действий, как $\sum |p_k|$, в системе нестандартного анализа, для чего, строго говоря, нужно опираться на принцип переноса. Для приведенного несколькими строками выше «внешнего» набора чисел p_k действие $\sum |p_k|$ в нестандартной области *R не определяется.)

Доказательство теоремы. Суть дела становится более простой, если положить $z_k = p_k/u_k$. Тогда

$$\sum |z_k| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sum |p_k|, \text{ т. е. } \sum |z_k| \simeq 0.$$

Однако раскрыв скобки в правой части выражения

$$D = [\prod (u_k + p_k) / \prod u_k] - 1 = \prod (1 + z_k) - 1,$$

мы получим сумму всевозможных произведений чисел z_k между собой. Такая сумма не уменьшит, разумеется, абсолютной величины, если заменить каждое z_k на $|z_k|$. Поэтому, приняв во внимание также и то, что $1 + r \leq \exp(r)$ для любого вещественного r , получаем

$$|D| \leq \prod (1 + |z_k|) - 1 \leq \exp(\sum |z_k|) - 1,$$

т. е. $D \simeq 0$ в силу найденной выше бесконечной малости $\sum |z_k|$.

Для доказательства второй части теоремы (достаточность требований (б)

и (в) для бесконечной малости суммы $\sum_{k=n+1}^v |p_k|$) договоримся действия $\sum_{k=n+1}^v$

и $\sum_{h=1}^n$ обозначать через $\sum_{n+1}^n$ и $\sum$ соответственно.

Первый шаг. Число v — натуральное в системе нестандартного анализа, и поэтому любой «внутренний» набор из v вещественных чисел содержит наибольшее число (по принципу переноса). Число $p = \max_{1 \leq k \leq v} |p_k|$ будет бесконечно малым, ибо каждое p_k бесконечно мало согласно требованиям (б) и (в). Обозначим через n целую часть от (бесконечно большого) числа $p^{-0.5}$ (а если $p = 0$, то можно взять $n = v$). Тогда

$$\sum_{k=n+1}^v |p_k| \leq np \leq p^{-\frac{1}{2}} p = p^{\frac{1}{2}} \simeq 0.$$

Второй шаг. Убедимся, что и дополнительная сумма $\sum_{n+1}^v |p_k|$ бесконечно мала. Используется следующая оценка:

$$\sum_{k=n+1}^v |p_k| \leq v \sum_{k=n+1}^v k^{-2} \leq v \int_n^v \xi^{-2} d\xi \leq vn^{-1}.$$

Итак, $\sum_{n+1}^v |p_k| \simeq 0$, ибо n бесконечно велико, а поскольку и $\sum_{k=1}^n |p_k| \simeq 0$,

то полная сумма $\sum |p_k| = \sum_{k=1}^n |p_k| + \sum_{k=n+1}^v |p_k|$ также бесконечно мала.

Доказательство теоремы закончено.

Теперь, желая применить теорему для фиксированного в начале § 3 числа v и чисел

$$(13) \quad u_k = 1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}, \quad p_k = \frac{x^2}{k^2 \pi^2} (h_k - 1),$$

убедимся, что соответствующие требования выполнены.

(а) Для чисел k таких, что $|k| > |x|$, будет $|u_k| \geq 1/2$. Поэтому в качестве ε можно взять наименьшее из чисел $1/2$ и

$$\min\{|u_k|: -|x| \leq k \leq |x|\}.$$

С этим определением $\varepsilon > 0$, поскольку ни одно из чисел u_k нулю не равно (ибо число x не имеет вида $k\pi i$ по предположению).

(б) Если k конечно, то $k\pi/\omega \simeq 0$, ибо ω бесконечно велико. В то же время, $\operatorname{tg} \alpha/\alpha \simeq 1$ при любом бесконечно малом α . Поэтому $h_k \simeq 1$ и $p_k \simeq 0$ для конечных k .

(в) В области углов $0 < \alpha < \pi/2$ выполняется неравенство $0 < \alpha < \operatorname{tg} \alpha$, и поэтому, взяв $\alpha = k\pi/\omega$, мы получим $0 < h_k < 1$ при $1 \leq k \leq v$. Следовательно, $|p_k| < \gamma k^{-2}$, где $\gamma = |x|^2/\pi^2$.

Итак, теорему в самом деле можно применить к набору чисел (13), а это означает, что желаемая формула (11) есть следствие равенства (12) и соотношения (10). Этим заканчивается вывод (11).

Приведенное нами доказательство проясняет, разумеется, некоторые элементы эйлеровых выкладок из § 1. В частности, ответ на вопрос (А), даваемый самой концепцией нестандартного анализа и соотношениями (10), если и не соответствует полностью точке зрения Эйлера (обстоятельно изложенной в «Дифференциальном исчислении» [2]), то во всяком случае достаточно согласован с эйлеровым способом рассуждения о бесконечностях. Вопрос (Б) вполне разъясняется на основе принципа переноса. Но дальше выкладки У. А. Дж. Люксембурга существенно удаляются от конструкции из «Введения в анализ...», обходя, по существу, все остальные вопросы.

§ 4. Конструкция Эйлера в системе нестандартного анализа

Теперь, имея в виду главную задачу статьи, мы пунктуально рассмотрим эйлеровы построения в том виде, как они представлены в § 1, и дадим обоснование в системе нестандартного анализа для каждого из выделенных в § 1 ключевых пунктов. Попутно мы постараемся ответить и на вопросы (А) — (Д) (остальные три вопроса будут рассмотрены ниже).

Прежде всего, пусть x — стандартное вещественное либо комплексное число и $x \neq k\pi i$ для целых k . Эйлер не делает такой оговорки, но этот момент представляется малосущественным, так как при $x = k\pi i$ интересующий нас результат очевиден.

П у н к т ы 1 и 5. Понятие бесконечно большого числа и смысл равенств (3) и (3а) уже были разъяснены. В частности, равенство (3а) следует понимать как второе соотношение (10), где ω — бесконечно большое натуральное число. Это ответ на вопрос (А), а также исходное положение всей конструкции, целью которой является вывод равенства (1) в форме (11), причем в качестве v целесообразно взять целую часть от $(\omega - 1)/2$, так что $\omega = 2v + 1$ или $\omega = 2v + 2$. Посмотрим, как эта цель достигается.

П у н к т 2. Об ответе на вопрос (Б) уже сказано в конце § 3. Итак, аппроксимирующий многочлен

$$2 \operatorname{sh}_{\omega} x = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega} - \left(1 - \frac{x}{\omega}\right)^{\omega}$$

является произведением множителей t_k вида (5а) ($1 \leq k \leq v$), а также множителя $2x/\omega$ и, если $\omega = 2v + 2$ четно, то постоянного множителя 2.

Пункты 3 и 4, не касающиеся прямо разложения синусов, мы отложим до шестого параграфа.

П у н к т 6. Остановимся на некоторых особенностях преобразования (6) в применении к множителям (5а). Заменяя $\cos \frac{2k\pi}{\omega}$ на $1 - \frac{2k^2\pi^2}{\omega^2}$, Эйлер опускает сумму всех остальных членов ряда Маклорена для $\cos \alpha$ (хорошо извест-

ного в то время и выведенного выше в [1], § 134) при $\alpha = 2k\pi/\omega$. Эту сумму для дальнейшего обозначим через $2k^2\pi^2 a_k/\omega^2$, где, следовательно,

$$(14) \quad a_k = \frac{\omega^2}{2k^2\pi^2} \left(\cos \frac{2k\pi}{\omega} - 1 + \frac{2k^2\pi^2}{\omega^2} \right) = 1 - \left(\frac{\omega \sin \frac{k\pi}{\omega}}{k\pi} \right)^2.$$

С этим обозначением правильная форма множителя (5а) будет

$$(15) \quad t_k = 2 + \frac{2x^2}{\omega^2} - 2 \left(1 - \frac{x^2}{\omega^2} \right) \left(1 - \frac{2k^2\pi^2}{\omega^2} + \frac{2k^2\pi^2}{\omega^2} a_k \right) = \\ = 4 \frac{k^2\pi^2}{\omega^2} (1 - a_k) \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{\omega^2} + \frac{a_k}{1 - a_k} \frac{x^2}{k^2\pi^2} \right).$$

Таким образом,

$$(16) \quad \text{sh}_\omega x = \text{Const} \cdot x \prod \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{\omega^2} + \frac{a_k}{1 - a_k} \frac{x^2}{k^2\pi^2} \right),$$

где константа не зависит от x , а $\prod$ означает $\prod_{k=1}^v$ как в § 3.

Но Эйлер, применив преобразование (6), находит иную форму:

$$(17) \quad \text{sh}_\omega x \simeq \text{Const} \cdot x \prod \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{\omega^2} \right),$$

где константа также не зависит от x . Этот переход обосновывается применением теоремы предыдущего параграфа для набора чисел

$$(18) \quad u_k = 1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2} - \frac{x^2}{\omega^2}, \quad p_k = \frac{a_k}{1 - a_k} \frac{x^2}{k^2\pi^2}.$$

Проверяем выполнение требований из условия теоремы.

(а) Член x^2/ω^2 в u_k остается бесконечно малым при стандартном x и бесконечно большом ω , и потому рассуждение, проведенное в § 3 для проверки требования (а) для чисел вида (14), сохраняет свою силу и здесь.

(б) Если k конечно, то $k\pi/\omega \simeq 0$ и $a_k \simeq 0$, поскольку $\sin \alpha/\alpha \simeq 1$ для бесконечно малых α . Следовательно, и $p_k \simeq 0$ в этом случае.

(в) В области углов $0 < \alpha < \pi/2$ выполняется неравенство $2/\pi < \sin \alpha/\alpha < 1$. Положим $\alpha = k\pi/\omega$. Тогда, согласно определению (16),

$$(19) \quad \frac{a_k}{1 - a_k} = \left(\frac{\alpha}{\sin \alpha} \right)^2 - 1, \text{ т.е. } 0 < \frac{a_k}{1 - a_k} < \frac{\pi^2}{4} - 1 < 2,$$

и мы видим, что можно взять $\gamma = 2 |x|^2/\pi^2$ для оценки p_k .

Итак, теорема § 3 действительно применима, а это означает, что соотношение (17) есть следствие (16) (и с той же константой).

З а м е ч а н и е 1. Видно, что действие преобразования (6) на множители (5а) у Эйлера сводится к умножению истинного произведения множителей (15) на постоянное число (в ходе отбрасывания не зависящих от x коэффициентов $1 - a_k$) и к замене квадратичных множителей более простыми, которая выражается в умножении на коэффициент, хотя и зависящий от x , но бесконечно близкий к 1 при любом x рассматриваемого вида. В данном случае эти искажения не влияют на окончательный результат, поскольку константа все равно выбирается из других соображений. В этом и состоит ответ на вопрос (В): преобразование (6) сохраняет бесконечную близость не в абсолютном смысле, а с точностью до постоянного множителя.

З а м е ч а н и е 2. Некоторым недостатком в нашем обосновании перехода от (16) к (17) можно считать использование оценки (19) — простой, но не такой уж очевидной и, главное, начисто отсутствующей у Эйлера. Эта оценка проведена здесь на основании конкретных свойств функции $\cos$, и могло бы показаться, что Эйлеру несколько повезло, что в области $0 < \alpha < \pi/2$ выполняется неравенство $2/\pi < \sin \alpha/\alpha < 1$ — исходный пункт для

оценки (19). Но на самом деле ограниченность сверху стандартным числом для дроби $a_k/(1 - a_k)$ можно получить из совершенно других соображений.

Именно, пусть, напротив, $a_k \simeq 1$ для некоторого k . Тогда $\cos(2k\pi/\omega) \simeq 1$ по определению a_k , т. е. $2k\pi/\omega \simeq 0$. Однако по определению величина a_k должна быть бесконечно малой при бесконечно малом $\alpha = 2k\pi/\omega$ (имея в своем составе множитель α^2), а это противоречит исходной посылке $a_k \simeq 1$. При таком способе рассуждения мы используем лишь совершенно общие факты о ряде Маклорена, а также то обстоятельство, что уравнение $\cos \alpha = 1$ имеет единственное решение $\alpha = 0$ в области углов $0 \leq \alpha \leq \pi/2$.

П у н к т 7. Здесь происходит еще одно упрощение множителей, и формула (17) преобразуется к следующему виду:

$$(20) \quad \operatorname{sh}_\omega x \simeq \operatorname{Const} \cdot x \prod_{k=1}^v \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Этот переход совсем легко обосновывается теоремой § 3 при

$$u_k = 1 + x^2/k^2 \pi^2, \quad p_k = -x^2/\omega^2,$$

причем в этом случае

$$\sum |p_k| = vx^2/\omega^2 \simeq 0,$$

т. е. в сущности, как и у Эйлера, все сводится к тому, что член x^2/ω^2 даже после умножения на v (а $v/\omega \simeq 1/2$) остается бесконечно малым.

Итак, упомянутое в нашем вопросе (Г) рассуждение Эйлера имеет вполне реальное обоснование в части, касающейся множителей (6а).

П у н к т 8. Эйлер заключает, что константа в формуле (20) равна единице, на основании сравнения бесконечного произведения с рядом Маклорена для $\operatorname{sh} x$. В принципе, величину константы можно установить и без этого. Действительно, равенство (16) получено тождественным преобразованием многочлена, так что константа в (16) точно равна 1. А переход к (17), а затем и к (20), выполняется с помощью теоремы § 3, и потому величина константы остается той же. Тем не менее, поскольку мы желаем проверить корректность эйлеровых выкладок как таковых, то необходимо выяснить, на чем может быть основан аргумент о сравнении коэффициентов.

Для удобства, введем следующие обозначения:

$$(24) \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k+1)!}, \quad Q_n(x) = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

Тогда для бесконечно больших n и стандартных $x \neq k\pi i$ будет

$$(22) \quad xP_n(x) \simeq \operatorname{sh} x \simeq CxQ_n(x),$$

где C — константа из (20). В самом деле, левое соотношение представляет собой нестандартный аналог и эквивалент разложения

$$\operatorname{sh} x = x \left(1 + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + \dots\right)$$

(см. конец § 2), а правое — дериват (20) (при $v = n$) и (10). Проведем в (22) деление на x и, взяв снова $n = v$, получим

$$(23) \quad P_v(x) \simeq CQ_v(x) \text{ для стандартных } x \neq k\pi i.$$

Формально здесь нельзя сразу подставить $x = 0$ — а именно это как раз и желательно сделать, поскольку $P_v(0) = Q_v(0) = 1$, и мы получили бы, что $C = 1$. Если бы P_v и Q_v были стандартными многочленами, а соотноше-

ние (23) выполнялось бы в виде равенства, то искомый результат принесло бы следующее элементарное рассуждение, которое, вполне возможно, и учитывал Эйлер, производя свое сравнение коэффициентов:

«Выбрав $x \neq 0$ достаточно малым, можно добиться того, чтобы значения $P_v(x)$ и $Q_v(x)$ были сколь угодно близки к $P_v(0)$ и $Q_v(0)$ соответственно. Но при этом $P_v(x) = CQ_v(x)$, т. е. получается, что числа $P_v(0)$ и $CQ_v(0)$ сколь угодно близки одно другому, т. е. эти значения просто равны, что и требовалось».

Попробуем применить это рассуждение к нашей ситуации.

Сначала выполняется выбор «достаточно малого» значения x . Соотношение (23) справедливо, в частности, при $x = m^{-1}$, где m — конечное натуральное число, т. е. для таких m мы имеем

$$|P_v(m^{-1}) - CQ_v(m^{-1})| < m^{-1}.$$

Простое рассуждение из доказательства теоремы § 3 (первый шаг) показывает, что записанное неравенство остается верным и для некоторого бесконечно большого m , и тогда, обозначив $x = m^{-1}$, мы будем иметь $P_v(x) \simeq CQ_v(x)$, причем x бесконечно мало.

Теперь, чтобы вывести, что $C \simeq 1$, вполне достаточно воспользоваться следующим фактом:

$$(24) \quad P_v(x) \simeq 1 \simeq CQ_v(x).$$

Доказательство (24) сводится к простым оценкам:

$$1) \quad |P_v(x) - 1| \leq \sum_{k=1}^v |x|^{2k} \leq |x|^2/(1 - |x|^2) \leq 2|x|^2 \simeq 0.$$

$$2) \quad |Q_v(x) - 1| \leq \exp\left(\sum_{k=1}^v (|x|^2/k^2\pi^2)\right) - 1 \leq \\ \leq \exp(|x|^2 \sum (1/k^2\pi^2)) - 1 \leq \exp(|x|^2) - 1 \simeq 0.$$

(З а м е ч а н и е. Могло бы показаться, что выполнение первой оценки существенно зависит от фактического вида коэффициентов $a_k = 1/(2k+1)!$ многочлена P_v , поскольку мы воспользовались их ограниченностью. Однако ограниченность можно получить прямо из (22). Действительно, если $k \leq v$ бесконечно велико, то

$$a_k = P_k(1) - P_{k-1}(1) \simeq \text{sh } 1 - \text{sh } 1 = 0,$$

и потому $a_k \simeq 0$ для бесконечно больших k . Следовательно, наибольшее натуральное $k \leq v$ удовлетворяющее $|a_k| \geq 1$, обязано быть конечным. Возьмем теперь в качестве ограничивающего числа M наибольшее из чисел $1, |a_0|, |a_1|, \dots, |a_k|$. Число M конечно и $|a_k| \leq M$ для любого $k \leq v$.)

Итак, установлено, что $C \simeq 1$, а потому можно положить константу C в (20) просто равной 1. Если теперь вспомнить формулу (10), то мы получим окончательный результат:

$$(25) \quad \text{sh } x \simeq x \prod_{k=1}^v \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right).$$

Этим заканчивается наш анализ п. 8 эйлеровых рассуждений, дающий попутно и разъяснение того, о чем сказано в вопросе (Д).

П. 9 не содержит ничего интересного, и нет нужды его рассматривать.

Итак, мы показали, что эйлерова конструкция по разложению в бесконечное произведение гиперболического и кругового синусов проведена корректно, или, точнее говоря, может быть представлена как вполне строгая и корректная на базе:

1) некоторых элементарных фактов математического анализа, таких, как сходимость ряда $\sum k^{-2}$ или стремление к единице отношения $\sin \alpha$ к α при $\alpha \rightarrow 0$;

2) некоторых простых оценок, основанных на этих фактах;

3) положений нестандартного анализа, более или менее адекватно интерпретирующих свойственные Эйлеру приемы обращения с бесконечностью математического анализа.

Это и дает нам смелость считать обоснованным главный тезис настоящей статьи — корректность метода Эйлера.

Выполнив, таким образом, основную задачу, мы остановимся теперь более подробно на некоторых вопросах, рассмотренных выше в той лишь степени, как они непосредственно касаются эйлеровой конструкции, но, как мы надеемся показать, заслуживающих и отдельного внимания. Одновременно будут рассмотрены и вопросы (Е), (Ж), (З).

§ 5. О множителях и коэффициентах в конструкции Эйлера

В этом параграфе речь пойдет о неясности, упомянутой в вопросе (Е) из § 1. Сначала рассмотрим постоянные коэффициенты для множителей в форме (7а) и представим то вычисление, которое дает бесконечно большую величину для их произведения.

Для определенности, пусть число ω нечетно: $\omega = 2\nu + 1$. Используется формула Стирлинга: $\nu! \sim \nu^\nu e^{-\nu} \sqrt{2\pi\nu}$, где запись $r \sim q$ означает, что $r/q \simeq 1$. Итак,

$$\begin{aligned} \frac{2}{\omega} \prod_{k=1}^{\nu} \frac{4k^2\pi^2}{\omega^2} &= \frac{2^\omega \pi^{\omega-1} (\nu!)^2}{\omega^\omega} \sim \frac{2^\omega \pi^{\omega-1} \nu^{2\nu} \cdot 2\pi\nu}{e^{2\nu} \omega^\omega} = \\ &= \frac{(2\nu)^{2\nu+1} \cdot 2\pi^\omega}{e^{2\nu} (2\nu+1)^{2\nu+1}} = \frac{2\pi^\omega}{e^{\omega-1} \left(1 + \frac{1}{2\nu}\right)^{2\nu+1}} \sim 2 \frac{\pi^\omega}{e^\omega}, \end{aligned}$$

т. е. величина бесконечно большая, а никак не значение 2, вытекающее из сравнения индексов.

Разгадка этого несоответствия простая: достаточно взглянуть на правильную форму (15) для множителя t_k , откуда видно, что в состав постоянного коэффициента, помимо члена $4k^2\pi^2/\omega^2$, входит и не указанный Эйлером член $1 - a_k$. Эти числа $1 - a_k$, перемножаясь друг с другом ($1 \leq k \leq \nu$), дают величину бесконечно малую и в точности соответствующую вычисленному значению $2\pi^\omega/e^\omega$ в том смысле, что общее произведение будет равно 2. Это можно увидеть хотя бы из того, что

$$\frac{4k^2\pi^2}{\omega^2} (1 - a_k) = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{\omega},$$

а произведение таких множителей (еще с множителем $2/\omega$), подсчитанное в § 3, как раз и равно числу 2.

§ 6. О том разложении на множители, которое Эйлер не пожелал завершить

Здесь мы рассмотрим то незаконченное рассуждение Эйлера, которым он хотел бы найти разложение на множители функции $e^x - 1$ (пп. 3 и 4 § 1). Не исключено, что великий автор «Введения в анализ...» предположил эту выкладку выводу основного результата — разложения гиперболического синуса — в качестве дополнительного и скорее психологического аргумента для обоснования возможности опустить член x^2/ω^2 из множителей (8а).

Тем не менее, рассуждение Эйлера может быть завершено достижением требуемого результата, и мы сейчас это покажем.

Прежде всего, приведем правильную формулу разложения (в стандартной записи):

$$(26) \quad e^x - 1 = e^{x/2} \operatorname{sh} \frac{x}{2} = e^{x/2} x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{4k^2\pi^2} \right).$$

После сравнения с выражением (8), можно заметить, что если, вопреки сказанному Эйлером, мы опустим член x/ω их множителей (8), то получим неправильный результат, отличающийся от (26) отсутствием множителя $e^{x/2}$. Между тем, сам этот множитель можно рассматривать как $\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega/2}$ в соответствии с (3), где $\omega/2$ — общее число множителей (8) (точнее, целая часть от $(\omega - 1)/2$). Таким образом, путь к получению разложения (26) может проходить через замену каждого множителя (8) на произведение двух множителей:

$$1 + \frac{x}{4k^2\pi^2} + \frac{x}{\omega} \quad \text{на} \quad \left(1 + \frac{x}{\omega}\right) \left(1 + \frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right).$$

Можно попытаться представить себе, как довел бы до конца свое рассуждение Эйлер, если бы ему было угодно поставить перед собой такую цель.

(Продолжая сказанное в п. 4) «Чтобы преодолеть возникшую трудность, представим каждый из полученных множителей в виде произведения двух сомножителей, первый из которых имеет общий для всех множителей вид

$$1 + \frac{x}{\omega},$$

давая для числа $\omega/2$ всех таких сомножителей значение

$$\left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\frac{\omega}{2}} = e^{\frac{x}{2}},$$

а вторые сомножители образуют произведение

$$\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{16\pi^2}\right) \left(1 + \frac{x^2}{36\pi^2}\right) \dots$$

Образующийся от такого представления дополнительный член

$$\frac{x^2}{4k^2\pi^2} \cdot \frac{x}{\omega} = \frac{x^3}{4k^2\pi^2\omega}$$

может быть опущен без опасения, поскольку вследствие бесконечности числа ω он находится в бесконечно малом отношении к оставаемому члену $x^2/4k^2\pi^2$:

$$\frac{x^3}{4k^2\pi^2\omega} \div \frac{x^2}{4k^2\pi^2} = \frac{x}{\omega} \simeq 0.$$

(Все это рассуждение есть не более чем жалкое подражание глубокомыслию Эйлера и изысканному слогу его переводчиков, и единственным извинением для такой попытки автор настоящей статьи считает естественное желание оказаться в необычной для современного математика роли прямого продолжателя и интерпретатора идей великого Эйлера, хотя бы и в связи с малоактуальным сейчас и вообще незначительным вопросом.)

Теперь покажем, каким образом становится строгим с точки зрения нестандартного анализа рассматриваемый вывод равенства (26), состоящий из рассуждений Эйлера (пп. 3 и 4 § 1) и предложенного нами их возможного завершения.

Пусть, как и выше, ω — бесконечно большое натуральное число и ν есть целая часть от $(\omega - 1)/2$. Фиксируем стандартное $x \neq k\pi i$. Множитель (5) принимает вид

$$t_k = \frac{4k^2\pi^2}{\omega^2}(1 - a_k) \left(1 + \frac{x^2}{4k^2\pi^2} + \frac{x}{\omega} + \frac{a_k}{1 - a_k} \frac{x^2}{4k^2\pi^2} \right),$$

где a_k дается формулой (14). Четвертое из записанных в правых скобках слагаемых при перемножении множителей t_k может быть опущено на основании теоремы § 3 в полной аналогии со сделанным в § 4 (переход от равенства (16) к (17)), а вместо него, на том же основании, можно добавить нужное нам слагаемое $x^3/4k^2\pi^2\omega$ (оно удовлетворяет требованиям (б) и (в) теоремы § 3). Таким образом,

$$\begin{aligned} e^x - 1 &\simeq \text{Const} \cdot x \prod \left(1 + \frac{x^2}{4k^2\pi^2} + \frac{x}{\omega} + \frac{x^3}{4k^2\pi^2\omega} \right) = \\ &= \text{Const} \cdot x \left(1 + \frac{x}{\omega} \right)^\nu \prod \left(1 + \frac{x^2}{4k^2\pi^2} \right) \simeq \text{Const} \cdot e^{x/2} x \prod \left(1 + \frac{x^2}{4k^2\pi^2} \right), \end{aligned}$$

где произведение $\prod$ можно понимать как $\prod_{k=1}^\nu$ в нестандартном варианте и

как $\prod_{k=1}^\infty$ в стандартном. Наконец, по аналогии с соответствующим моментом в § 4, можно видеть, что константа бесконечно мало отличается от единицы, и потому, опуская константу, мы приходим к искомому разложению (26).

Этим показана корректность обозначенного Эйлером, но не доведенного им до конца вывода разложения (26) на множители для функции $e^x - 1$, и дан ответ на вопрос (Ж) из § 1.

§ 7. О суммировании бесконечно малых

В этом параграфе мы проанализируем более подробно, чем это сделано в § 3, ту часть теоремы § 3, которая утверждает бесконечную малость суммы

$$\sum |p_k| = \sum_{k=1}^\nu |p_k|$$

при выполнении условий:

- (б) член p_k бесконечно мал для всякого конечного индекса k ;
- (в) найдется стандартное вещественное число $\gamma > 0$ такое, что для любого бесконечно большого k будет $|p_k| \leq \gamma k^{-2}$.

Способ доказательства этого положения заключался в том, что, во-первых, сумма

$$\sum_{k=1}^n |p_k| = \sum_{k=1}^n |p_k|$$

бесконечно мала для подходящего бесконечно большого $n < \nu$, и, во-вторых, дополнительная сумма

$$\sum_{n+1}^\nu |p_k| = \sum_{k=n+1}^\nu |p_k|$$

также бесконечно мала, причем уже фактически для любого бесконечно большого $n < \nu$. Первое утверждение основано на требованиях (б) и (в). Второе же утверждение доказано посредством очень простой оценки, опирающейся на условие (в), причем можно сказать, что результат останется в силе и в случае, когда вместо ограничивающего неравенства из (в) мы примем ограничение чисел $|p_k|$ сверху членами любого сходящегося в стандартном смысле знакоположительного ряда.

В таком рассуждении можно видеть некоторую несообразность, выраженную в неопределенности с выбором «критического» значения n : любое бесконечно большое $n' < n$ может быть взято вместо n . Здесь хотелось бы использовать наименьшее число n , которое может сыграть в доказательстве нужную роль, т. е. в данном случае просто наименьшее из бесконечно больших натуральных n . Вся беда, однако, в том, что в системе нестандартного анализа такого числа нет, а точнее, предположение о его существовании немедленно приводит к противоречию (см. § 2).

Допустим, тем не менее, что существует «число» ∞ неясной пока природы, расположенное на числовой оси между конечными и бесконечно большими числами. Обратное «число» ∞^{-1} будет в таком случае отграничивать бесконечно малые числа от положительных, не являющихся бесконечно малыми.

Проведем теперь следующее рассуждение, цель которого — вывести бесконечную малость суммы $\sum |p_k|$ при выполнении (б) и (в).

Суммирование по областям $k < \infty$ и $k > \infty$ проводится отдельно. Для оценки первой суммы заметим, что при любом конечном k , благодаря бесконечной малости слагаемого p_k , будет $|p_k| < \infty^{-1}$ и, более того, $|p_k| < \infty^{-2}$, ибо $|p_k|^{\frac{1}{2}}$ бесконечно мало вместе с p_k . Сама же величина $\sum |p_k|$ становится бесконечно малой как сумма в числе ∞ слагаемых, не превосходящих ∞^{-2} .

Оценка же второй суммы совершенно повторяет данную в § 3:

$$\sum_{\infty+1} |p_k| = \sum_{\infty < k < \nu} |p_k| \leq \gamma \int_{\infty}^{\nu} \xi^{-2} d\xi \leq \gamma \infty^{-1},$$

откуда и следует бесконечная малость.

Можно предполагать, что это «доказательство» было бы охотнее принято Эйлером, чем более точные рассуждения из § 3, где бесконечность ∞ получает интерпретацию в виде «достаточно малого» бесконечно большого натурального n . Какова может быть «несобственная» интерпретация для ∞ — мы увидим ниже, а пока приведем еще два рассуждения.

С у м м а р я д а. Согласно сказанному в конце § 2 о пределе последовательности, для сходимости стандартного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ к стандартному числу A

необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^n a_k \simeq A$ для любого бесконечно большого n , а критерием существования такого числа A является требование

бесконечной малости суммы $\sum_{k=n+1}^{\nu} a_k$ для любой пары бесконечно больших натуральных $n < \nu$ (нестандартный критерий Коши). Взяв здесь ∞ вместо n , мы можем получить следующую интерпретацию соотношения между стандартной и нестандартной сходимостью:

$$\sum_{k=1}^{\nu} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k > \infty}^{\nu} a_k.$$

причем вторая сумма в правой части бесконечно мала, а потому при суммировании до бесконечно большого ν результат (с точностью до бесконечно малой добавки) определяется лишь слагаемыми с конечными индексами k .

Подобный анализ допускают и *бесконечные произведения*, только вместо бесконечной малости необходимо рассмотреть бесконечную близость сомно-

жителей к единице. В частности, окончательная формула (25) может быть записана в виде

$$(27) \quad \operatorname{sh} x \simeq x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right) \prod_{k > \infty}^{\nu} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right),$$

где второе произведение бесконечно близко к единице (и это будет строгим фактом нестандартного анализа, если вписать вместо ∞ любое бесконечно большое $n < \nu$). Попробуем установить на основе такого представления роль множителей t_k с конечными и бесконечно большими индексами k в эйлеровой конструкции.

Для определенности, пусть бесконечно большое ω нечетно: $\omega = 2\nu + 1$. Согласно выкладкам § 4, каждый множитель t_k вида (5а) может быть изображен следующим образом:

$$t_k = \frac{4k^2 \pi^2}{\omega^2} (1 - a_k) \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right) = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{\omega} \left(1 + \frac{x^2}{k^2 \pi^2}\right).$$

(Мы опустили для простоты зависящий от x , но бесконечно близкий к 1 при любом стандартном x сомножитель, появляющийся от применения теоремы § 3 в переходах (16) $\rightarrow$ (17) $\rightarrow$ (20), см. замечание 1 в § 4.) При этом равная 1 константа в (20) (переходящая в (25)) являет собой произведение

$$C_\nu = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\omega} \prod_{k=1}^{\nu} \frac{4k^2 \pi^2}{\omega^2} (1 - a_k)$$

постоянных коэффициентов множителей t_k с коэффициентом $2/\omega$ множителя $2x/\omega$ и еще коэффициентом $1/2$ в формуле для sh .

Таким образом, возвращаясь к представлению (27) формулы (25), мы можем сказать, что функциональная структура гиперболического синуса определяется множителями t_k с конечными индексами k (и отдельным множителем $2x/\omega$). Множители t_k бесконечного индекса участвуют лишь в формировании равной 1 константы C_ν , а формальная их зависимость от x выражается в умножении на величины, бесконечно близкие к 1 при любом стандартном x (и по отдельности, и в произведении). В то же время просто удалить множители t_k с бесконечно большими k невозможно, поскольку правительные множители $1 + x^2/k^2 \pi^2$ в составе «неотнормированных» t_k связаны с бесконечно малыми (при конечных k) числовыми коэффициентами, «нейтрализация» которых и является функцией множителей t_k с бесконечно большими индексами k .

Это рассуждение мы предлагаем в качестве ответа на последний вопрос (3) из § 1. Разумеется, в системе нестандартного анализа все сказанное имеет строгий смысл лишь при том, что мы возьмем вместо ∞ произвольное бесконечно большое натуральное $n < \nu$, что соответствует присоединению к конечным натуральным индексам некоторой «сколь угодно малой» части бесконечно больших индексов. И вопрос теперь в том, как найти «несобственную» интерпретацию символа формальной бесконечности ∞ , точно отражающую то требование, с которого мы начали: отделять конечные числа от положительных бесконечно больших.

§ 8. Формальная бесконечность как математический объект

Предлагаемая здесь «модель» формальной бесконечности очень проста: она основана на том аппарате сечений, посредством которого Дедекинд дал определение действительного числа «по Дедекинду». Именно, обозначим через ∞ сечение $I|J$ нестандартного континуума *R , нижний класс I которого содержит все нестандартные вещественные числа, не являющиеся бесконечно большими положительными (т. е. конечные плюс отрицательные

бесконечно большие), а верхний класс — все бесконечно большие положительные числа (в том числе все бесконечно большие натуральные числа).

Здесь уместно сказать несколько общих слов о сечениях $*R$. Известно, что каждое сечение $A \mid B$ стандартного континуума R дедекиндово (т. е. либо в нижнем классе A имеется наибольший элемент, либо в верхнем классе B — наименьший элемент), и это положение является одной из формулировок полноты R . По принципу переноса (см. § 2) всякое заданное внутренним свойством сечение $*R$ также будет дедекиндовым. Однако среди сечений $*R$ имеются и не «внутренние» — пример дает введенное только что сечение $\infty = I \mid J$, не являющееся, очевидно, дедекиндовым. Определение этого сечения не является внутренним, поскольку понятие бесконечно большого числа апеллирует к «внешнему» свойству стандартности.

Итак, дедекиндово расширение $\mathcal{R}$ нестандартного континуума $*R$ образовано всевозможными недедекиндовыми сечениями $*R$, к которым добавлены дедекиндовы сечения вида

$$\{x \in *R : x \leq a\} \mid \{x \in *R : x > a\},$$

где $a \in *R$, отождествляемые с соответствующими стандартными или нестандартными числами a .

Среди прочего, «суперконтинуум» $\mathcal{R}$ содержит «число» ∞ , обратное ему «число» $\emptyset$, т. е. сечение, верхним классом которого является совокупность всех положительных $x \in *R$, не являющихся бесконечно малыми; противоположные им по знаку «числа» $-\infty$ и $-\emptyset$ и др. Определив известным образом (т. е. соответственно включению нижних классов) линейный порядок на $\mathcal{R}$, мы получаем $x < \infty < \xi$ для любого конечного $x \in *R$ и любого бесконечно большого $\xi \in *R$, и поэтому «число» ∞ отделяет в $\mathcal{R}$ конечные числа от положительных бесконечно больших, чего и следовало ожидать. Подобным же образом, обратное «число» $\emptyset$ отделяет бесконечно малые от положительных не являющихся бесконечно малыми чисел.

Итак, символу ∞ из рассуждений § 7 придан точный смысл сечения в $*R$ и «числа» из дедекиндова расширения $\mathcal{R}$ нестандартного континуума $*R$.

В попытке определить арифметическую структуру $\mathcal{R}$ мы встречаемся с явлением, которому нет аналога в дедекиндовом расширении поля рациональных (стандартных) чисел до стандартного континуума R . Легче всего это можно увидеть на примере разности, которая по Дедекинду имеет следующее определение:

$$(A_1 \mid B_1) - (A_2 \mid B_2) = (A_1 - B_2) \mid (B_1 - A_2),$$

где класс $A_1 - B_2$ образован всевозможными разностями $a_1 - b_2$, $a_1 \in A_1$ и $b_2 \in B_2$, и аналогично $B_1 - A_2$. Однако, в отличие от дедекиндова расширения поля рациональных чисел, здесь может случиться так, что пара $(A_1 - B_2) \mid (B_1 - A_2)$ не образует сечение $*R$. Например, если мы пожелаем найти по данному определению разность $\infty - \infty$, то нижний класс $I - J$ включит отрицательные бесконечно большие числа, а верхний $J - I$ — положительные бесконечно большие; конечные же числа останутся вне обоих классов. Итак, действие $\infty - \infty$ невыполнимо в $\mathcal{R}$ (в рамках дедекиндовых определений), и в этом можно видеть параллель с одной из основных неопределенностей классической теории пределов. Такова же в точности ситуация с другими неопределенностями, такими, как $0 \cdot \infty$, ∞ / ∞ , 1^∞ и т. п.; при этом классическому нулю соответствует «число» $\emptyset \in \mathcal{R}$.

В других случаях операции в $\mathcal{R}$ приносят определенные результаты, не лишённые интереса. Так,

$$\infty + 2 = \infty \cdot 2 = \infty^2 = \infty; \emptyset = \frac{1}{\infty}; \emptyset + \emptyset = \emptyset.$$

Эти и подобные им равенства хорошо известны в теории пределов, где знак ∞ трактуется в формальном смысле — как символ величины, стремящейся

к положительной в данном случае бесконечности, и в таком же смысле трактуются и сами равенства. Здесь же они становятся математически строгими следствиями данных определений, присваивающих знаку ∞ смысл определенного математического объекта.

Но вернемся к тем вопросам, которые рассматривались в § 7. Неопределенность произведения $\emptyset \cdot \infty$ не позволяет, к сожалению, придать смысл изложенному в § 7 доказательству бесконечной малости суммы $\sum |p_k|$ на основе только лишь формальных правил действия с «числами» ∞ и $\emptyset = \infty^{-1}$. Преодолеть эту трудность можно при помощи следующего определения.

О п р е д е л е н и е. Пусть F — внутренняя функция одного вещественного аргумента, и A — стандартное число. Тогда соотношение $F(\infty) \simeq A$ имеет место в любом из таких двух случаев:

1) (предел снизу) $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = A$ в стандартном смысле, т. е. ко всякому положительному $\varepsilon \in R$ найдется $x_\varepsilon \in R$ такое, что $|F(x) - A| < \varepsilon$ при любом $x \in R$, $x > x_\varepsilon$;

2) (предел сверху) Найдется бесконечно большое $X \in {}^*R$ такое, что $F(x) \simeq A$ при любом бесконечно большом $x \leq X$.

(Определение непротиворечиво, т. е. не может дать двумя своими случаями двух различных стандартных значений для $F(\infty)$ — это нетрудно показать на основе принципа переноса.)

В простейшем случае постоянной функции $F(x) = 0$ мы получаем $F(\infty) \simeq 0$. То же будет и в случае, когда $F(x) = x^{-1}$. Однако, если мы попытаемся указать точное значение для $F(\infty)$, то должны будем написать $F(\infty) = 0$ в первом случае и $F(\infty) = \emptyset$ во втором. Это наводит на мысль, что данное определение можно сформулировать в виде равенства, а не отношения бесконечной близости $\simeq$, причем в качестве возможных значений $F(\infty)$ могут выступать: а) стандартные числа; б) несобственные «числа» из $\mathcal{R}$ вида (стандартное) $\pm \emptyset$; и в) «числа» $\pm \infty$. Мы не будем дальше углубляться в этот интересный вопрос построения аналитической структуры $\mathcal{R}$; здесь возможно много занимательных задач, и они требуют отдельного рассмотрения.

Что же касается бесконечной малости суммы $\sum |p_k|$ в § 7, то с точки зрения данного определения и введенной здесь интерпретации для ∞ выкладки из § 7 получают вполне определенный смысл. Наиболее любопытное рассуждение получается, когда мы доказываем бесконечную малость суммы по области $k < \infty$, используя определение в форме предела сверху. В принципе, здесь можно было бы взято ту выкладку из доказательства теоремы § 3, где доказана бесконечная малость суммы $\sum^n |p_k|$ для некоторого бесконечно большого $n \leq v$ (а тогда это верно и для любого $n' \leq n$). Но эта выкладка имеет недостаток, заключающийся в использовании требования (в), поскольку соответствующее рассуждение в § 7 (т. е. доказательство бесконечной малости суммы по области $k < \infty$) на (в) не опирается.

Указанный недостаток можно преодолеть так. Рассмотрим наибольшее натуральное $\mu \leq v$ (где v — верхняя граница суммирования в § 7), обладающее тем свойством, что $|p_k| < k^{-1}$ при любом $k \leq \mu$. Число μ бесконечно велико, поскольку для конечных k неравенство $|p_k| < k^{-1}$ выполняется вследствие бесконечной малости этих p_k согласно требованию (б). Кроме того, слагаемое p_k будет бесконечно малым для любого $k \leq \mu$ — для бесконечно больших k по построению μ , а для конечных k по требованию (б).

После этого, взяв найденное μ вместо v в той выкладке из доказательства теоремы § 3, о которой мы говорили, мы найдем бесконечно большое $n \leq \mu$, удовлетворяющее соотношению $\sum_x^n |p_k| \simeq 0$ при $x = n$. Это соотношение будет выполнено, разумеется, и при любом $x < n$ (вместо x следует

взять целую часть от x). Теперь, согласно предложенному определению, мы немедленно получаем $\sum_{k=1}^{\infty} |p_k| \simeq 0$, что и требовалось.

В таком же духе можно интерпретировать и другие рассуждения из § 7, а также всю эйлерову конструкцию в целом. Однако очень интересной выглядит задача построения другой интерпретации. Мы имеем в виду сразу взять $v = \infty$ (или $\omega = \infty$) в рассуждениях §§ 1, 3, 4. Принципиальных трудностей здесь, пожалуй, нет, и вопрос заключается в том, чтобы найти доказательство, не сводящееся прямо к применению данного определения. Может заслужить внимания, в частности, такой нюанс: при $v = \infty$ остаются в рассмотрении лишь множители t_k , соответствующие конечным индексам k . Анализ этого обстоятельства откроет, вероятно, новые грани эйлерова метода.

Скажем несколько слов еще об одной задаче. Неопределенности аналитической структуры $\mathcal{R}$ могут возникать не только вследствие дедекиндовых определений действий. Например, будет ли целым «число» ∞ в структуре $\mathcal{R}$? Ответить на этот вопрос на основе нашего определения невозможно, поскольку любая окрестность ∞ в $\mathcal{R}$ содержит как целые, так и дробные нестандартные числа (причем и слева, и справа). Нужно найти более широкое определение, которое принесло бы разумный ответ на вопрос о «целости» ∞ в $\mathcal{R}$.

Вообще, можно ли придать (согласованным образом) значение в $\mathcal{R}$ для каждой неопределенности (любого характера и происхождения), рассматривая эти неопределенности по очереди (мы имеем в виду конструкцию, подобную построению ультрафильтра с помощью аксиомы выбора), или как-либо еще, и какой смысл может быть во всем этом? Для того чтобы продемонстрировать нетривиальность этой задачи и интересные возможности рассуждений в связи с нею, приведем следующий пример.

Мы утверждаем, что $\sin \infty = 0$. Действительно, поскольку

$$\infty + \pi = \infty \text{ и } \sin(x + \pi) = -\sin x,$$

то другого варианта нет. Аналогично, $\cos \infty = 0$. Но в то же время, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ для любого стандартного или нестандартного x , т. е. здесь исчезает ассоциативность суперпозиции:

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)|_{x=\infty} \neq (\sin \infty)^2 + (\cos \infty)^2.$$

§ 9. О представлениях экспоненты в виде ряда и в виде степени

Целью этого параграфа является анализ тех рассуждений, посредством которых Эйлер получил формулы

$$(28) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots,$$

$$(29) \quad e^x = \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega}, \text{ где } \omega \text{ бесконечно велико.}$$

Напомним, что вторая формула есть отправной пункт эйлеровых рассуждений в § 1, и мы записали ее в том виде, как она использована во «Введении в анализ...»; понятно, что вместо знака равенства следовало бы написать знак бесконечной близости $\simeq$. Первая же формула используется для определения величины постоянного множителя в произведении (9а) (см. п. 8 в нашем § 1 и его анализ в § 4).

Между тем, сами формулы (28) и (29) получены Эйлером в [1] совсем не так, как этот материал излагается в современных руководствах по основам математического анализа. Рассуждения Эйлера на этот счет весьма близки по духу и подходу к бесконечностям к разложению синуса, и мы приведем и рассмотрим их вследствие этой близости, а также желая сделать более замкнутым наш обзор эйлеровой конструкции в целом.

Фиксируя конечное число a , Эйлер пишет (§ 114 главы VII «Введения в анализ...») равенство $a^\varepsilon = 1 + \psi$, где ε , а тогда и ψ суть числа бесконечно малые, и связывает эти числа соотношением $\psi = s\varepsilon$, где s — конечное число, зависящее от a (для важного случая $a = 10$ тут же приводится значение $s = 2,30258\dots$). Таким образом, $a^\varepsilon = 1 + s\varepsilon$.

Если теперь $x = \omega\varepsilon$, где ω — бесконечно большое натуральное число, то $\varepsilon s = sx/\omega$ и (§ 115)

$$(30) \quad a^x = (1 + s\varepsilon)^\omega = \left(1 + \frac{sx}{\omega}\right)^\omega =$$

$$(31) \quad = 1 + sx + \frac{\omega-1}{\omega} \frac{s^2 x^2}{2!} + \frac{(\omega-1)(\omega-2)}{\omega^2} \frac{s^3 x^3}{3!} + \dots =$$

$$(32) \quad = 1 + sx + \frac{s^2 x^2}{2!} + \frac{s^3 x^3}{3!} + \dots,$$

поскольку при бесконечно большом ω мы имеем

$$\frac{\omega-1}{\omega} = 1, \quad \frac{\omega-2}{\omega} = 1, \quad \frac{\omega-3}{\omega} = 1 \text{ и т.д.,}$$

ибо «чем большее число подставим вместо ω , тем ближе значение дроби будет подходить к единице; если ω станет больше всякого заданного числа, то дробь станет равна единице» (§ 116).

Далее Эйлер переходит на некоторое время к логарифмам, после чего вновь возвращается к экспоненте и в § 122 рассматривает частный случай, когда $s = 1$. Соответствующее значение a по формуле (32) при $x = 1$ обозначено им через e :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots;$$

попутно указывается приближенное значение e с 23 знаками после запятой.

Теперь формулы (28) и (29) получаются при $s = 1$ и $a = e$ из (32) и (30) соответственно, и эти равенства приведены Эйлером в §§ 123 и 125, причем в использованном автором настоящей статьи экземпляре первого издания русского перевода [1] имеется опечатка (с. 122, 7-я строка снизу, опущен показатель).

(Надо сказать, что мы несколько изменили систему употребления букв у Эйлера. Так, бесконечно большое число обозначается в тексте [1] через i , а не через ω , а вместо s записано k .)

Нельзя не отметить легкость и изящество рассуждений Эйлера по сравнению с современным способом изложения рассмотренного материала. Что же касается строгости выкладок, то нестандартный анализ позволяет получить адекватную и корректную интерпретацию всех элементов конструкции.

Итак, пусть a и x — стандартные числа, причем $a > 0$, а число ε бесконечно малое. Тогда разность $\psi = a^x - 1$ может быть представлена в виде: $\psi = s\varepsilon + \theta\varepsilon$, где s — значение $(a^x)'$ при $x = 0$, а θ — бесконечно малое число, зависящее от a и ε . (Здесь использована дифференцируемость показательной функции, т. е. в этом в принципе можно видеть элемент порочного круга, но мы не будем обращать на это внимание.) Тогда

$$a^\varepsilon = 1 + s\varepsilon + \theta\varepsilon = 1 + \sigma\varepsilon,$$

где $\sigma = s + \theta$.

Если теперь $x = \omega\varepsilon$, где натуральное ω бесконечно велико, то мы можем записать по формуле бинома, что

$$(33) \quad a^x = a^{\omega\varepsilon} = \left(1 + \frac{\sigma x}{\omega}\right)^\omega =$$

$$(34) \quad = \sum_{k=0}^{\omega} 1 \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{\omega}\right) \frac{\sigma^k x^k}{k!}.$$

Нам, однако, необходимо вывести другую формулу:

$$(35) \quad a^x \simeq \sum_{k=0}^{\omega} \frac{s^k x^k}{k!},$$

представляющую собой нестандартный эквивалент для (32). Обозначим для этого через v_k и w_k члены сумм (34) и (35) соответственно. Из-за бесконечной величины ω и бесконечной малости θ будет $v_k \simeq w_k$ для любого конечного k . Если же k бесконечно велико, то $|v_k| < k^{-2}$ и $|w_k| < k^{-2}$, поскольку факториал растет быстрее любого произведения степени с конечным показателем и экспоненты с конечным основанием (разумеется, здесь можно указать и конкретные оценки). Таким образом, мы находимся в области действия теоремы § 3, а точнее, утверждения о бесконечной малости суммы $\sum |p_k|$ при $p_k = v_k - w_k$ (и при $v = \omega$, поскольку верхней границей сумм и произведений в § 3 является v). Это означает, что суммы (35) и (34) бесконечно близки одна к другой, т. е. (35) есть следствие (34), что и требовалось.

Пропуская некоторые тонкости в доказательстве того, что каждому стандартному s в проведенном рассуждении соответствует определенное стандартное a (ясно, что $a = e^s$), обозначим через e то значение a , которое соответствует $s = 1$. Тогда

$$e \simeq \sum_{k=0}^{\omega} \frac{1}{k!} \quad \text{и} \quad e^x \simeq \sum_{k=0}^{\omega} \frac{x^k}{k!},$$

и последнее соотношение есть аналог и нестандартный эквивалент для (28).

Наконец, чтобы вывести (29) (со знаком $\simeq$ вместо равенства), достаточно воспользоваться равенством (33) при $s = 1$ и $a = e$, доказав предварительно, что

$$(36) \quad \left(1 + \frac{x}{\omega}\right)^{\omega} \simeq \left(1 + \frac{x}{\omega} + \frac{\theta x}{\omega}\right)^{\omega}.$$

Здесь нам снова поможет теорема § 3. Именно, требование (а) соблюдается при $u_k = 1 + x/\omega$ (от k не зависит), поскольку x конечно, а ω бесконечно велико, а если положить $p_k = \theta x/\omega$, то сумма

$$\sum |p_k| = \omega \frac{|\theta x|}{\omega} = |\theta x|$$

будет бесконечно малой ввиду бесконечной малости θ . Итак, теорема § 3 применима, и мы приходим к соотношению (36).

Закончим этот параграф несколькими замечаниями. Редактор перевода первого издания «Введения в анализ...» [1, с. 328] указал, что для частного случая $x = 1$ формула, связывающая правые части равенств (28) и (29), была получена Д. Бернулли до 1728 г. Но сам метод разложения бинома с бесконечно большой степенью и последующего преобразования коэффициентов с отбрасыванием бесконечно малых «искажений», приводящий к ряду, был найден гораздо раньше. Во всяком случае, такое преобразование использовал Б. Тейлор еще в 1714 г. для построения названного его именем ряда. Рассуждения Тейлора приведены, например, в эйлеровом «Дифференциальном исчислении» [2, гл. III второй части], и проанализированы во «Вступительном слове» к [2], а с позиций нестандартного анализа — автором настоящей статьи в [13].

Другая конструкция, включающая разложение бинома бесконечно большой степени, использована Эйлером в [1, §§ 133—134] для получения степенных рядов, представляющих круговые синус и косинус, причем Эйлер, не удовлетворяясь тем простейшим способом, который связан с выражением круговых функций через экспоненты, предлагает значительно более тонкое рассуждение, отпавляющееся от формул Моавра.

§ 10. О сравнении коэффициентов нестандартных многочленов

Здесь мы обратимся к вопросу, на который не дают ответа в общем случае разъяснения, сделанные в § 4 по поводу сравнения коэффициентов у Эйлера. Пусть P и Q — два многочлена, возможно, бесконечно большой степени, причем для всякого стандартного $x \neq 0$ выполняется $P(x) \simeq Q(x)$. Верно ли, что тогда свободные члены P и Q равны или хотя бы бесконечно близки друг к другу? Задача сводится, очевидно, к следующей: если $P(x) \simeq 0$ для любого стандартного $x \neq 0$, то верно ли, что свободный член P бесконечно мал либо точно равен 0? Этот вопрос мы и рассмотрим, причем начнем с отрицательного результата.

Лемма. *Существует многочлен P со свободным членом 1 такой, что $P(x) \simeq 0$ для любого стандартного $x \neq 0$.*

Доказательство. Фиксируем бесконечно большое натуральное ω . По теореме Вейерштрасса — Стоуна [12, с. 251] существует многочлен $Q(x)$, обладающий тем свойством, что

$$\left| Q(x) + \frac{1}{x} \right| < \omega^{-1} \quad \text{при} \quad \omega^{-1} \leq |x| \leq \omega.$$

Но всякое стандартное $x \neq 0$ принадлежит кольцевой области

$$K_\omega = \{x : \omega^{-1} \leq |x| \leq \omega\},$$

и потому, выполнив умножение на x , мы получим

$$|1 + xQ(x)| < |x| \omega^{-1}$$

для любого стандартного $x \neq 0$. Таким образом, искомым свойством обладает многочлен $P(x) = 1 + xQ(x)$.

З а м е ч а н и е. Некоторое усложнение доказательства позволяет получить искомый многочлен P в таком виде, что его коэффициенты даются посредством стандартной функции от показателя соответствующей степени x ; в частности, коэффициенты при конечных степенях x при этом становятся стандартными числами. Вот набросок этой более сложной конструкции.

Пусть $P_0 = 1$. Если уже построен многочлен P_n степени m , то, как и выше, существует многочлен Q_n , обладающий тем свойством, что

$$|P_n(x) + x^{m+1}Q_n(x)| < n^{-1} \quad \text{для любого } x \text{ из кольца } K_n,$$

причем этот многочлен может быть определен по P_n некоторым однозначным, фиксированным образом.

(Именно, выделим сначала те многочлены Q_n , обладающие указанным свойством, которые имеют наименьшую возможную для них степень, затем оставим среди них только те, которые имеют рациональные коэффициенты, и, наконец, будем минимизировать числители и знаменатели представленных в виде несократимых дробей коэффициентов последовательно от младших к старшим.)

Имея в виду эту однозначность определения Q_n по P_n , возьмем в качестве P_{n+1} многочлен $P_n(x) + x^{m+1}Q_n(x)$. Понятно, что P_{n+1} сохраняет все члены P_n с их коэффициентами, добавляя к ним лишь члены степени более высокой, чем степень P_n .

Данное построение есть внутренняя конструкция анализа, и в системе нестандартного анализа она может быть продолжена до любого бесконечно большого натурального числа ω . Соответствующий многочлен $P = P_\omega$ «наследует» свободный член 1 от P_0 и в то же время удовлетворяет неравенству $|P(x)| < \omega^{-1}$ на кольцевой области K_ω , которая, разумеется, содержит все стандартные $x \neq 0$.

Одна из возможностей получить положительный результат в том вопросе, о котором идет речь, состоит в ограничении коэффициентов. Если предположить, что все коэффициенты многочлена P ограничены по абсолютной величине одним стандартным числом M , то

$$|P(x) - P(0)| \leq \frac{M|x|}{1 - |x|}$$

для любого x , и потому, взяв достаточно малое стандартное x , можно добиться того, чтобы величина $|P(x) - P(0)|$ стала меньше наперед заданного стандартного $\varepsilon > 0$. Таким образом, если в этом случае $P(x) \simeq 0$ для всех стандартных $x \neq 0$, то и $P(0) \simeq 0$. Собственно, примерно так мы и рассуждали в § 4.

Наконец, тот способ обеспечить ограниченность коэффициентов многочлена, который указан в конце § 4 (замечание в скобках), может быть проведен и в достаточно общей ситуации, но мы уже не будем на этом останавливаться.

Заключение

Труды Леонарда Эйлера, вероятно, в наибольшей степени среди математических работ XVIII столетия характеризуются систематическим и исключительно плодотворным применением бесконечностей. Однако то рассуждение, которому посвящена настоящая статья, остается, в сущности, единственным попавшим в поле зрения специалистов по нестандартному анализу. Другие эксперименты Эйлера с бесконечностями пока что не стали предметом обстоятельного изучения с позиций нестандартного анализа, а между тем среди них имеются такие красивые и сложные конструкции, как ряд Эйлера — Маклорена, интерполирование функций и др. (см. «Дифференциальное исчисление» [2], часть вторая книги), анализ которых может привести к постановке новых задач как в области оснований математики, так, возможно, и в более конкретных областях.

Об одной из таких задач — определении аналитической структуры «суперконтинуума» $\mathcal{R}$ — мы уже говорили в конце § 8. Другой возможной задачей является определение точного смысла и границ применимости следующего высказывания Эйлера:

«Я полагаю, что каждый ряд должен обладать определенным значением. Однако, чтобы справиться со всеми возникающими здесь трудностями, следовало бы это значение не именовать суммой, поскольку с этим словом обычно связывают такое понятие, как если бы сумма получалась в результате действительного суммирования, а эта идея для расходящихся рядов не имеет места...». (Цит. по кн. [14, с. 29].)

Итак, Эйлер полагает, что всякий ряд имеет ту числовую характеристику, которую было бы уместно назвать суммой, если бы это понятие не употреблялось в связи с известным способом определения этой суммы для сходящихся рядов. Но как определить «сумму» расходящегося ряда? Глубокие идеи и конкретные методы суммирования, разработанные Эйлером во «Введении в анализ...» [1] и особенно в «Дифференциальном исчислении» [2], в значительной мере легли в основу теории суммирования расходящихся рядов. Этот раздел теории функций успешно развивается (так, в обзоре [15], специально посвященном различным вопросам суммирования расходящихся последовательностей и рядов, приведена библиография из 870 названий, причем автор обзора указывает, что некоторые направления оставлены в стороне). Разработаны многочисленные и разнообразные по характеру методы суммирования, т. е. способы определить (или «найти») сумму расходящегося ряда, каждый из которых имеет свою специфику и область применения. Однако такое многообразие подходов свидетельствует об отсутствии прин-

ципального ответа на наиболее важный с точки зрения оснований математики вопрос: верно ли, что всякий ряд имеет единственное «естественное» значение суммы, как считал Эйлер, и если да, то как такое значение найти? Очень интересно было бы найти подход к этому вопросу с позиций нестандартного анализа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Эйлер Л. Введение в анализ бесконечно малых, т. I. Пер. с лат. под ред., со вступительной статьей и примечаниями С. Я. Лурье.— М.—Л.: ОНТИ, 1936, 352 с. Вторично издано под названием: Введение в анализ бесконечных, т. I, изд. 2-е, М., 1961.
- [2] Эйлер Л. Дифференциальное исчисление. Пер. с лат., вступительная статья и примечания М. Я. Выгодского.— М.—Л.: ГИТТЛ, 1949.
- [3] Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. II, 7-е изд., М.: Наука, 1970.
- [4] Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций.— М.: Наука, 1978.
- [5] Робинсон А. Введение в теорию моделей и метаматематику алгебры.— М.: Наука, 1967.
- [6] Девис М. Прикладной нестандартный анализ.— М.: Мир, 1980.
- [7] Звонкин А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений//УМН. — 1984. — Т. 39, вып. 2.— С. 77—127.
- [8] Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ?— М.: Наука, 1987.
- [9] Luxemburg W. A. J. What is nonstandard analysis?//Amer. Math. Monthly.— 1973.— Т. 80, № 6, part II.— P. 38—67.
- [10] Nelson E. Internal set theory. A new approach to nonstandart analysis//Bull. Amer. Math. Soc.— 1977.— Т. 83, № 6.— P. 1165—1198.
- [11] Kawai T. Axiom system of nonstandart set theory.— In: Logic Symposia, Hakone 1979, 1980.— Berlin: Springer, 1981.— P. 57—65. [Lecture Notes in Math. № 891].
- [12] Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию.— М.: Наука, 1977.
- [13] Кановой В. Г. «Нестандартное» построение степенного ряда.— В кн. [8].— С. 121—124.
- [14] Харди Г. Расходящиеся ряды.— М.: ИЛ, 1951.
- [15] Кангро Г. Ф. Теория суммируемости последовательностей и рядов.— В кн.: Математический анализ. Т. 12.— М.: ВИНТИ. 1974.— С. 5—70.

Московский институт
инженеров транспорта

Поступила в редакцию
20 мая 1987 г.