

УДК 510.223+519.47

ИДЕИ А. Н. КОЛМОГорова в ТЕОРИИ ОПЕРАЦИЙ
НАД МНОЖЕСТВАМИ

В. Г. Кановой

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	93
Введение	95
§ 1. Введение в теорию операций над множествами	96
§ 2. Иерархия Колмогорова	100
§ 3. R -преобразование	104
§ 4. Индуктивный анализ. Индексы	110
§ 5. R -множества: построение иерархии	113
§ 6. Природа R -множеств	115
§ 7. О свойствах R -множеств	121
§ 8. К проблеме Колмогорова о длинах борелевских иерархий	124
Заключение	125
Список литературы	126

Предисловие

Теория операций над множествами — это та область математики, вклад в которую А. Н. Колмогорова как основателя, автора главных концепций и первых основополагающих результатов общепризнан. Собственно, как указали П. С. Новиков и А. А. Ляцунов, авторы обзора «Дескриптивная теория множеств» [26], вся теория операций над множествами ведет свое происхождение от исследований, выполненных Колмогоровым в 20-е годы. Первая часть этих исследований, датированная январем 1922 г., опубликована в виде статьи «Об операциях над множествами» [1]; в ней заложены основы общей теории операций:

- определение δs -операции;
- определение операции, дополнительной к заданной операции;
- теорема о дополнениях, согласно которой любая δs -операция позволяет получить из замкнутых множеств такое множество, дополнение к которому уже не может быть построено таким же образом;
- общий метод построения иерархии классов точечных множеств, занумерованных конечными и счетными порядковыми числами. Метод основан на комбинированном действии выбранной δs -операции и дополнительной операции;
- теорема о непустоте классов, гарантирующая, при достаточно широких требованиях к исходной операции, что базирующаяся на этой операции иерархия не вырождается на счетных уровнях.

Вторая часть опубликована под тем же названием [2] в третьей книге избранных трудов академика А. Н. Колмогорова [6]. Ею в теорию множеств было введено R -преобразование — исключительно важное понятие, с которым связано наиболее плодотворное направление в классической теории операций, и которое является объектом вызывающих значительный интерес современных исследований. Эта вторая часть, больше полувека оставаясь неопубликованной (она датирована февралем 1922 г.), была, однако, как сказано во вступительном слове «От автора» к [2], доступна ряду специалистов по дескриптивной теории множеств.

Работа «Об операциях над множествами» (в обеих ее частях) стала богатым источником идей для более поздних изысканий последователей А. Н. Колмогорова в этой области. Л. В. Канторович и Е. М. Ливенсон в пространном, состоящем из двух частей «Мемуаре об аналитических операциях и проективных множествах» [10], [11], разработали общую теорию аналитических операций, к которым относятся и δ -операции, характеризующиеся внутри этого более широкого класса свойством «положительности». Во второй части этого мемуара со ссылкой на «любезное разрешение» А. Н. Колмогорова помещены некоторые материалы рукописи [2], включающие и определение R -преобразования.

Используя заключенную в [2] идею чередования R -преобразования с переходом к дополнительной операции, А. А. Ляпунов построил [19], [20] так называемый нормальный ряд R -операций и ввел класс R -множеств, получаемых операциями нормального ряда из замкнутых множеств. Основные теоремы об R -множествах были выведены А. А. Ляпуновым во многом на основе разработки и детализации того, что сделал А. Н. Колмогоров. Такие результаты наиболее значительного исследования Ляпунова « R -множества» [20], как построение классов и подклассов иерархии R -множеств и доказательство их непустоты, доказательство измеримости R -множеств, разбиение R -множеств на борелевские множества в числе $\aleph_1$, разработка аппарата индексов для R -преобразования — есть прямое продолжение идей и конструкций второй части работы «Об операциях над множествами».

Между тем, столь значительный и открывший новую область в теории множеств научный труд «Об операциях над множествами» был выполнен 18-летним студентом, совсем незадолго до этого приглашенным Н. Н. Лузиным в группу его учеников. Делясь воспоминаниями о годах своей молодости в комментарии «К работам по теории функций и теории множеств» [5, с. 363—364], Колмогоров очень деликатно указывает, что его план исследований по теории множеств шел «в направлении, совсем не предусмотренном Н. Н. Лузиным». Вероятно, мы никогда не узнаем точно, какие формы в данном случае приняло непризнание со стороны бывшего в то время лидером московских математиков Н. Н. Лузина, и как это могло повлиять на делавшего свои первые шаги в науке совсем молодого человека, но остается фактом, что Лузин никогда не упоминал в своих работах по теории множеств об исследованиях Колмогорова, а сам Колмогоров в дальнейшем фактически не возвращался к этой тематике в опубликованных им работах (если не считать написанной в честь П. С. Александрова статьи [3]), хотя, как сказано в упомянутом комментарии, он имел в то время широкие замыслы дальнейших изысканий. Можно только сожалеть о той потере для теории множеств в целом, которая возникла вследствие ухода А. Н. Колмогорова из этой области.

После работ А. А. Ляпунова по R -множествам классическая теория операций над множествами приняла в целом законченный вид. Введенные А. Н. Колмогоровым концепции и методы оказались исчерпанными в кругу традиционных задач дескриптивной теории множеств вместе со всей классической дескриптивной проблематикой ¹⁾. Более поздние изыскания (начи-

¹⁾ О развитии дескриптивной теории множеств, главных ее результатах и идеях см. обзоры [26], [13], [33], [9].

ная с 50-х годов) имели главной целью распространение классических результатов на случай несчетных индексов и произвольных топологических пространств с изучением возникающих от этого эффектов. Таким образом, теория операций над множествами постепенно отошла от присущей ей первоначально (и подчеркнутой А. Н. Колмогоровым в упоминавшемся комментарии «К работам по теории функций и теории множеств») ясной дескриптивной направленности. Возможно, это обстоятельство, а также исключительно тяжелые символика и техника теории операций в варианте, идущем от работ А. А. Ляпунова (резкий контраст с блестящим стилем статей [1], [2], [3]) послужили причиной отсутствия в последнее время реального прогресса в этой области и ее отрыва от общего направления развития теории множеств.

Тем временем, последние 20—25 лет стали периодом чрезвычайно быстрого развития теоретико-множественных исследований, базирующегося на таких принципиальных открытиях, как аппарат конструктивных множеств, метод вынуждения, общая концепция рекурсии, бесконечные игры и детерминированность и др. Новые методы привели к полному решению (т. е. в большинстве случаев — к доказательству неразрешимости) многих фундаментальных задач теории множеств, остававшихся открытыми не одно десятилетие — таких, например, как континуум-проблема, проблема измеримости проективных множеств, проблемы отделимости и униформизации в проективных классах, проблемы о конституантах. Это развитие не обошло стороной и теорию операций над множествами. Так, в начале 80-х годов было найдено «игровое» представление R -множеств и более просто устроенных C -множеств, из которого стало очевидно, что борелевские множества, C -множества и R -множества образуют три начальных уровня некоторой естественной иерархии. Удалось окончательно выяснить соотношение между R -множествами и множествами второго проективного уровня. В свою очередь, понятия теории операций легли в основу некоторых принципиальных определений общей теории рекурсии, а данная А. Н. Колмогоровым конструкция R -преобразования рассматривается как первый в математике пример бесконечной игры с совершенной информацией.

Автор настоящей статьи в течение какого-то времени имел уже замысел написать обзор, раскрывающий эволюцию идей, заложенных А. Н. Колмогоровым в фундамент теории операций над множествами, и ту форму, которую приняли или принимают эти идеи в современных теоретико-множественных исследованиях, а также проясняющий некоторые терминологические и приоритарные моменты, не всегда полно и точно представленные в математической литературе. Трагическое событие для мировой науки, поистине несчастливый случай предоставили автору повод и конкретную возможность осуществить задуманное.

Введение

Предлагаемая статья не является обзором в точном смысле этого слова по теории операций над множествами и не претендует на полноту анализа всех направлений в этой области. Напротив, как это должно следовать из названия статьи, речь пойдет только о тех работах, которые выполнены под влиянием идей А. Н. Колмогорова, либо раскрывают эти идеи с новой, более современной точки зрения ¹⁾. Разумеется, определенное место (§§ 1 и 2) отведено изложению созданных А. Н. Колмогоровым основ теории операций.

Наибольшее же внимание уделяется R -преобразованию Колмогорова — одному из наиболее значительных открытий во всей классической дескриптивной теории множеств. В § 3 представлены первоначальное определение R -преобразования, его современная форма в терминах бесконечных игр и

¹⁾ О других направлениях в теории операций над множествами см. [13], [23—26], [29], [30], [36].

обобщенных кванторов и некоторые методы рассуждений в связи с этим преобразованием. Следующий § 4 посвящен методу индексов (или индуктивному анализу) — главному техническому средству классической, а вместе с «игровым» анализом и современной теории операций над множествами. Колмогоров ввел метод индексов в [2] в общем виде, имея в виду более раннее построение индексов в одном специальном случае (A -операция), предпринятое Н. Н. Лузиным и В. Серпинским. В рамках «игрового» подхода метод индексов принимает форму определения выигрывающих позиций.

Далее, в § 5 мы излагаем данное А. А. Ляпуновым определение R -множеств при помощи построенных им же операций нормального ряда. В следующем § 6 рассмотрены современные представления о природе R -множеств, полученные на основе глубокой переработки и далеко идущих обобщений идей и конструкций из работы Колмогорова [2]. После этого в § 7 дается краткий обзор исследований по R -множествам.

В заключительном § 8 речь идет о поставленной Колмогоровым проблеме (она опубликована в 1935 г., [4]) о длинах борелевских иерархий, вызвавшей значительный интерес и недавно получившей полное решение.

§ 1. Введение в теорию операций над множествами

Придерживаясь хронологического порядка, мы рассмотрим сначала данное А. Н. Колмогоровым в [1] определение $\delta\mathcal{S}$ -операции и примеры таких операций, затем перейдем к более общей концепции аналитической операции по Л. В. Канторовичу и Е. М. Ливенсону.

Понятие $\delta\mathcal{S}$ -операции. Зафиксируем некоторое непустое множество I — *индексное множество*. Его части, т. е. множества $U \subseteq I$, называются *цепями*, а множества цепей — *базами*; таким образом, база есть произвольное множество $Q \subseteq \mathcal{P}(I)$, где $\mathcal{P}(I)$ обозначает совокупность всех $U \subseteq I$.

Чтобы избежать тривиальностей, обычно предполагают, что база непуста и не содержит пустой цепи: $Q \neq \emptyset$ и $\emptyset \notin Q$. О тех двух операциях, которые исключаются этой оговоркой, будет сказано ниже.

Всякая база $Q \subseteq \mathcal{P}(I)$ задает операцию Φ_Q , действующую на I -индексированные семейства $\{X_i: i \in I\} = \{X_i\}$ множеств X_i в соответствии со следующим определением [1]:

$$\Phi_Q \{X_i\} = \Phi_Q \{X_i: i \in I\} = \bigcup_{U \in Q} \bigcap_{i \in U} X_i.$$

За операциями вида Φ_Q закрепилось название: *$\delta\mathcal{S}$ -операция* (термин Ф. Хаусдорфа, независимо пришедшего к данному определению в [34]; Колмогоров никакого специального названия этим операциям в статье [1] не дает).

Одна и та же $\delta\mathcal{S}$ -операция может быть определяема, вообще говоря, разными базами; необходимым и достаточным условием для того, чтобы было $\Phi_Q = \Phi_P$, является следующее:

$$(1) \quad \forall U \in Q \exists V \in P (V \subseteq U) \wedge \forall V \in P \exists U \in Q (U \subseteq V).$$

Тем не менее, среди всех баз, задающих $\delta\mathcal{S}$ -операцию Φ , выделяется единственная база

$$(2) \quad Q(\Phi) = \Phi \{E_i: i \in I\}, \text{ где } E_i = \{U \subseteq I: i \in U\},$$

удовлетворяющая требованию *полноты*, т. е. требованию, чтобы вместе со всякой своей цепью $U \in Q$ она содержала бы любую другую цепь $V \subseteq I$ такую, что $U \subseteq V$. Эта единственная полная база для Φ может быть также получена из любой другой базы Q для Φ посредством равенства

$$(3) \quad Q(\Phi) = \{V \subseteq I: \exists U \in Q (U \subseteq V)\}.$$

Примеры (по Колмогорову [1]). К классу δs -операций относятся, в частности, действия объединения и пересечения

$$\bigcup_I \{X_i\} = \bigcup_{i \in I} X_i; \quad \bigcap_I \{X_i\} = \bigcap_{i \in I} X_i$$

для I -индексированных семейств. Полные базы для операций $\bigcup_I$ и $\bigcap_I$ определяются следующим образом:

$$Q(\bigcup_I) = \{U \subseteq I: U \neq \emptyset\}; \quad Q(\bigcap_I) = \{I\}.$$

База $\{I\}$ — единственно возможная для пересечения, однако действие $\bigcup_I$ может быть задано в виде Φ_Q любой базой Q , содержащей все одноэлементные цепи $U = \{i\}$, $i \in I$ (но не содержащей пустую цепь).

Еще один пример — это A -операция П. С. Александрова, использованная им в [7] для решения проблемы мощности борелевских множеств. Индексным множеством A -операции служит совокупность

$$S = \{\langle a_0, a_1, \dots, a_m \rangle : a_0, a_1, a_2, \dots, a_m \in \omega\}^1)$$

всех кортежей натуральных чисел a_k произвольной конечной длины $m + 1$. Результат же A -операции над S -индексированным семейством $\{X_s: s \in S\}$ определяется следующим образом:

$$A\{X_{a_0 \dots a_m}\} = \bigcup_{\alpha} \bigcap_{m \in \omega} X_{a_0 \dots a_m},$$

где объединение следует произвести по всем бесконечным последовательностям $\alpha = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ натуральных чисел a_k . Тем самым, A -операция является δs -операцией с базой, образованной всевозможными цепями вида

$$U = \{\{a_0\}, \{a_0, a_1\}, \{a_0, a_1, a_2\}, \dots\}.$$

(разумеется, эта база не полна).

Перечисленные операции можно отнести к простейшим. Наиболее употребительный способ построения более сложных операций состоит в использовании различных преобразований, посредством которых из уже имеющихся δs -операций можно конструировать новые операции. Известны три классических преобразования δs -операций: это переход к дополнительной операции, суперпозиция и R -преобразование; все они введены А. Н. Колмогоровым в [1], [2]. Отложив R -преобразование до § 3, рассмотрим два первых, более простых преобразования.

Дополнительная операция. Предполагая, что все рассматриваемые множества расположены в некотором фиксированном пространстве $\mathcal{X}$, обозначим для $X \subseteq \mathcal{X}$ через $\tilde{X}$ дополнение множества X относительно этого пространства, т. е. $\tilde{X} = \mathcal{X} - X$. *Дополнительная операция* $\tilde{\Phi}$ к заданной δs -операции Φ вводится соотношением

$$\tilde{\Phi}\{\tilde{X}_i\} = \tilde{X} \leftrightarrow \Phi\{X_i\} = X.$$

Операция $\tilde{\Phi}$ является δs -операцией вместе с Φ , и полную базу $\tilde{Q}$ для нее можно получить из любой базы Q операции Φ :

$$(4) \quad \tilde{Q} = \{V \subseteq I: \forall U \in Q (U \cap V \neq \emptyset)\},$$

причем если база Q полная, то формула упрощается:

$$(4^*) \quad \tilde{Q} = \{V \subseteq I: I - V \notin Q\}.$$

¹⁾ $\omega = \{0, 1, 2, \dots\}$ есть множество всех натуральных чисел.

Легко видеть, что операции $\bigcup_I$ и $\bigcap_I$ взаимно дополнительные. Дополнительная к A -операции Γ -операция была построена П. С. Александровым в [8].

Суперпозиция. Множества, полученные в результате действия некоторых δs -операций, сами могут служить аргументами этих или других операций. Однако такое двукратное применение может быть заменено однократным при помощи схемы суперпозиции по Колмогорову.

Пусть задана δs -операция Φ с индексным множеством I , а каждому $i \in I$ сопоставлена δs -операция Φ_i со своим индексным множеством I_i . В этом случае определяется новая δs -операция $\Theta = \Phi \mid \{\Phi_i: i \in I\}$ с индексным множеством

$$J = I \mid \{I_i\} = \{\langle i, j \rangle: i \in I \wedge j \in I_i\},$$

которая действует на J -индексированные семейства:

$$\Theta\{X_{ij}: \langle i, j \rangle \in J\} = \Phi\{\Phi_i\{X_{ij}: j \in I_i\}: i \in I\}.$$

Другими словами, сначала конструируются множества

$$X_i = \Phi_i\{X_{ij}: j \in I_i\}, i \in I,$$

к которым для получения окончательного результата применяется операция Φ .

Чтобы определить базу операции Θ , зафиксируем базу Q операции Φ , а для каждого $i \in I$ — базу Q_i операции Φ_i . Искомая база для Θ может быть составлена из всех цепей вида

$$V = \{\langle i, j \rangle: i \in U \wedge j \in U_i\},$$

где $U \in Q$ и $U_i \in Q_i$ для всех i .

В важном частном случае, когда каждая операция Φ_i тождественна фиксированной δs -операции Φ' , суперпозицию $\Phi \mid \{\Phi_i\}$ принято обозначать через $\Phi\Phi'$. Например, операция $\bigcup_I \bigcap_J$ действует на $I \times J$ -индексированные семейства:

$$\bigcup_I \bigcap_J \{X_{ij}\} = \bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} X_{ij}.$$

Сравнение операций. Интуитивно, операция Ψ сильнее операции Φ , когда действие второй может быть заменено действием первой. Это интуитивное представление уточняется двумя способами, намеченными А. Н. Колмогоровым в [1].

Во-первых, Ψ сильнее, чем Φ (в нестрогом смысле) — символически $\Phi \leq \Psi$ — когда найдется отображение f индексного множества J операции Ψ в индексное множество I операции Φ , обладающее тем свойством, что для любого I -индексированного семейства множеств $\{X_i: i \in I\}$ будет

$$(5) \quad \Phi\{X_i: i \in I\} = \Psi\{X_{f(j)}: j \in J\}.$$

Во-вторых, обозначим через $\Theta(K)$ совокупность всех множеств, которые можно получить однократным применением данной δs -операции Θ к семействам множеств данного класса K : например, $\bigcup_{\omega}(K)$ есть совокупность всех счетных объединений множеств из K . Теперь второе определение: $\Phi \leq \Psi$, когда для любого класса K выполняется $\Phi(K) \subseteq \Psi(K)$.

К счастью, оба определения эквивалентны (это отмечено в [1] как факт и строго доказано в [10]). Действительно, пусть для двух δs -операций Φ, Ψ выполняется $\Phi \leq \Psi$ во втором смысле. Для семейства множеств E_i вида (2) получим:

$$\Phi\{E_i: i \in I\} = \Psi\{E_{f(j)}: j \in J\},$$

где f — подходящее отображение J в I . Нетрудно проверить, что это же отображение f выполнит равенство (5) и для любого другого семейства $\{X_i\}$, чем доказано $\Phi \leq \Psi$ в первом смысле.

А импликация в противоположном направлении тривиальна.

Как обычно, определим $\Phi \approx \Psi$, когда $\Phi \leq \Psi$ и $\Psi \leq \Phi$ одновременно; операции, связанные отношением $\approx$, называются эквивалентными. Наконец, $\Phi < \Psi$, когда $\Phi \leq \Psi$, но не выполняется $\Psi \leq \Phi$.

Пример: $\bigcup_{\omega} \leq A$, причем соответствующую функцию $f: S \rightarrow \omega$, обеспечивающую (5), можно определить так:

$$f(\langle a_0, \dots, a_m \rangle) = a_m.$$

Более того, $\bigcup_{\omega} < A$ в строгом смысле, поскольку известно, что класс $A(\text{Int})$ всех множеств, полученных A -операцией из интервалов вещественной прямой (т. е. класс суслинских, или A -множеств, построенный М. Я. Суслиным [32]), много шире класса $\bigcup_{\omega}(\text{Int})$ открытых множеств.

Столь же просто убедиться, что $\bigcap_{\omega} < A$.

Аналитические операции. Итак, некоторые важные операции над множествами относятся к числу δs -операций. С другой стороны, скажем, симметрическая разность $X \Delta Y = (X - Y) \cup (Y - X)$, взятие дополнительного множества или проектирование не являются δs -операциями. Каково же ключевое свойство, характеризующее δs -операции среди всех возможных теоретико-множественных построений? Вопрос этот был рассмотрен Л. В. Канторовичем и Е. М. Ливенсоном в мемуаре [10]. Действующая на I -индексированные семейства множеств операция Ψ названа этими авторами *аналитической* в случае, когда принадлежность какой-либо точки x к множеству $X = \Psi\{X_i\}$ вполне определяется набором тех индексов i , для которых $x \in X_i$. Более точно, требуется, чтобы для любой пары точек x, y и любых двух семейств $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ было выполнено соотношение:

$$\forall i(x \in X_i \leftrightarrow y \in Y_i) \rightarrow (x \in \Psi\{X_i\} \leftrightarrow y \in \Psi\{Y_i\}).$$

Аналитическая операция названа в [10] *положительной*, когда из выполнения $X_i \subseteq Y_i$ для всех i следует $\Psi\{X_i\} \subseteq \Psi\{Y_i\}$.

Каждая δs -операция — аналитическая и положительная, что очевидно. Но верно (и доказано в [10]) и обратное: любая аналитическая положительная операция Φ является δs -операцией, полную базу которой можно получить по формуле (2).

Канторович и Ливенсон показали также, что аналитические операции (не обязательно положительные) допускают представление

$$(6) \quad \Psi\{X_i\} = \Psi_Q\{X_i\} = \bigcup_{U \in Q} [(\bigcap_{i \in U} X_i) \cap (\bigcap_{i \in U} \bar{X}_i)],$$

где $Q \subseteq \mathcal{P}(I)$, а положительные (т.е. δs) операции при таком представлении характеризуются среди всех аналитических условием полноты (или *экстенсивности*) базы Q :

$$U \in Q \wedge U \subseteq V \subseteq I \rightarrow V \in Q,$$

при выполнении которого $\Phi_Q = \Psi_Q$ является δs -операцией.

Аналитические операции, представленные в форме (6), были названы А. А. Ляпуновым в [20] *теоретико-множественными операциями*.

Пример неположительной аналитической операции доставляет операция C взятия дополнительного множества: $CX = \bar{X}$. Это унарная операция, индексное множество которой содержит всего один элемент: например, $I = \{1\}$. Взяв базу $Q = \{\emptyset\}$ с единственной — пустой — цепью $\emptyset$, мы получим $\Psi_Q\{X_1\} = \bar{X}_1$, т. е. $C = \Psi_{\{\emptyset\}}$.

Вырожденные δs -операции. Это «нулевая» операция $\mathbb{O}$ с пустой базой $Q_0 = \emptyset$, и «единичная» операция $\mathbb{I}$ с базой $Q_1 = \mathcal{P}(I)$, содержащей все цепи, в том числе и пустую цепь $\emptyset$. Действие этих операций

$$\mathbb{O} = \Phi_{Q_0} = \Psi_{Q_0}; \quad \mathbb{I} = \Phi_{Q_1} = \Psi_{Q_1}$$

очень простое: $\mathbb{O}\{X_i\} = \emptyset$ и $\mathbb{I}\{X_i\} = \mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — объемлющее пространство, в котором расположены все рассматриваемые множества (мы принимаем, что пересечение $\bigcap_{i \in \Phi} X_i$ по пустой цепи равно $\mathcal{X}$ независимо от выбора множеств $X_i \subseteq \mathcal{X}$).

Имеется, однако, свойство, выделяющее $\mathbb{O}$ и $\mathbb{I}$ из δs -операций: именно, для любой операции $\Phi = \Phi_Q$, кроме этих двух, если мы положим $X_i = X$ для всех i из индексного множества операции Φ , то получим $\Phi\{X_i\} = X$. Для операций $\mathbb{O}$ и $\mathbb{I}$ это свойство, разумеется, не имеет места.

§ 2. Иерархия Колмогорова

Дав определение δs -операции, А. Н. Колмогоров рассматривает в работе [1] строение наименьшего класса $\nabla(\Phi)$ множеств данного пространства, содержащего все замкнутые множества и замкнутого относительно применения фиксированной операции Φ и операции взятия дополнения. Имеется большое многообразие комбинаций Φ и дополнения, однако Колмогоров находит возможность расположить множества из $\nabla(\Phi)$ по классам возрастающей сложности, занумерованным конечными и трансфинитными порядковыми числами (ординалами).

С точки зрения современной системы определений и обозначений в дескриптивной теории множеств, классам иерархии Колмогорова уместно придать обозначения: Σ_α^Φ , Π_α^Φ , Δ_α^Φ , где Φ — заданная δs -операция, а α — порядковое число, индукцией по которому и происходит построение классов.

Начальный уровень образован классами

$$\Sigma_0^\Phi = G, \quad \Pi_0^\Phi = F, \quad \Delta_0^\Phi = G \cap F$$

соответственно всех открытых, всех замкнутых и всех открыто-замкнутых множеств. Далее, при $\alpha \geq 1$ полагаем

$$\Sigma_\alpha^\Phi = \Phi \left(\bigcup_{\gamma < \alpha} \Pi_\gamma^\Phi \right), \quad \Pi_\alpha^\Phi = \check{\Phi} \left(\bigcup_{\gamma < \alpha} \Sigma_\gamma^\Phi \right)$$

и, наконец, $\Delta_\alpha^\Phi = \Sigma_\alpha^\Phi \cap \Pi_\alpha^\Phi$. Таким образом, класс Σ_α^Φ получается действием Φ на всевозможные семейства множеств классов Π_γ^Φ , $\gamma < \alpha$, а класс Π_α^Φ — таким же образом при помощи дополнительной операции $\check{\Phi}$ из множеств классов Σ_γ^Φ , $\gamma < \alpha$. Отсюда ясно, что при любом α класс Σ_α^Φ состоит из всех множеств, дополнительных к Π_α^Φ -множествам (и только из таких множеств).

Конструкция классов стабилизируется на первом ординале мощности строго большей, чем мощность индексного множества I операции Φ (или на первом бесконечном ординале ω , если I конечно). В частности, если I не более чем счетно, то стабилизация происходит не выше первого несчетного числа ω_1 (классического Ω), и мы имеем

$$\nabla(\Phi) = \Sigma_{\omega_1}^\Phi = \Pi_{\omega_1}^\Phi = \Delta_{\omega_1}^\Phi = \Sigma_\beta^\Phi = \Pi_\beta^\Phi = \Delta_\beta^\Phi \quad \text{при } \beta \geq \omega_1.$$

Примеры. 1. Если $\Phi = \bigcup_\omega$ — счетное объединение, то класс $\nabla(\Phi)$ тождествен классу B всех борелевских множеств данного пространства, а классы Σ_α^Φ , Π_α^Φ , Δ_α^Φ — классам борелевской иерархии. Точнее, если принять определение Σ_α^0 , Π_α^0 , Δ_α^0 последних по [41, § 2], то будет

$$\Sigma_\alpha^\Phi = \Sigma_{1+\alpha}^0, \quad \Pi_\alpha^\Phi = \Pi_{1+\alpha}^0, \quad \Delta_\alpha^\Phi = \Delta_{1+\alpha}^0.$$

2. Пусть Φ есть A -операция. Тогда $\nabla(A) = C$ есть « C -область Н. Н. Лузина», как сказано в [1], или класс всех C -множеств, впервые построенный в статье Е. А. Селивановского [31]. Классы же Σ_α^A , Π_α^A , Δ_α^A тождественны классам иерархии C -множеств.

З а м е ч а н и е. Колмогоров провел в [1] построение рассмотренной иерархии (разумеется, с другими обозначениями для классов), имея ввиду множества вещественной прямой $\mathbb{R}$. В современных исследованиях по дескриптивной теории множеств в качестве объемлющего пространства рассматривается обычно более удобное бэровское пространство $\mathcal{N} = \omega^\omega$, составленное из бесконечных последовательностей $a = \langle a_0, a_1, a_2, \dots \rangle$ натуральных чисел a_k и наделенное топологией тихоновского произведения (с дискретной топологией на ω). Оба пространства $\mathbb{R}$ и $\mathcal{N}$ относятся к так называемым (совершенным) польским пространствам, т. е. сепарабельным, метризуемым полной метрикой и (чтобы избежать тривиальностей) не имеющим изолированных точек. Все эти пространства близки, если не идентичны, по отношению к вопросам, обсуждаемым в теории операций над множествами, и ниже мы будем предполагать, что объемлющее пространство является (совершенным) польским.

Монотонность. Первое требование, которое может быть предъявлено к иерархии любого типа, заключается в том, чтобы каждый ее класс содержал все множества предшествующих классов, т. е. для иерархии Колмогорова чтобы

$$\Sigma_\alpha^\Phi \cup \Pi_\alpha^\Phi \subseteq \Delta_\beta^\Phi \text{ при } \alpha < \beta.$$

Это условие, разумеется, выполнено, если $\beta \geq 2$, однако при $\beta = 1$ получается включение $G \subseteq \Phi(F)$ (и эквивалентное ему $F \subseteq \widetilde{\Phi}(G)$), не выполняющееся, например, при $\Phi = \bigcup_\omega$. Простейший способ обеспечить указанное включение — это потребовать, чтобы операция Φ была сильнее (в нестрогом смысле, т. е. $\geq$), чем $\bigcup_\omega$, и тогда мы получим $G \subseteq \Phi(F)$, поскольку $G \subseteq F_\sigma$ в польских (и вообще во всех метризуемых) пространствах. Отметим, что неравенство $\Phi \geq \bigcup_\omega$ имеет место для всех, кроме $\bigcap_\omega$, операций Φ , которые конкретно рассматриваются в теории борелевских множеств, C -множеств и R -множеств.

Теорема о непустоте классов. Вторым принципиальным вопросом состоит в следующем: приносит ли каждый уровень иерархии такие множества, которых не было на предшествующих уровнях? Это вообще характерная задача для иерархий любого типа, а в рассматриваемом случае ответ дается следующей теоремой А. Н. Колмогорова [1].

Т е о р е м а. *Предположим, что δs -операция Φ со счетным индексным множеством такова, что класс $\nabla(\Phi)$ замкнут относительно счетного объединения $\bigcup$. Тогда для всех α , $1 \leq \alpha < \omega_1$, будет*

$$\bigcup_{\gamma < \alpha} \Sigma_\gamma^{\Phi \upharpoonright \omega_1} \Sigma_\alpha^\Phi \quad \text{и} \quad \bigcup_{\gamma < \alpha} \Pi_\gamma^\Phi \subsetneq \Pi_\alpha^\Phi.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Колмогоров строит индукцией по α последовательность δs -операций Φ_α , $\alpha < \omega_1$, со счетными индексными множествами, обладающих такими свойствами: 1) $\Sigma_\alpha^\Phi \subseteq \Phi_\alpha(F \cup G)$, и 2) класс $\nabla(\Phi)$ замкнут относительно Φ_α . Начало построения очевидно: возьмем, например, $\Phi_0 = \Phi$. Теперь индуктивный шаг.

Предположим, что $\alpha \geq 1$ и все операции Φ_γ , $\gamma < \alpha$, уже построены и удовлетворяют указанным требованиям. Определим вспомогательную операцию

$$\Theta = \bigcup_\alpha \{ \widetilde{\Phi}_\gamma : \gamma < \alpha \}, \text{ где } \alpha = \{ \gamma : \gamma < \alpha \}$$

и операцию $\Phi_\alpha = \Phi\Theta$. Из индуктивного предположения следует, что $\Pi_\gamma^\Phi = \tilde{\Phi}_\gamma(F \cup G)$ при $\gamma < \alpha$, и тем самым класс $\Theta(F \cup G)$ будет образован всевозможными счетными объединениями множеств, принадлежащих классам Π_γ^Φ , $\gamma < \alpha$ — по одному множеству из каждого из этих классов. Взяв в каждом из классов Π_γ^Φ , кроме некоторого одного из них, пустое множество, а в выделенном классе — выбранное в нем множество, мы получим в объединении именно это выбранное множество. Следовательно, все множества классов Π_γ^Φ , $\gamma < \alpha$, войдут в класс $\Theta(F \cup G)$, и теперь ясно, что $\Pi_\alpha^\Phi \subseteq \Phi_\alpha(F \cup G)$. А из того, что класс $\nabla(\Phi)$ замкнут относительно Φ , $\bigcup$ и всех Φ_γ , $\gamma < \alpha$, следует его замкнутость и относительно построенной операции Φ_α .

Теперь, имея желаемый набор операций Φ_α , мы предполагаем противное в теореме о непустоте классов, т. е. пусть, например,

$$\Sigma_\alpha^\Phi = \bigcup_{\gamma < \alpha} \Sigma_\gamma^\Phi.$$

Отсюда нетрудно вывести следующее:

$$\Sigma_\alpha^\Phi = \Pi_\alpha^\Phi = \Sigma_\beta^\Phi = \Pi_\beta^\Phi \text{ для всех } \beta, \alpha \leq \beta < \omega_1,$$

т. е. $\Sigma_\alpha^\Phi = \Pi_\alpha^\Phi = \nabla(\Phi)$. Но по построению операции Φ_α и в силу того, что $F \cup G \subseteq F_\sigma$ и $\bigcup_{\omega} (\nabla(\Phi)) \subseteq \nabla(\Phi)$, мы получаем

$$(7) \quad \nabla(\Phi) = \Sigma_\alpha^\Phi = \Pi_\alpha^\Phi = \Psi(F), \text{ где } \Psi = \Phi_\alpha \bigcup_{\omega}.$$

Это соотношение будет отправным пунктом для нахождения противоречия, а конкретный механизм состоит в использовании еще одной теоремы, также доказанной Колмогоровым в [1]:

Теорема о дополнениях. Для любой $\delta\sigma$ -операции Ψ со счетным индексным множеством, в классе $\Psi(F)$ имеется множество, дополнение которого не принадлежит тому же классу $\Psi(F)$.

Доказательство. Будем предполагать, что 1) индексное множество операции Ψ есть множество натуральных чисел ω , и 2) объемлющее пространство есть канторов дисконтинуум $\mathcal{C}$ (это предположение не ограничивает общности, ибо любое совершенное польское пространство содержит замкнутое подмножество, гомеоморфное $\mathcal{C}$).

Пространство $\mathcal{C}$, реализованное как произведение ω экземпляров дискретного двоеточия, состоит из всевозможных бесконечных последовательностей $c = \langle c_0, c_1, c_2, \dots \rangle$ чисел $c_n = c(n) = 0$ или 1. Зафиксировав счетную базу топологии $\mathcal{C}$, состоящую из множеств C_h , $h \in \omega$, определим множество

$$Y = \{ \langle c, x \rangle \in \mathcal{C}^2 : x \notin \bigcup_{c(h)=1} C_h \}$$

замкнутое в $\mathcal{C}^2$ и универсальное в том смысле, что ко всякому замкнутому $X \subseteq \mathcal{C}^2$ найдется точка $c \in \mathcal{C}$, для которой

$$X = Y^{(c)}, \text{ где } Y^{(c)} = \{ x : \langle c, x \rangle \in Y \}.$$

Далее, положим $Y_m = \{ \langle c, x \rangle : \langle (c)_m, x \rangle \in Y \}$ для всех m , где точки $(c)_m \in \mathcal{C}$ вводятся равенствами $(c)_m(k) = c(2^m 3^k)$. Теперь уже для каждого счетного семейства замкнутых множеств $X_m \subseteq \mathcal{C}$ имеется точка $c \in \mathcal{C}$ такая, что $X_m = Y_m^{(c)}$ при любом m . Следовательно, множество $H = \Psi \{ Y_m : m \in \omega \}$ класса $\Psi(F)$ универсально для этого класса, ибо

$$H^{(c)} = \Psi \{ Y_m^{(c)} : m \in \omega \}.$$

А искомый пример доставляется множеством

$$Z = H^* = \{ c : \langle c, c \rangle \in H \} = \Psi \{ Y_m^* : m \in \omega \}$$

класса $\Psi(F)$, так как каждое $Y_m^* = \{c: \langle c, c \rangle \in Y_m\}$ замкнуто. Если бы дополнение $\widetilde{Z}$ множества Z также принадлежало классу $\Psi(F)$, то для подходящей точки $c \in \mathcal{C}$ было бы

$$\widetilde{Z} = H^{(c)} = \{x: \langle c, x \rangle \in H\}$$

в силу универсальности H . А отсюда следует противоречие с определением $Z: c \in Z \leftrightarrow \langle c, c \rangle \in H \leftrightarrow c \in \widetilde{Z}$.

Этим доказательство теоремы о дополнениях заканчивается.

Закончено и доказательство теоремы о непустоте классов: вернемся к соотношению (7) и вспомним, что класс Π_α^Φ образован дополнениями множеств из Σ_α^Φ .

Теорема о непустоте классов применима, разумеется, для борелевской иерархии ($\Phi = \bigcup_\omega$) и иерархии $\mathcal{C}$ -множеств (Φ есть A -операция), и в этих частных случаях она была установлена посредством отдельных рассуждений (А. Лебегем [16] для первой, и Е. А. Селивановским для второй иерархии [31]). Таким образом, Колмогоровым вскрыт общий принцип, на котором основываются такого рода рассуждения. Теорема о дополнениях для A -операции была доказана М. Я. Суслиным в форме: существует A -множество, дополнение к которому не есть A -множество [32].

Отметим, что для операций $\Phi = \bigcup_\omega$ и $\Phi = A$ те операции Φ_α , построение которых было проведено в ходе доказательства теоремы о непустоте классов, обеспечивают точное равенство $\Sigma_\alpha^\Phi = \Phi_\alpha(F \cup G)$ (вообще, достаточным условием здесь будет, например, такое: $\bigcup_\omega \leq \Phi$ и $\Phi\Phi \approx \Phi$). Построение такого набора операций для борелевских классов дано Ф. Хаусдорфом [34, 35], а для классов $\mathcal{C}$ -иерархии — Л. В. Канторовичем и Е. М. Ливенсоном [10, 12]. При выполнении указанного достаточного условия теорема о непустоте классов может быть доказана в более сильной форме:

$$\Sigma_\alpha^\Phi \not\subseteq \Pi_\alpha^\Phi \text{ и } \Pi_\alpha^\Phi \not\subseteq \Sigma_\alpha^\Phi \text{ при } \alpha < \omega_1,$$

— в которой она обычно и приводится, например, для борелевской иерархии (см. [41, § 21]).

Само название «теорема о непустоте классов» может вызвать некоторое удивление, поскольку в том виде, как эта теорема здесь сформулирована, в ней речь идет не о непустоте классов, а об их расширении в строгом смысле. Дело в том, что название унаследовано из классической дескриптивной теории множеств, где иерархии было принято формировать из попарно непересекающихся классов — например, для рассматриваемого случая, из классов

$$\Sigma_\alpha^\Phi = \bigcup_{\gamma < \alpha} \Sigma_\gamma^\Phi, \quad \Pi_\alpha^\Phi = \bigcup_{\gamma < \alpha} \Pi_\gamma^\Phi$$

для которых в [1] и доказана их непустота (естественно, в иных обозначениях).

Исторический комментарий. Мы отмечали выше, что понятие $\delta\mathcal{S}$ -операции было независимо от А. Н. Колмогорова открыто Ф. Хаусдорфом и опубликовано во втором издании его «Теории множеств» [34] (в переводе [35] на русский язык соответствующая глава написана Колмогоровым). Естественно, что монография одного из ведущих математиков того времени имела более широкий круг читателей, чем небольшая по размерам статья [1] на русском языке. Видимо поэтому в некоторых (и достаточно авторитетных — см., например, книгу [14, с. 345]) работах, касающихся данной тематики, $\delta\mathcal{S}$ -операции именуются операциями Хаусдорфа. Между тем, вклад Колмогорова в теорию операций над множествами много выше вклада Хаусдорфа. Действительно, немецкий математик не пришел к понятию дополни-

тельной операции и в его книге нет ни теоремы о дополнениях, ни теоремы о непустоте классов в их общем виде, которые составляют основу теории. Нет у Хаусдорфа и R -преобразования, которому посвящен следующий параграф нашего обзора.

§ 3. R -преобразование

Сейчас, по прошествии более полувека после выхода «Мемуара об аналитических операциях и проективных множествах» [11], где Л. В. Канторович и Е. М. Ливенсон впервые опубликовали материалы по R -преобразованию, можно с определенностью сказать, что эта концепция есть наиболее важное открытие А. Н. Колмогорова в области операций над множествами и одно из самых существенных достижений классической дескриптивной теории множеств вообще. Это открытие в значительной мере опередило уровень теоретико-множественных исследований своего времени, хотя уже тогда стало основой и отправной точкой весьма плодотворных работ Канторовича и Ливенсона, несколько позже — А. А. Ляпунова и др. Полное же его значение выяснилось лишь в последнее время, после развития таких разделов в основаниях математики, как инфинитарные игры, общая теория индуктивных определений, рекурсия в высших типах, о которых в 20-е и 30-е годы не было и речи.

После неожиданной находки второй части рукописи Колмогорова «Об операциях над множествами» и ее публикации [2] мы имеем возможность непосредственно обратиться к первоисточнику всех исследований по R -преобразованию.

Классическое определение. Фиксируется δs -операция $\Phi = \Phi_Q$ с индексным множеством I и базой Q . Ее квадрат $\Phi^2 = \Phi\Phi$ (т. е. суперпозиция Φ с ею самой) действует на I^2 -индексированные (где $I^2 = I \times I$ — декартово произведение) семейства по формуле:

$$\Phi^2\{X_{ij}: \langle i, j \rangle \in I^2\} = \Phi\{\Phi\{X_{ij}: j \in I\}: i \in I\},$$

а базой для Φ^2 может служить множество всех цепей $W \subseteq I^2$ вида

$$W = \{\langle i, j \rangle: i \in U \wedge j \in U_i\},$$

где U и все U_i принадлежат Q . Аналогично, δs -операция Φ^3 имеет индексное множество I^3 и базу из всех цепей вида

$$W = \{\langle i, j, k \rangle: i \in U \wedge j \in U_i \wedge k \in U_{ij}\},$$

где U , U_i , U_{ij} принадлежат Q , действуя при этом так:

$$\Phi^3\{X_{ijk}\} = \Phi\{\Phi\{\Phi\{X_{ijk}: k \in I\}: j \in I\}: i \in I\}$$

Построение можно продолжить, получая операции Φ^4 , Φ^5 и т. д.

Но какую операцию целесообразно взять в качестве, так сказать, предела последовательности операций Φ^n ? Одно решение видно сразу: объединить все операции Φ^n , $n \in \omega$ через суперпозицию с какой-либо простой внешней операцией — например, с $\bigcup_\omega$, т. е. положить $\Phi^\omega = \bigcup_\omega \{\Phi^n: n \in \omega\}$ (конструкция из доказательства теоремы о непустоте классов в предыдущем параграфе).

Однако Колмогоров находит другую идею, значительно более богатую возможностями. Именно, конструируется δs -операция $R\Phi$ с индексным множеством

$$RI = \{\langle i_0, \dots, i_m \rangle = i \upharpoonright m: m \in \omega \text{ и } i_0, \dots, i_m \in I\}$$

всех конечных (ненулевой длины) кортежей элементов I и базой RQ , в кото-

рую входят всевозможные цепи $W \subseteq RI$ вида

$$(8) \quad W = \{ \langle i_0, \dots, i_m \rangle \in RI : i_0 \in U \wedge i_1 \in U_{i_0} \wedge \wedge i_2 \in U_{i_0 i_1} \text{ и т. д. до } i_m \in U_{i_1 \dots (m-1)} \},$$

где все цепи $U_{i_1 \dots m}$, $i_1 \dots m \in RI$, принадлежат базе Q .

Принципиальное отличие R -преобразования от суперпозиции заключается в том, что операцию $R\Phi$ невозможно прямо выразить через Φ , а приходится производить преобразование базы. Здесь же возникает и принципиальный вопрос: не будет ли зависеть операция $R\Phi$ и от выбора конкретной базы Q операции Φ ? С этим, однако, все в порядке, поскольку необходимое и достаточное условие (1) § 1 для равенства $\Phi_{Q_1} = \Phi_{Q_2}$ сохраняется при переходе к базам RQ_1 и RQ_2 . Таким образом, нет зависимости $R\Phi$ от выбора базы Q операции Φ , и обозначение $R\Phi$ используется корректно.

П р и м е р ы. A -операция есть R -преобразование счетного объединения: $A = R \bigcup_{\omega}$. В свою очередь, счетное пересечение $\bigcap$ тождественно R -преобразованию унарной операции $\bigcap = \bigcup_{\{0\}}$ с одноэлементным индексным множеством $\{0\}$ (точнее, $R \bigcup_{\{0\}}$ переходит в $\bigcap$ при взаимно однозначном соответствии индексных множеств). Между тем, можно показать, что $RA \approx A$ и $R \bigcap_{\omega} \approx \bigcap_{\omega}$, т. е. в этих двух примерах двукратное R -преобразование равносильно однократному. На самом деле, вообще $R\Phi \approx RR\Phi$ для любой δs -операции Φ (см. теорему в конце параграфа).

Обобщенные кванторы. Это понятие является необходимым для перехода к современному «игровому» определению R -преобразования. Вообще, характерной чертой современных теоретико-множественных исследований стала замена «операционных» терминов более удобной логической символикой, где множества представлены отношениями, дополнение — знаком отрицания, объединение и пересечение индексированных семейств — кванторами существования $\exists$ и общности $\forall$, и т. п.. В этой системе δs -операции нашли себе соответствие через понятие обобщенного квантора.

Квантором (обобщенным) над множеством I называется произвольное $Q \subseteq \mathcal{P}(I)$ (т. е. произвольная база в смысле § 1), причем во избежание тривиальностей обычно предполагают, что $\emptyset \notin Q$ и $Q \neq \mathcal{P}(I)$. *Логическая функция* Q задается следующим образом:

$$Qi\Phi(i) \leftrightarrow Qi \in I\Phi(i) \leftrightarrow \{i: \Phi(i)\} \in Q.$$

В рамках этого определения представлены и стандартные кванторы: $\exists = \{Q \subseteq I: Q \neq \emptyset\}$ и $\forall = \{I\}$.

Квантор Q называется *монотонным*, если при $U \subseteq V$ из $U \in Q$ следует $V \in Q$; следовательно, монотонность квантора соответствует полноте базы. Обычно рассматриваются только такие кванторы.

Дуальный квантор $\tilde{Q} = \{V \subseteq I: I - V \notin Q\}$ имеет логическую функцию, связанную с логической функцией Q эквивалентностью

$$\tilde{Q}i\Phi(i) \leftrightarrow \neg Qi \neg \Phi(i).$$

Для монотонных Q дуальный квантор $\tilde{Q}$ является одновременно и базой дополнительной операции, см. (4*) § 1. Кванторы $\exists$ и $\forall$ взаимно дуальны.

Определение обобщенного квантора прекрасно согласовано с концепцией аналитической операции:

$$x \in \Psi_Q \{X_i: i \in I\} \leftrightarrow Qi \in I \quad (x \in X_i),$$

а если квантор Q монотонный — то и с концепцией δs -операции:

$$(9) \quad x \in \Phi_Q \{X_i\} \leftrightarrow Qi(x \in X_i) \leftrightarrow \exists U \in Q \forall i \in U (x \in X_i).$$

Идея R -преобразования. Вернемся к анализу операций Φ^n . Предполагая, что база Q операции $\Phi = \Phi_Q$ полная (а этого всегда можно добиться для любой δs -операции, взяв пополнение произвольной базы по формуле (3) § 1) — т. е. что Q есть монотонный квантор, и приняв во внимание соотношение (9), мы получаем:

$$\begin{aligned} x \in \Phi\{X_i: i \in I\} &\leftrightarrow Qi(x \in X_i) \leftrightarrow \exists U \in Q \forall i \in U (x \in X_i); \\ x \in \Phi^2\{X_{ij}\} & QiQj(x \in X_{ij}) \leftrightarrow \exists U \in Q \forall i \in U \exists V \in Q \forall j \in V (x \in X_{ij}); \\ x \in \Phi^3\{X_{ijk}\} &\leftrightarrow QiQjQk (x \in X_{ijk}); \end{aligned}$$

и так далее. Идея Колмогорова при таком представлении выглядит одновременно и очевидной, и невозможной: перейти к бесконечной цепочке кванторов Q и определить δs -операцию RQ с индексным множеством RI посредством соотношения:

$$\begin{aligned} (10) \quad x \in R\Phi\{X_r: r \in RI\} &\leftrightarrow Qi_0Qi_1Qi_2 \dots \forall m(x \in X_{i \uparrow m}) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \exists U_0 \in Q \forall i_0 \in U_0 \exists U_1 \in Q \forall i_1 \in U_1 \dots \forall m(x \in X_{i \uparrow m}), \end{aligned}$$

где $i \uparrow m = \langle i_0, \dots, i_m \rangle$.

Таким образом, все просто и очевидно, за исключением одного: как следует понимать бесконечный ряд кванторов в (10)? И с этим нюансом данное определение грозит перейти в разряд невозможных.

Игра Колмогорова. Правильное понимание формулы (10) достигается на основе следующей игры $\forall_{Qx}\{X_r\}$, которую ведут два игрока — обозначим их Q и I . Эти игроки по очереди делают свои «ходы», а именно:

игрок Q (он начинает) выбирает $U_0 \in Q$;
игрок I , зная «ход» U_0 , выбирает $i_0 \in U_0$;
игрок Q , зная i_0 (игра идет в открытую) выбирает $U_1 \in Q$;
игрок I , зная U_1 , выбирает $i_1 \in U_1$;

и так далее. Требования $U_m \in Q$ и $i_m \in U_m$ составляют правила игры, и первый, кто не может выполнить их своим очередным ходом, сразу проигрывает. В частности, игрок Q проигрывает, если $Q = \emptyset$, и выигрывает первым ходом $U_0 = \emptyset$, если $\emptyset \in Q$. Если же $Q \neq \emptyset$ и $\emptyset \notin Q$, что и предполагается в дальнейшем, то игроки на каждом шаге игры будут иметь возможность делать разрешенные ходы, разыгрывая бесконечную партию

$$(11) \quad U_0, i_0, U_1, i_1, U_2, i_2, \dots (i_m \in U_m \in Q \text{ для всех } m).$$

В этом основном случае результат игры определяется так: если $x \in X_{i \uparrow m}$ для всех m , то выигравшим считается игрок Q , а в противном случае — т. е. когда $x \notin X_{i \uparrow m}$ хотя бы для одного m — игрок I .

Теперь мы можем интерпретировать вторую строку в (10) как владение игроком Q такой системой действий в игре $\forall_{Qx}\{X_r\}$, которая обеспечивает ему выигрыш независимо от того, как играет противник. Более точно эта интерпретация оформляется через понятие выигрывающей стратегии.

Вообще, *стратегией* для игрока Q в играх типа $\forall_{Qx}\{X_r\}$ является любое правило выбора ходов в зависимости от предшествующих ходов противника, — т. е. любая функция $\sigma: RI \cup \{\Lambda\} \rightarrow Q$, где Λ — пустой кортеж (рассмотрение которого здесь необходимо для того, чтобы определить начальный ход U_0). Партия (11) соответствует стратегии σ , когда $U_m = \sigma(i \uparrow m)$ для всех m , т. е. когда

$$U_0 = \sigma(\Lambda), \quad U_1 = \sigma(i_0), \quad U_2 = \sigma(i_0, i_1), \quad U_3 = \sigma(i_0, i_1, i_2),$$

и т. д. Наконец, стратегия σ называется *выигрывающей* (кратко: *ВС*) для игрока Q в игре $\forall_{Qx}\{X_r\}$, если всякая партия в этой игре, соответствующая

стратегии σ , заканчивается выигрышем игрока Q . Итак, строгая форма определения (10) будет:

$$(12) \quad x \in R\Phi\{X_r\} \leftrightarrow Q \text{ имеет ВС в игре } \mathbf{V}_{Qx}\{X_r\}.$$

Убедимся, что это определение равносильно рассмотренному в начале параграфа классическому. Действительно, пусть $x \in R\Phi\{X_r\}$ в смысле классического определения, т. е. существует цепь W вида (8), дающая $x \in X_r$ для всех $r \in W$. Тогда стратегия σ , определенная условиями $\sigma(\Lambda) = U$ и $\sigma(i \uparrow m) = U_{i \uparrow m}$ для всех кортежей $i \uparrow m = \langle i_0, \dots, i_m \rangle \in RI$, окажется выигрывающей для игрока Q , т. е. $x \in R\Phi X_r$ в смысле определения (10) — (12). Обратный переход столь же прост. (Как видно из приведенного рассуждения, цепи канонической базы RQ операции $R\Phi$ находятся во взаимно однозначном соответствии с выигрывающими стратегиями для Q в игре $\mathbf{V}_{Qx}\{X_r\}$.)

Детерминированность. Игрок I также может обладать выигрывающей стратегией: ею в игре $\mathbf{V}_{Qx}\{X_r\}$ будет любая функция τ , заданная на множестве всех кортежей $\langle U_0, \dots, U_m \rangle$ цепей $U_n \in Q$ и такая, что

1) $\tau(U_0, \dots, U_m) \in U_m$ для всех m , и

2) для любой партии (11), если $i_m = \tau(U_0, \dots, U_m)$ для всех m (соответствие стратегии τ), то найдется m такое, что $x \notin X_{i \uparrow m}$. Понятно, что оба игрока не могут иметь для себя ВС в одной игре: иначе получилось бы противоречие в партии, где Q и I играют по своим стратегиям.

Поэтому остаются две возможности: либо у одного из игроков есть ВС (а у противника ее нет) — и тогда игра называется *детерминированной*; либо же ни один из игроков не имеет ВС. В следующем параграфе мы покажем, что все игры Колмогорова детерминированы.

Дополнительное преобразование. По аналогии с определением дополнительной операции, дополнительное к R преобразование $\widetilde{R}$ уместно определить так, чтобы операция $\widetilde{R}\Phi$ была дополнительна к $R\Phi$, т. е.

$$(13) \quad \widetilde{R}\Phi\{\widetilde{X}_r: r \in RI\} = \widetilde{X} \leftrightarrow R\Phi\{X_r\} = X.$$

Явное «игровое» определение $\widetilde{R}$ дается следующим образом:

$$(10^*) \quad x \in \widetilde{R}\Phi\{X_r\} \leftrightarrow Q i_0 Q i_1 Q i_2 \dots \exists m (x \in X_{i \uparrow m}),$$

а точное понимание этого определения достигается на основе игры $\mathbf{Z}_{Qx}\{X_r\}$, которая аналогична игре $\mathbf{V}_{Qx}\{X_r\}$ во всем, за исключением момента определения победителя: Q выигрывает, если $x \in X_{i \uparrow m}$ хотя бы для одного m . Вывод свойства (13) из этого определения можно осуществить посредством такого рассуждения:

$$\begin{aligned} x \in R\Phi\{X_r\} &\leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \exists U_0 \in Q \forall i_0 \in U_0 \exists U_1 \in Q \forall i_1 \in U_1 \dots \forall m (x \in X_{i \uparrow m}) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \neg \forall U_0 \in Q \exists i_0 \in U_0 \forall U_1 \in Q \exists i_1 \in U_1 \dots \exists m (x \notin X_{i \uparrow m}) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \neg \exists V_0 \in \widetilde{Q} \forall i_0 \in V_0 \exists V_1 \in \widetilde{Q} \forall i_1 \in V_1 \dots \exists m (x \notin X_{i \uparrow m}) \leftrightarrow \\ &\leftrightarrow \neg \widetilde{Q} i_0 \widetilde{Q} i_1 \widetilde{Q} i_2 \dots \exists m (x \in \widetilde{X}_{i \uparrow m}) \leftrightarrow x \in \widetilde{R}\Phi\{\widetilde{X}_r\}. \end{aligned}$$

Переход от второй строки к третьей есть запись положения о детерминированности игры $\mathbf{V}_{Qx}\{X_r\}$. Переход от третьей строки к четвертой правомерен в силу того, что выбор в каждой цепи $U \in Q$ элемента, обладающего определенным свойством, равносильно выбору одной цепи V в дополнительной базе $\widetilde{Q}$, полностью состоящей из таких элементов.

Обобщения. Если задана последовательность δs -операций Φ_m , $m \in \omega$, то можно определить ее R -свертку $R\langle \Phi_m: m \in \omega \rangle$, записав в правой части определения (10) бесконечный ряд разных кванторов: $Q_0 i_0 Q_1 i_1 Q_2 i_2 \dots$ (где

Q_m — полная база для Φ_m), интерпретация которой посредством соответствующей игры не вызывает затруднений даже в случае, когда операции Φ_m имеют разные индексные множества. А. А. Ляпунов определил в [20] R -преобразование в еще более сложном случае: когда очередная операция зависит от кортежа индексов, фиксированных на предшествующих шагах, т. е. в игровой форме с кванторной приставкой вида

$$Q_{i_0}Q_{i_1}Q_{i_2} \dots Q_{i_{m+1}} \dots$$

Аналогичные обобщенные варианты имеются и для дополнительного преобразования $\tilde{R}$, а ниже в § 6 мы рассмотрим еще один (и, пожалуй, более интересный) способ обобщения.

Преобразования кванторов. Построение операции $R\Phi$ по формуле (10) можно привести к определению логической функции монотонного квантора $[RQ]$ над множеством RI :

$$[RQ]r\varphi(r) \leftrightarrow Q_{i_0}Q_{i_1}Q_{i_2} \dots \forall m\varphi(i \uparrow m).$$

Таким образом, $[RQ]$ — полная база операции $R\Phi$, получаемая из ее канонической базы RQ по формуле (3) § 1, т. е.

$$[RQ] = \{S \subseteq RI : \exists W \in RQ (W \subseteq S)\}.$$

Точно так же можно определить и квантор $\tilde{R}Q$.

Л. Харрингтон в неопубликованной работе [55] (резюме см. в [61]) исследовал сложность преобразования $Q \rightarrow Q^+ = [\tilde{R}(Q\tilde{Q})]$ с точки зрения рекурсии в высших типах. Из его результата следует, что преобразование $Q \rightarrow Q^+$ занимает весьма специфическое место среди объектов типа 3.

R -преобразование и сила операций. Напомним, что определение отношений $\leq$ и $\approx$, посредством которых можно сравнивать силу δs -операций, изложено в § 1.

Т е о р е м а. (а) $\Phi \leq R\Phi$, $\Phi^2 \leq R\Phi$ и вообще $\Phi^n \leq R\Phi$;

(б) если $\Phi \leq \Psi$, то $R\Phi \leq R\Psi$;

(в) $(R\Phi)(R\Phi) \approx R\Phi$ — нормальность $R\Phi$ в смысле [1];

(г) $RR\Phi \approx R\Phi$.

Утверждения (а) и (в) этой теоремы доказаны А. Н. Колмогоровым в [2], а утверждения (б) и (г) — Л. В. Канторовичем и Е. М. Ливенсоном [11]. Мы дадим здесь доказательство (в), по существу очень близкое к рассуждению Колмогорова, но та форма, которую удается ему придать при помощи бесконечных строк кванторов, делает идею классического доказательства совершенно прозрачной.

Итак, требуется доказать, что дважды бесконечная строка кванторов в выражении

$$(14) \quad Q_{i_0}Q_{i_1}Q_{i_2} \dots \forall m Q_{j_0}Q_{j_1}Q_{j_2} \dots \forall l (x \in X_{i \uparrow m, j \uparrow l})$$

может быть заменена простой бесконечной строкой после соответствующей переиндексации множеств $X_{i \uparrow m, j \uparrow l}$.

Обозначим через $\varphi(m, x)$ то выражение, которое стоит справа от $\forall m$ в (14). Полученную этим сокращением формулу $Q_{i_0}Q_{i_1}Q_{i_2} \dots \forall m\varphi(m, x)$ можно представить следующим образом:

$$Q_{i_0}[\varphi(0, x) \wedge Q_{i_1}[\varphi(1, x) \wedge Q_{i_2}[\varphi(2, x) \wedge \dots]]].$$

Тем самым, формула (14) принимает вид:

$$(15) \quad Q_{i_0}[Q_{j_{00}}Q_{j_{01}} \dots \forall l (x \in X_{i \uparrow 0, j \uparrow l}) \wedge \\ \wedge Q_{i_1}[Q_{j_{10}}Q_{j_{11}} \dots \forall l (x \in X_{i \uparrow 1, j \uparrow l}) \wedge \\ \wedge Q_{i_2}[Q_{j_{20}}Q_{j_{21}} \dots \forall l (x \in X_{i \uparrow 2, j \uparrow l}) \dots]]],$$

где $j_m \upharpoonright l = \langle j_{m0}, \dots, j_{ml} \rangle$. В этом представлении блок кванторов $Qj_0Qj_1Qj_2 \dots$ как бы размножился в счетном числе экземпляров, и тот экземпляр, который попал в строку, начинающуюся с Qi_m , мы снабдили добавочным индексом m , переименовав j_l в j_{ml} . Сделано это для того, чтобы можно было расположить все кванторы Qi_m и Qj_{ml} в строку $Qk_0Qk_1Qk_2 \dots$ с сохранением 1) естественного порядка среди кванторов Qi_m , и 2) естественного порядка внутри каждой последовательности $Qi_mQj_{m0}Qj_{m1} \dots$. После такого расположения формула (15) принимает новый вид:

$$(16) \quad Qk_0Qk_1Qk_2 \dots (\dots\dots\dots),$$

где многоточие в скобках обозначает конъюнкцию всевозможных выражений вида $x \in X_{i \upharpoonright m, j_m \upharpoonright l}$, в которых $m, l \in \omega$, а каждое k_n есть i_m либо j_{ml} . Определим теперь

$$Y_{k \upharpoonright n} = X_{i \upharpoonright m, j_m \upharpoonright l} \text{ при } k_n = j_{ml},$$

и

$$Y_{k \upharpoonright n} = X_{i \upharpoonright m, j_m \upharpoonright 0} \text{ при } k_n = i_m.$$

Легко видеть, что

$$(16) \quad \leftrightarrow Qk_0Qk_1 \dots \forall n (x \in Y_{k \upharpoonright n})$$

что и требовалось.

Данное доказательство может быть проведено совершенно строго в терминах стратегий.

Исторический комментарий. 1. Классическая теория R -преобразования на основе определения А. Н. Колмогорова и созданного им же метода индексов (см. следующий параграф) была разработана в основном усилиями А. А. Ляпунова [20—26]; в частности, в [24] содержится идея дополнительного преобразования $\tilde{R}$. Наиболее важные результаты Ляпунова в этой области связаны с R -множествами, и о них будет сказано ниже в §§ 5 и 6.

2. Современные исследования по R -преобразованию были начаты работами П. Хинмена [57, 58], где эта конструкция изложена с позиций теории рекурсии. Тогда же, в конце 60-х годов, началось интенсивное развитие общей теории индуктивных определений, в рамках которой одно из направлений связано с исследованиями обобщенных кванторов (см. [37], [40], [43], [56], [61], [66]). П. Ацел дал в [44] определение квантора $Q^+ = [\tilde{R}(Q\tilde{Q})]$ в наших обозначениях с логической функцией

$$Q^+r\varphi(r) \leftrightarrow Qi_0\tilde{Q}i_1Qi_2\tilde{Q}i_3 \dots \exists m\varphi(i \upharpoonright m)$$

и указал его трактовку через соответствующую игру. Отсюда было извлечено «игровое» определение R -преобразования, независимо открытое также Хинменом [59]. Наиболее полное изложение технической теории R -преобразования в современной форме содержится в [45].

3. Общую концепцию бесконечных игр, к которым относятся и игры Колмогорова, ввели в 1954 г. Д. Гейл и Ф. Стьюарт [54]. В 70-е годы методы, связанные с такими играми, заняли центральное место в дескриптивной теории множеств, а полученные с их помощью результаты сложились в красивую теорию проективных множеств, где все нечетные уровни проективной иерархии весьма близки по своим свойствам к первому проективному уровню (хорошо исследованному еще в 20-е и 30-е годы классическими средствами), а все четные уровни — ко второму уровню. Аксиомы детерминированности AD и PD , постулирующие детерминированность игр определенного типа, вполне серьезно обсуждаются как реальные кандидатуры на присоединение к традиционным аксиоматическим системам Цермело — Френкеля ZF и ZFC . (Обо всем этом более подробно сказано в [9], [36], [37], [41], [66].)

Таким образом, вопрос о приоритете в открытии бесконечных игр принимает принципиальное значение.

4. Обычно этот вопрос освещается с указанием на исследования польских математиков С. Банаха и С. Мазура начала 30-х годов, помещенные в рукопись, известную как «Шотландская тетрадь» и опубликованную значительно позже [64] (см. также [42], [53], [66]). Банах и Мазур рассмотрели несколько достаточно элементарных игр (без формулировки общей концепции).

Однако теперь, после того, как было найдено «игровое» определение R -преобразования, стало возможно и необходимо отнести открытие бесконечных игр еще на десятилетие назад и связать его с исследованиями А. Н. Колмогорова, фактически предоставившими первый в истории математики пример бесконечной игры.

§ 4. Индуктивный анализ. Индексы

Известны два главных исследовательских метода в связи с R -преобразованием: это «прямой» метод, заключающийся в рассмотрении баз, игр, стратегий, переходов от одной игры к другой, в различных преобразованиях строк кванторов и т. п., и метод индексов, или, в современной терминологии, индуктивный анализ.

Применительно к A -операции (которая, напомним, есть R -преобразование счетного объединения) аппарат индексов был введен еще в самых первых работах по A -множествам М. Я. Суслина [32], Н. Н. Лузина и В. Серпинского [18]. Колмогоров же дал в [2] разработку метода для совершенно общей ситуации, где существенное значение приобретают тонкости, не проявляющиеся в указанном частном случае.

Зафиксируем δs -операцию $\Phi = \Phi_Q$, заданную своей полной базой Q , т. е. монотонным квантором над некоторым множеством I . Фиксируется также семейство $\{X_r: r \in RI\}$ множеств X_r , расположенных в определенном объемлющем пространстве. Цель индуктивного анализа — исследование множества $X = R\Phi\{X_r\}$ и множества $\tilde{X} = \tilde{R}\tilde{\Phi}\{\tilde{X}_r\}$ (которое, как будет показано, является дополнительным к X относительно объемлющего пространства; множества $\tilde{X}_r$, как обычно, предполагаются дополнительными к X_r) посредством замены операций $R\Phi$ и $\tilde{R}\tilde{\Phi}$ особым механизмом многократного применения исходных более простых операций Φ и $\tilde{\Phi}$.

Индуктивное построение. Введем сначала множество $\Xi = RI \cup \{\Lambda\}$, пополнив совокупность кортежей RI пустым кортежем Λ , и для этого добавленного кортежа через X_Λ обозначим множество, равное рассматриваемому объемлющему пространству; тем самым, $\tilde{X}_\Lambda = \emptyset$. Следуя А. Н. Колмогорову [2], определяем индукцией по порядковому числу α множества $X_{s\alpha}$ ($s \in \Xi$) и дополнительные к ним $\tilde{X}_{s\alpha}$:

$$\begin{aligned} X_{\Lambda 0} &= X_\Lambda, \quad \tilde{X}_{\Lambda 0} = \emptyset, \quad X_{i \uparrow m, 0} = \bigcap_{n \leq m} X_{i \uparrow n}, \quad \tilde{X}_{i \uparrow m, 0} = \bigcup_{n \leq m} \tilde{X}_{i \uparrow n}, \\ (17) \quad X_{s\alpha} &= \left(\bigcap_{\gamma < \alpha} X_{s\gamma} \right) \cap \Phi \left\{ \bigcap_{\gamma < \alpha} X_{si, \gamma} : i \in I \right\}, \\ \tilde{X}_{s\alpha} &= \left(\bigcup_{\gamma < \alpha} \tilde{X}_{s\gamma} \right) \cup \tilde{\Phi} \left\{ \bigcup_{\gamma < \alpha} X_{si, \gamma} : i \in I \right\} \end{aligned}$$

при $\alpha > 0$; через si обозначен кортеж s , продолженный элементом i , например, $(1, 2)3 = \langle 1, 2, 3 \rangle$.

При фиксированном s множества $\tilde{X}_{s\alpha}$ возрастают, а $X_{s\alpha}$, следовательно, убывают с возрастанием α , и поэтому весь процесс индуктивного построения, согласно равенству (17), стабилизируется на некотором шагу. Полу-

ченные на этом шагу предельные формы множеств $X_{s\alpha}$ и $\widetilde{X}_{s\alpha}$ обозначим через $X_{s\infty}$ и $\widetilde{X}_{s\infty}$ (нетрудно проверить, что при не более чем счетном множестве I будет $X_{s\infty} = X_{s\omega_1}$ и $\widetilde{X}_{s\infty} = \widetilde{X}_{s\omega_1}$).

Интерпретация: выигрывающие позиции. Игровой подход к R -преобразованию позволяет дать красивую интерпретацию изложенного построения в терминах выигрывающих позиций. Напомним, что принадлежность какой-либо точки x к множеству $X = R\Phi\{X_r\}$ определяется наличием у игрока Q выигрывающей стратегии в игре $\forall_{Qx}\{X_r\}$, одним из инструментов поиска которой, по аналогии с практическими играми типа шахмат, может служить определение выигрывающих позиций — т. е. таких вариантов некоторого числа начальных ходов, после которых гарантированный выигрыш одного из игроков становится очевидным.

После того, как игрок I сделал очередной ход i_m в игре $\forall_{Qx}\{X_r\}$, дальнейшее протекание игры и ее результат не будут зависеть от предшествующих ходов $U_0, \dots, U_m$ игрока Q , т. е. *позицией* в этой игре следует считать любой кортеж $\langle i_0, \dots, i_m \rangle = i \upharpoonright m \in RI$, а также пустой кортеж Λ — начальную позицию.

Л е м м а 1. *Всякая позиция s из множества $S_{x\infty} = \{s: x \in X_{s\infty}\}$ — выигрывающая для игрока Q в игре $\forall_{Qx}\{X_r\}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вспомогательные множества $S_{x\alpha} = \{s: x \in X_{s\alpha}\}$ удовлетворяют соотношениям, вытекающим из определения (17). Эти соотношения нам удобно записать в виде эквивалентностей

$$s \in S_{x\alpha} \leftrightarrow s \in \bigcap_{\gamma < \alpha} S_{x\gamma} \wedge Qi (si \in \bigcap_{\gamma < \alpha} S_{x\gamma}),$$

и отдельно $S_{x_0} = \{\Lambda\} \cup \{i \upharpoonright m: \forall n \leq m (x \in X_{i \upharpoonright n})\}$. Стало быть, для «предельного» множества $S_{x\infty} = \bigcap_{\alpha} S_{x\alpha}$ мы имеем

$$s \in S_{x\infty} \leftrightarrow Qi (si \in S_{x\infty}) \leftrightarrow \exists U \in Q \forall i \in U (si \in S_{x\infty}).$$

Это означает, что в любой позиции $s \in S_{x\infty}$ игрок Q имеет ход $U \in Q$ такой, что при любом ответе $i \in U$ противника продолженный кортеж si снова будет принадлежать $S_{x\infty}$. Тем самым, в игре с позиции $s \in S_{x\infty}$ игрок Q имеет стратегию, гарантирующую, что все последующие позиции не выйдут из множества $S_{x\infty}$, т. е. гарантирующую выигрыш для Q , ибо $S_{x\infty} \subseteq S_{x_0}$.

Л е м м а 2. *Все позиции из множества $\widetilde{S}_{x\infty} = \{s: x \in \widetilde{X}_{s\infty}\}$ — выигрывающие для игрока I .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дополнительные относительно Ξ к определенным выше $S_{x\alpha}$ множества $\widetilde{S}_{x\alpha} = \{s: x \in \widetilde{X}_{s\alpha}\}$ удовлетворяют соотношениям:

$$s \in \widetilde{S}_{x\alpha} \leftrightarrow s \in \bigcup_{\gamma < \alpha} \widetilde{S}_{x\gamma} \vee \widetilde{Q}i (si \in \bigcup_{\gamma < \alpha} S_{x\gamma}) \leftrightarrow s \in \bigcup_{\gamma < \alpha} \widetilde{S}_{x\gamma} \vee \forall U \in Q \exists i \in U (si \in \bigcup_{\gamma < \alpha} \widetilde{S}_{x\gamma}),$$

где $\widetilde{Q}$ — дуальный квантор к квантору Q , имеющий логическую функцию $\exists V \in \widetilde{Q} \forall i \in V$ или $\forall U \in Q \exists i \in U$, что эквивалентно. А при $\alpha = 0$ отдельно

$$\widetilde{S}_{x_0} = \{i \upharpoonright m \in RI: \exists n \leq m (x \notin X_{i \upharpoonright n})\}.$$

Из этих двух соотношений индукцией по α немедленно получаем: всякая позиция $s \in \widetilde{S}_{x\alpha}$ — выигрывающая для игрока I . Однако $\widetilde{S}_{x\infty} = \bigcup_{\alpha} \widetilde{S}_{x\alpha}$. $\square$

С л е д с т в и е 1. *Игра Колмогорова $\forall_{Qx}\{X_r\}$ детерминирована.*

В самом деле, начальная позиция Λ принадлежит одному из взаимно дополнительных множеств $S_{x\infty}$ и $\widetilde{S}_{x\infty}$, и поэтому, согласно леммам, будет выигрышной позицией для одного из игроков.

Напомним, что детерминированность игры $\forall_{Qx}\{X_r\}$ влечет опирающееся на нее свойство (13) дополнительности преобразования $\widetilde{R}$, введенного формулой (10-д) в предыдущем параграфе.

С л е д с т в и е 2. *Множества $X = R\Phi\{X_r\}$ и $\widetilde{X} = \widetilde{R}\widetilde{\Phi}\{\widetilde{X}_r\}$ взаимно дополняют.*

Индексы. Параллельно с индуктивным построением (17), Колмогоров дает в [2] определение индексов. Применительно к принятой нами системе обозначений, $\text{Ind}_s x = \infty$ при $x \in X_{s\infty}$, а если $x \in \widetilde{X}_{s\infty}$, то через $\text{Ind}_s x$ обозначается наименьшее число α такое, что $x \in \widetilde{X}_{s\alpha}$.

Т е о р е м а К о л м о г о р о в а [2]. *Имеют место равенства*

$$X = X_{\Lambda 0} = \bigcap_{\alpha} X_{\Lambda \alpha} = \{x: \Lambda \in S_{x\infty}\} = \{x: \text{Ind}_{\Lambda} x = \infty\};$$

$$\widetilde{X} = \widetilde{X}_{\Lambda 0} = \bigcup_{\alpha} \widetilde{X}_{\Lambda \alpha} = \{x: \Lambda \notin S_{x\infty}\} = \{x: \text{Ind}_{\Lambda} x < \infty\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о заключается в леммах 1 и 2: например,

$$x \in X \leftrightarrow \text{игрок } Q \text{ имеет } BC \text{ в игре } \forall_{Qx}\{X_r\} \leftrightarrow \Lambda \in S_{x\infty}.$$

З а м е ч а н и е 1. Индуктивный анализ по Колмогорову был главным техническим средством развития классической теории R -множеств в работах А. А. Ляпунова [20—25]. Ляпунов ввел в [20] специальный термин: Т-операция, под которым понимается операция, заданная индуктивным построением по формулам (17).

З а м е ч а н и е 2. С развитием общей теории индуктивных определений (см. о ней [37], [66]) выяснилось, что выраженное теоремой Колмогорова соответствие между однократным применением операций $R\Phi$ и $\widetilde{R}\widetilde{\Phi}$ и многошаговым индуктивным процессом (17) с операциями Φ и $\widetilde{\Phi}$ представляет весьма глубокий принцип общего характера, смысл которого следующий. Предположим, что каждый шаг некоторого индуктивного построения производится при помощи фиксированного набора операций. Тогда для построения «сжимающего» типа (т. е. если конструируемые множества убывают, как, например, множества $X_{s\alpha}$) конечный результат может быть достигнут однократным применением операции, представляющей собой $\widetilde{R}$ -преобразование суперпозиции исходных операций, а для «расширяющих» построений следует брать R -преобразование. Теорема Я. Московакиса на этот счет приведена в [66] или в [37, с. 255], а там же на с. 256 сказано о ее возможных обобщениях.

З а м е ч а н и е 3. Читатель, знакомый с доказательством теоремы Гейла — Стюарта [54] о детерминированности открытых игр (на русском языке см. в [39]), может заметить, что доказательства лемм 1 и 2 и следствия 1 (а они являются прямым переложением выкладок Колмогорова в [2] через отмеченное в § 3 соответствие между цепями и стратегиями) совершенно идентичны по существу рассуждениям из [54]. Дело в том, что в игре $\forall_{Qx}\{X_r\}$ множество всех «партий» $i = \langle i_0, i_1, i_2, \dots \rangle$, закончившихся победой игрока I , открыто в пространстве I^{ω} .

Можно показать, что многие известные доказательства детерминированности игр того или иного класса довольно естественно укладываются в схему индуктивного анализа соответствующих операций.

§ 5. R -множества: построение иерархии

В заключительном замечании в тексте статьи [2] А. Н. Колмогоров указывает, что любое множество вещественной прямой может быть построено из сегментов посредством соответствующей δs -операции, база которой образована цепями сегментов, стягивающимися к точкам этого множества — а раз так, то нет особого смысла в изучении совершенно общих операций; напротив, будет более интересно перейти к «специальным классам множеств, порождаемых достаточно простыми операциями». Но какие операции следует отнести к достаточно простым?

Правильную идею на этот счет можно извлечь из аналогии с иерархией множеств по Колмогорову: коль скоро мы рассматриваем (см. § 2) классы множеств, замкнутые относительно данной операции Φ и взятия дополнительного множества, то столь же естественно будет рассмотреть и совокупности δs -операций, замкнутые относительно R -преобразования и взятия дополнительной операции, а также, для удобства, относительно суперпозиции, и содержащие — вместе со всякой своей операцией — все те операции, которые ей эквивалентны, т. е. дают одни и те же множества в применении к любым семействам множеств фиксированного класса.

Такие системы операций, ограниченные δs -операциями с не более чем счетными индексными множествами, А. А. Ляпунов назвал в [20] R -замкнутыми, и выделил из них в качестве основной наименьшую R -замкнутую систему $\mathcal{R}_0$, содержащую операцию $E = \bigcup_{\{0\}} = \bigcap_{\{0\}}$. Из рассмотренных в § 3 примеров ясно, что эта система $\mathcal{R}_0$ содержит действия $\bigcup_{\omega}$ и $\bigcap_{\omega}$, A -операцию и дополнительную к ней Γ -операцию П. С. Александрова [8], и множество других δs -операций, получаемых из E посредством различных комбинаций тех преобразований, которые названы в определении R -замкнутости. Однако во всем этом многообразии можно выделить определенный порядок, используя ту же идею чередования «положительного» преобразования с переходом к дополнительному объекту, на которой основана иерархия множеств по Колмогорову.

Нормальный ряд операций. Этот ряд образован δs -операциями R_α , $\widetilde{R}_\alpha$, занумерованными при помощи конечных и счетных порядковых чисел α . Построение проходит индукцией по α :

$R_0 = \bigcup_{\omega}$ — начальная операция;

$\widetilde{R}_\alpha$ — операция, дополнительная к операции R_α ;

$R_\alpha = R \left(\bigcap_{\alpha} \{ \widetilde{R}_\gamma : \gamma < \alpha \} \right)$ при $\alpha \geq 1$

(т. е. в качестве R_α берется R -преобразование суперпозиции всех операций R_γ , $\gamma < \alpha$, с внешней операцией $\bigcap_{\alpha}$).

Источником этого построения является работа [2], где Колмогоров конструирует начальные операции нормального ряда по схеме:

$$\left(\bigcap_{\omega} = R_0 \right) \rightarrow \left(\bigcup_{\omega} = \widetilde{\bigcap}_{\omega} = \widetilde{R}_0 \right) \rightarrow (A = R \bigcup_{\omega} \approx R_1) \rightarrow \\ \rightarrow (\Gamma = \widetilde{A} = \widetilde{R}_1) \rightarrow (H = R\Gamma \approx R_2).$$

Точное же определение дано А. А. Ляпуновым в [19]. Это определение мы и привели здесь, лишь добавив операции $\bigcap_{\omega}$ и $\bigcup_{\omega}$ в качестве нулевого уровня

(у Ляпунова нормальный ряд начинается с A и Γ).

Следующие простые свойства операций нормального ряда отмечены в [20]; они легко проверяются при помощи теоремы о свойствах R -преобразования § 3 и теоремы о дополнениях § 1.

1. Все операции нормального ряда входят в систему $\mathcal{R}_0$.
2. Если $\Phi \in \mathcal{R}_0$, то $\Phi \leq R_\alpha$ для подходящего $\alpha < \omega_1$.
3. $R_\alpha R_\alpha \approx R_\alpha$ и $\widetilde{R}_\alpha \widetilde{R}_\alpha \approx \widetilde{R}_\alpha$ для всех α .
4. $R_\gamma < R_\alpha$, $R_\gamma < \widetilde{R}_\alpha$, $\widetilde{R}_\gamma < R_\alpha$, $\widetilde{R}_\gamma < \widetilde{R}_\alpha$ при $\gamma < \alpha$.

Два замечания о нюансах в построении нормального ряда. Нетрудно проверить, что $R_\alpha \approx R\widetilde{R}_\gamma$ при $\alpha = \gamma + 1$, и это означает, что равенство $R_{\gamma+1} = R\widetilde{R}_\gamma$ можно принять за определение R_α на непредельных шагах, как это сделано, например, в [47], оставив третий пункт данного выше определения в силе для предельных α . И также легко убедиться, что

$$R_\alpha \approx R \left(\bigcap_{\alpha} \{R_\gamma \widetilde{R}_\gamma : \gamma < \alpha\} \right),$$

так что и это равенство может быть взято за основу построения, как это фактически и сделано Ляпуновым в [20].

R -множества. По определению [19], [20] эти множества составляют наименьший класс множеств в рассматриваемом пространстве, содержащий все открытые (для польских пространств равносильно: все замкнутые или все борелевские) множества и замкнутый относительно всех операций R_α и $\widetilde{R}_\alpha$. Иерархия R -множеств образована рядом взаимно дополнительных классов

$$\Sigma R_\alpha = R_\alpha(F), \quad \Pi R_\alpha = \widetilde{R}_\alpha(G),$$

из которых получается класс $\Delta R_\alpha = \Sigma R_\alpha \cap \Pi R_\alpha$ (традиционные их обозначения суть R_α , CR_α , BR_α соответственно).

Таким образом, $\Sigma R_0 = F$ и $\Pi R_0 = G$ — классы соответственно замкнутых и открытых множеств, далее $\Sigma R_1 = A$ — класс суслинских, или A -множеств, и т. д.

Классы ΣR_α , ΠR_α обладают свойствами, в точности аналогичными указанным выше свойствам соответствующих операций и вытекающими из них (а также из того, что $G \subseteq F_\sigma$ в польских пространствах). Именно:

1. Всякое R -множество попадает в один из классов ΣR_α , ΠR_α — а тогда и во все вышележащие классы.

2. Если $\gamma < \alpha < \omega_1$, то $\Sigma R_\gamma \cup \Pi R_\gamma \subseteq \Delta R_\alpha$.

3. Классы ΣR_α , ΠR_α замкнуты относительно операций R_α и $\widetilde{R}_\alpha$ соответственно. Отсюда и из предыдущего следует, что

$$\Sigma R_\alpha = R_\alpha(B) \quad \text{и} \quad \Pi R_\alpha = \widetilde{R}_\alpha(B) \quad \text{при} \quad \alpha \geq 1.$$

Рассматривается и более тонкая иерархия подклассов, определяемых равенствами: $\Sigma R_{\alpha\xi} = \Sigma_\xi^{R_\alpha}$ (в смысле § 1). А. А. Ляпунов [20, 21] установил, что объединяющий эти подклассы класс $\nabla(R_\alpha) = \bigcup_{\xi < \omega_1} \Sigma R_{\alpha\xi}$ тождественен классу $\Delta R_{\alpha+1}$ только при $\alpha = 0$ (собственно, это теорема М. Я. Суслина [32]), а при $\alpha \geq 1$ составляет собственную часть последнего.

Уместно отметить, что $\nabla(R_0) = \Delta R_1 = B$ — класс борелевских множеств, а $\nabla(R_1) = \nabla(A) = C$ — класс всех C -множеств данного пространства.

Обширная проблематика исследований по R -множествам будет представлена в § 7 нашего обзора, а здесь мы остановимся на вопросе, пожалуй, наиболее принципиальном: соотношения между R -множествами и проективными множествами.

Место R -множеств в проективной иерархии. Это очень важный вопрос, поскольку проективная иерархия Н. Н. Лузина рассматривается в дескриптивной теории множеств как главная эталонная мера сложности точечных множеств, и вопрос очень трудный, поскольку даже для значительно более

простых C -множеств задача их проективной классификации была решена Л. В. Канторовичем и Е. М. Ливенсоном [10, 12] лишь через несколько лет после открытия C -множеств и выхода статьи Е. А. Селивановского [31], где эта задача была поставлена.

Решение для R -множеств было найдено А. А. Ляпуновым:

Т е о р е м а 1 [20]. *Все R -множества принадлежат классу Δ_2^1 .*

(Мы используем современные обозначения Σ_n^1 , Π_n^1 , Δ_n^1 для проективных классов, которым соответствуют более традиционные A_n , CA_n , B_n , см. [9], [33], [41].)

Д о к а з а т е л ь с т в о основывается на следующей лемме:

Л е м м а 1 [20]. *Если δs -операция Φ над счетным индексным множеством имеет полную базу Q класса Δ_n^1 , где $n \geq 1$, то $\Phi(\Delta_n^1) \subseteq \Delta_n^1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о можно записать в виде двойной эквивалентности:

$$x \in \Phi\{X_i\} \leftrightarrow \exists U \subseteq I(U \in Q \wedge \forall i \in U(x \in X_i)) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \forall U \subseteq I(\forall i(x \in X_i \rightarrow i \in U) \rightarrow U \in Q),$$

из которой и получается искомый результат, так как квантор $\exists U \subseteq I$, примененный к Δ_n^1 -отношению, дает Σ_n^1 -отношение, а квантор $\forall U \subseteq I$, применяясь к Δ_n^1 -отношению, дает Π_n^1 -отношение. Полнота базы Q требуется только для вывода второй эквивалентности.

Теперь для доказательства теоремы нам остается только проверить, что полные базы Q_α операций R_α все являются Δ_2^1 -множествами в пространствах $\mathcal{P}(I_\alpha)$, где I_α — индексное множество операции R_α . Такая проверка проведена Ляпуновым в [20, гл. III], а в несколько иной форме доказательство теоремы изложено им в работе [23].

Теорема Ляпунова не дает, однако, полной ясности в рассматриваемом вопросе, поскольку непонятно, образует ли класс всех R -множеств собственную часть класса Δ_2^1 или совпадает с последним. Эта дополнительная задача весьма интересовала Ляпунова (см. [25]), однако найти решение при помощи только техники классической теории R -преобразования не удалось. Окончательное решение было получено Дж. Бэрджесом [47—50] на основе такого обобщения конструкции R -преобразования, которое легко извлекается из «игрового» определения (а классический его аналог неизвестен).

§ 6. Природа R -множеств

В исследованиях начала 80-х годов были открыты новые подходы к R -множествам. Эти подходы, в общем, берут начало от идей и конструкций работы А. Н. Колмогорова [2] и, обобщая в них ту или иную деталь, предоставляют возможность взглянуть на R -множества с совершенно новых позиций. Мы будем говорить о трех таких концепциях: программирование, игровые борелевские операции и игровое проектирование или гейм-оператор.

Программирование борелевских множеств. Определение этой операции было дано Д. Блекуэллом [46]. Зафиксируем счетное множество Ξ . *Программой* здесь называется всякая функция $p: \mathcal{P}(\Xi) \rightarrow \mathcal{P}(\Xi)$, обладающая тем свойством, что $S \subseteq p(S)$ для любого $S \subseteq \Xi$. Последовательность *производных* программ от данной программы p конструируется индукцией по α :

$$p_0 = p \quad \text{и} \quad p_\alpha(S) = p\left(\bigcup_{\gamma < \alpha} p_\gamma(S)\right) \quad \text{при} \quad \alpha > 0.$$

Предельная в этом ряду программа $p_\infty = p_{\omega_1}$ уже, очевидно, не меняется дальше, т. е. $pp_\infty = p_\infty$.

Далее, пусть H — какая-либо совокупность точечных множеств (например, класс борелевских множеств $\mathbf{B} = \Delta_1^1$). Функция F называется *H -изменяемой*, если F -образы открытых множеств все принадлежат H , и *H -программируемой*, если она имеет вид суперпозиции $F = f_1 p_\infty f_2$ для подходящей

H -измеримой программы p и B -измеримых функций f_1 и f_2 . (Множество $\mathcal{P}(\Xi)$ предполагается наделенным естественной топологией канторова дисконтинуума, относительно которой и рассматривается H -измеримость программ.) Наконец, точечное множество называется H -программируемым, когда H -программируема его характеристическая функция; совокупность всех таких множеств имеет обозначение HP .

Например, в ситуации, рассмотренной в § 4, возьмем $\Xi = RI \cup \{\Lambda\}$ и определим для $S \subseteq \Xi$:

$$p(S) = S \cup \{s \in \Xi: \widetilde{Q}i(si \in S)\}.$$

Если квантор $\widetilde{Q}$ борелевский как подмножество $\mathcal{P}(\Xi)$ (скажем, $\widetilde{Q} = \exists$ или $\forall$), то эта программа будет B -измеримой, а множества X и $\widetilde{X}$ становятся B -программируемыми: например, для $\widetilde{X}$ можно взять $f_1(x) = \{r \in RI: x \notin X_r\}$ и $f_2(S) = 1$ или 0 в зависимости от того, принадлежит или нет пустой кортеж Λ множеству $S \subseteq \Xi$. Таким образом, взяв $\widetilde{Q} = \forall$ (тогда $\Phi = \bigcup_{\omega} R\Phi = A$), мы получаем: все A -множества и все CA -множества являются B -программируемыми. На самом деле, класс BP включает даже все C -множества и не исчерпывается ими, а сам он составляет собственную часть класса ΔR_2 , см. [47, 50].

Как видно, программирование выведено из индуктивного анализа по Колмогорову.

Операцию программирования можно производить повторно, конструируя классы P_α индукцией по $\alpha < \omega_1$: $P_0 = B$ и $P_\alpha = (\bigcup_{\gamma < \alpha} P_\gamma)P$ при $\alpha > 0$.

Множества класса $P = \bigcup_{\alpha < \omega_1} P_\alpha$ называются программируемыми [50]; легко видеть, что $PP = P$ и класс P — наименьший (среди включающих все борелевские множества), который обладает этим свойством. В работе [50] доказана

Т е о р е м а 1. *Класс P тождествен классу всех R -множеств.*

Однако из приведенного выше примера следует, что нет точного соответствия между уровнями обеих иерархий.

Игровые борелевские операции. К этому понятию приводит такое обобщение преобразований R и $\widetilde{R}$, которое связано не с процедурой игры, интерпретирующей бесконечную строку кванторов, а с определением победителя в результате игры. Именно, пусть λ — не обязательно монотонный квантор над множеством натуральных чисел ω . Можно рассмотреть операцию $R\Phi/\lambda$, определенную так:

$$x \in R\Phi/\lambda\{X_r\} \leftrightarrow Qi_0Qi_1Qi_2 \dots \lambda m(x \in X_{i \uparrow m}),$$

причем правая часть эквивалентности интерпретируется через игру, полностью аналогичную играм $\forall_{Qx}\{X_r\}$ и $\exists_{Qx}\{X_r\}$ из § 3 за исключением того, что игрок Q объявляется победителем при выполнении условия $\{m: x \in X_{i \uparrow m}\} \in \lambda$, т. е. при $\lambda m(x \in X_{i \uparrow m})$.

Богатые возможности этого обобщения проявляются уже в достаточно простом (и наиболее исследованном) случае $Q = \forall\exists$. Р. Воот и К. Шиллинг [71], [69] построили и рассмотрели семейство операций $G\lambda$ (G_L^ω в указанных статьях), следующим образом определив их действие:

$$(18) \quad x \in G\lambda\{X_r: r \in R\omega\} \leftrightarrow \forall i_0 \exists i_1 \forall i_2 \exists i_3 \dots \lambda n(x \in X_{i \uparrow n}),$$

где область пробега каждого i_n есть ω . Итак, $x \in G\lambda\{X_r\}$, когда игрок $\exists$ имеет выигрывающую стратегию в игре $\lambda_x\{X_r\}$, где игроки $\forall$ и $\exists$ по очереди делают ходы в виде натуральных чисел $i_0, i_1, i_2, i_3, \dots$ (начинает,

естественно, $\forall$) и $\exists$ выигрывает, если множество $\{n: x \in X_{i \uparrow n}\}$ принадлежит λ .

Наибольшие возможности для содержательного исследования предоставляют операции $G\lambda$, относящиеся к числу борелевских — т. е. когда квантор λ является борелевским (как подмножество пространства $\mathcal{P}(\omega)$ с топологией канторова дисконтинуума); именно такие операции и рассмотрены в [71, 69]. Вообще для заданного класса L игровой L -операцией уместно назвать каждую операцию $G\lambda$ с $\lambda \in L$. Если дополнительно фиксирован еще один класс K , то через $GL(K)$ обозначим совокупность всех множеств вида $G\lambda\{X_r\}$, где $\lambda \in L$, а каждое X_r принадлежит K . Ниже мы покажем, что природа множеств из $GL(K)$ определяется классом L , но практически не зависит, по крайней мере в борелевской области, от K .

Игровое проектирование. Это операция иного типа, чем рассматривавшиеся в нашем обзоре до этого момента. Она ближе к обычной проекции, и относится к борелевским игровым операциям примерно таким же образом, как проекция — к A -операции, т. е. в принципе сильнее, но на борелевской области дает то же самое.

Пусть $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$, где $\mathcal{X}$ — рассматриваемое объемлющее пространство, а $\mathcal{N} = \omega^\omega$ — бэровское пространство, образованное всевозможными бесконечными последовательностями $\mathbf{i} = \langle i_0, i_1, i_2, \dots \rangle$ натуральных i_n . Положим

$$\mathfrak{D}P = \{x \in \mathcal{X}: \forall i_0 \exists i_1 \forall i_2 \exists i_3 \dots (\langle x, \mathbf{i} \rangle \in P)\}.$$

Таким образом, $x \in \mathfrak{D}P$, когда игрок $\exists$ имеет ВС в игре $\mathfrak{D}_x P$, которая проходит подобно описанной выше $G\lambda_x\{X_r\}$, но $\exists$ объявляется победителем при выполнении условия $\langle x, \mathbf{i} \rangle \in P$, где $\mathbf{i} = \langle i_0, i_1, i_2, \dots \rangle$.

Если K — некоторый класс точечных множеств, то через $\mathfrak{D}K$ обозначается совокупность всех множеств вида $\mathfrak{D}P$, $P \in K$.

Предложение (отмечено в [69]). $\mathfrak{D}\mathbf{B} = G\mathbf{B}(\mathbf{B})$.

Включение слева направо здесь совсем простое: множество

$$P = \{\langle x, \mathbf{i} \rangle: \lambda n(x \in X_{i \uparrow n})\}$$

— борелевское, будучи прообразом борелевского λ при отображении $\langle x, \mathbf{i} \rangle \rightarrow \{n: x \in X_{i \uparrow n}\}$, которое $\mathbf{B}$ -измеримо при борелевских X_r . Включение справа налево производится индукцией по борелевскому построению P .

З а м е ч а н и е. Можно показать, что вообще

$$\mathfrak{D}L = GL(\mathbf{B}) = GL(\mathbf{F}) = GL(\mathbf{G})$$

для любого класса L борелевской иерархии, т. е. действие операций фиксированного класса $L = \Sigma_\alpha^0$, Π_α^0 или Δ_α^0 1) на борелевские множества (класс $\mathbf{B}$), 2) на замкнутые множества (класс $\mathbf{F}$) и 3) на открытые множества (класс $\mathbf{G}$) во всех трех вариантах дает одно и то же и то же самое, что игровое проектирование множеств класса L .

Игровое проектирование и R -множества. Следующая теорема Дж. Бэрджесса [47, 49] является, пожалуй, наиболее глубокой во всей современной теории операций над множествами.

Т е о р е м а 2. $\mathfrak{D}\Delta_1^0 = \mathbf{B}$, $\mathfrak{D}\Delta_2^0 = \mathbf{C}$, $\mathfrak{D}\Delta_3^0 = \mathbf{R}$.

Этими тремя равенствами прежде всего демонстрируется замечательная естественность самой концепции $\mathbf{C}$ -множеств и $\mathbf{R}$ -множеств: мы видим, что процесс весьма общего характера преобразует начальные Δ -классы борелевской иерархии

$$\Delta_1^0 = \mathbf{F} \cap \mathbf{G}, \quad \Delta_2^0 = \mathbf{F}_\sigma \cap \mathbf{G}_\delta, \quad \Delta_3^0 = \mathbf{F}_{\sigma\delta} \cap \mathbf{G}_{\delta\sigma}$$

в классы $\mathbf{B}$ (борелевские множества), $\mathbf{C}$ и $\mathbf{R}$.

О г о в о р к а. Первое равенство теоремы Бэрджесса мы сформулировали в его стандартном виде — когда оно верно для множеств бэровского пространства $\mathcal{N}$ (в котором открыто-замкнутые множества образуют базу

топологии). Однако применительно к множествам произвольного (совершенного) польского пространства $\mathcal{X}$ класс Δ_1^0 следует заменить семейством всех замкнутых (или всех открытых, или всех борелевских, что дает одно и то же) множеств $P \subseteq \mathcal{X} \times \mathcal{N}$, обладающих тем свойством, что любое сечение $P_x = \{\alpha: \langle x, \alpha \rangle \in P\}$ является Δ_1^0 -множеством в $\mathcal{N}$. Второе и третье равенства верны в общем случае, но остаются в силе и после замены классов Δ_2^0 и Δ_3^0 семействами всех борелевских множеств с сечениями, принадлежащими классам Δ_2^0 и Δ_3^0 соответственно.

Теорема Бэрджееса допускает переформулировку в терминах операций. Например, для третьего равенства, 1) все операции R_α и $\widetilde{R}_\alpha$ могут быть представлены в эквивалентном виде $G\lambda$ с монотонным квантором $\lambda \subseteq \mathcal{P}(\omega)$ класса Δ_3^0 , и обратно, 2) класс R замкнут относительно действия любой игровой Δ_3^0 -операции.

Вместе с тем, равенство $R = \mathfrak{D}\Delta_3^0$ обсуждаемой теоремы приводит к полному решению проблемы о точном соотношении класса R -множеств с проективным классом Δ_2^1 . Решение опирается на три простых факта.

Ф а к т 1. Если P — борелевское множество, то для любой точки x игра $\mathfrak{D}_x P$ детерминирована.

Действительно, множество $P_x = \{i: \langle x, i \rangle \in P\}$ всех выигранных для игрока $\exists$ партий в этой игре — борелевское, а все игры, удовлетворяющие этому условию (они называются борелевскими играми) детерминированы по теореме Д. Мартина [62] (см. также [63, 67]).

Ф а к т 2. $\mathfrak{D}B \subseteq \Delta_2^1$.

Рассмотрим произвольное борелевское P . По определению

$$x \in \mathfrak{D}P \leftrightarrow \exists \sigma (\sigma - c. \text{ для } \exists) \forall \tau (\tau - c. \text{ для } \forall) \sigma * \tau \in P_x \leftrightarrow \\ \leftrightarrow \neg \exists \tau (\tau - c. \text{ для } \forall) \forall \sigma (\sigma - c. \text{ для } \exists) \sigma * \tau \notin P_x,$$

где «с.» означает «стратегия», через $\sigma * \tau$ обозначена партия $i = \langle i_0, i_1, \dots \rangle$ в игре $\mathfrak{D}_x P$, однозначно определенная, коль скоро фиксированы стратегии σ и τ игроков $\exists$ и $\forall$, а вторая эквивалентность есть следствие детерминированности игры $\mathfrak{D}_x P$. Но стратегиями здесь являются функции, заданные на множестве $R\omega$ всех конечной длины кортежей натуральных чисел, со значениями в ω , и потому любая биекция $R\omega$ на ω индуцирует кодировку стратегий точками $\mathcal{N}$, посредством которой двойная эквивалентность приводится к виду:

$$x \in \mathfrak{D}P \leftrightarrow \exists \sigma \in \mathcal{N} \forall \tau \in \mathcal{N} P_1(x, \sigma, \tau) \leftrightarrow \neg \exists \tau \in \mathcal{N} \forall \sigma \in \mathcal{N} P_2(x, \sigma, \tau),$$

где P_1 и P_2 — борелевские отношения. Отсюда и следует, что $\mathfrak{D}P \in \Sigma_2^1$ и $\mathfrak{D}P \in \Pi_2^1$ — значит, $\mathfrak{D}P \in \Delta_2^1$.

Ф а к т 3. В каждом классе $\mathfrak{D}\Pi_\alpha^0$ имеется множество, дополнение которого не принадлежит этому классу.

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится примерно тем же рассуждением, что и для теоремы о дополнениях в § 2.

С л е д с т в и е. Класс всех R -множеств есть собственная часть проективного класса Δ_2^1 .

Действительно, допустив, что $R = \mathfrak{D}\Delta_3^0 = \Delta_2^1$, мы получаем автоматически $\mathfrak{D}\Pi_3^0 = \Delta_2^1$, ибо $\Delta_3^0 \subseteq \Pi_3^0$ и $\mathfrak{D}\Pi_3^0 \subseteq \mathfrak{D}B$, что, однако, вступает в противоречие с фактом 3, так как класс Δ_2^1 замкнут относительно дополнения.

Итак, мы имеем строго возрастающую последовательность классов $\mathfrak{D}\Delta_\alpha^0$, $\alpha < \omega_1$, порождаемых игровым проектированием Δ_α^0 -множеств. Эти классы дают в объединении класс $\mathfrak{D}B \subseteq \Delta_2^1$. Здесь также можно поставить вопрос о выполнении точного равенства или строгого включения, и снова ответ таков, что включение строгое. Дело в том, что все множества из $\mathfrak{D}B$ относятся к числу так называемых абсолютных Δ_2^1 -множеств по Р. Соловею (что следует из доказательства факта 2), а последние составляют собственную часть полного класса Δ_2^1 , см. [50], [52], [68].

К доказательству теоремы Бэрджесса. Равенство $\mathfrak{D}\Delta_1^0 = \mathbf{B}$ в этой теореме, вероятно, «фольклорное»: оно было известно до исследований Бэрджесса и имеет достаточно простое доказательство (см., например, [67]). Доказательства двух других равенств пока полностью не опубликованы. В работах [47, 49] помещены только их наброски, из которых, однако, видна общая идея: установить соответствие между классами иерархии R -множеств (или C -множеств) и подклассами разностной иерархии класса Δ_3^0 (соответственно, Δ_2^0). Мы рассмотрим только рассуждение для R -множеств.

Теорией борелевских множеств установлено, что ко всякому Δ_3^0 -множеству X можно подобрать число ξ , $1 \leq \xi < \omega_1$, и $\subseteq$ -убывающую последовательность множеств X_v , $v < \xi$, класса $\Pi_2^0 = \mathbf{G}_\delta$ такую, что $X = \bigcup_v (X_v - X_{v+1})$, где объединение производится по всем четным ординалам $v < \xi$, причем если само ξ нечетно, то следует дополнительно определить $X_\xi = \emptyset$. Все множества X , которые можно определить этим способом при фиксированном ξ , образуют подкласс $\Pi_{2,\xi}^0$ класса Δ_3^0 . В частности, $\Pi_{2,1}^0 = \Pi_2^0$, $\Pi_{2,2}^0$ — класс всевозможных разностей двух Π_2^0 -множеств, и т. д., и при этом $\Delta_3^0 = \bigcup_{1 \leq \xi < \omega_1} \Pi_{2,\xi}^0$. (Разумеется, конструкцию подклассов можно провести в любом борелевском Δ -классе. Первоначально подклассы были введены М. А. Лаврентьевым; затем они рассматривались Н. Н. Лузиным [17], А. А. Ляпуновым, К. Куратовским [15] и др.)

Итак, Бэрджесс утверждает в [49], что $\mathfrak{D}\Pi_{2,\xi}^0 = \mathbf{PR}_{1+\xi}$ или $= \mathbf{\Sigma R}_{1+\xi}$ в зависимости от четности или нечетности ξ . Мы изложим доказательство в простейшем случае $\xi = 1$ (в [49] взято $\xi = 2$) и скажем затем несколько слов относительно общего случая.

От $\mathbf{\Sigma R}_2$ к $\mathfrak{D}\Pi_2^0$. По определению, операция R_2 эквивалентна $\widetilde{RR} \bigcap_\omega$, т. е. всякое множество X из $\mathbf{\Sigma R}_2$ таково, что

$$(19) \quad x \in X \leftrightarrow \forall j_{00} \forall j_{01} \forall j_{02} \dots \exists m_0 \forall j_{10} \forall j_{11} \dots \exists m_1 \dots \\ \dots \forall j_{l0} \forall j_{l1} \dots \exists m_l \dots \forall k (x \in X_{j \uparrow k}),$$

где $j \uparrow k = \langle j_0 \uparrow m_0, \dots, j_k \uparrow m_k \rangle$, $j_l \uparrow m_l = \langle j_{l0}, \dots, j_{lm_l} \rangle$ и все множества X_s , $s \in \widetilde{RR}\omega$, замкнуты. Отсюда требуется вывести, что $X = \mathfrak{D}P$ для подходящего Π_2^0 -множества P .

Правая часть эквивалентности (19) интерпретируется через игру $\mathbf{V}_x^2\{X_s\}$ длины $(\omega + 1)\omega$, где игрок $\forall$ делает ходы j_{lq} , игрок $\exists$ — ходы m_l (после завершения последовательности всех ходов j_{lq} , $q \in \omega$ противника) и, по окончании игры, выигрыш для $\exists$ определяется, когда $x \in X_{j \uparrow k}$ для всех k . Принципиальная особенность этой игры состоит в том, что каждый ее раунд $j_{l0}, j_{l1}, \dots, m_l$ может быть организован как бесконечный лишь в потенциальном смысле, поскольку если игрок $\exists$ имеет то или иное основание сделать определенный ход m_l после завершения всех ходов j_{lq} , $q \in \omega$, игрока $\forall$ в раунде l , то это основание вступает в силу уже после хода j_{lm_l} . И если в этот момент (т. е. раньше регламента) $\exists$ сделает ход m_l , то все последующие ходы j_{lq} , $q \geq m_l$ игрока $\forall$ в раунде l уже не будут влиять на результат игры, а потому можно будет сразу перейти к следующему раунду.

Из этого рассуждения возникает следующая вспомогательная игра G'_x уже длины ω . Игроки $\forall$ и $\exists$ (причем начинает $\forall$) делают по очереди ходы $b_0, \varepsilon_0, b_1, \varepsilon_1, \dots \in \omega$. Если среди чисел ε_p , $p \in \omega$, конечно много нулей, то выигрывает $\forall$. Если же таких ε_p бесконечно много, то пусть $p_1, p_2, p_3, \dots$ — список их номеров в порядке возрастания, и отдельно $p_0 = -1$. Положим $m_l = p_{l+1} - p_l - 1$, и далее

$$(20) \quad b \uparrow k = \langle r_0, \dots, r_k \rangle, \text{ где } r_l = \langle b_{p(l)+1}, b_{p(l)+2}, \dots, b_{p(l+1)} \rangle$$

и определим выигрыш игрока $\exists$ в случае, когда $x \in X_{b \uparrow k}$ для всех k . Этим определение игры G'_x закончено.

Игра G'_x эквивалентна игре $\forall_x^2 \{X_s\}$ в том смысле, что существование ВС для игрока $\exists$ в одной из этих игр равносильно существованию ВС для $\exists$ во второй игре. С другой стороны, G'_x есть не что иное, как игра $\exists_x P$, где P — множество всех пар $\langle x, i \rangle$ таких, что $x \in \mathcal{X}$, $i = \langle b_0, \varepsilon_0, b_1, \varepsilon_1, \dots \rangle \in \mathcal{N}$ и

$$\forall k \exists p \geq k (\varepsilon_p = 0) \wedge \forall k (x \in X_{b \uparrow \uparrow k}),$$

где составленные из кортежей кортежи $b \uparrow \uparrow k$ определены формулами (20). Следовательно, $X = \exists P$. Однако в силу замкнутости множеств $X_{b \uparrow \uparrow k}$ множество P принадлежит классу $\Pi_2^0 = G_\delta$.

От $\exists \Pi_2^0$ к ΣR_2 . Теперь мы предполагаем, что $X = \exists P$ с множеством P класса Π_2^0 , и требуется доказать, что $X \in \Sigma R_2$. Прежде всего, нетрудно проверить, что P имеет вид $P = \{\langle x, i \rangle : \forall k \exists l (x \in Y_{i \uparrow l}^k)\}$, где все $Y_{i \uparrow l}^k \subseteq \mathcal{X}$ замкнуты, причем можно не ограничивая общности предполагать, что $Y_{i \uparrow p}^k \subseteq Y_{i \uparrow l}^k$ при $p \leq l$, каков бы ни был кортеж $i \uparrow l \in R\omega$ (если это не так, то полагаем $\tilde{Y}_{i \uparrow l}^k = \bigcup_{p \leq l} Y_{i \uparrow p}^k$).

Далее, если после построения бесконечной последовательности ходов $i = \langle i_0, i_1, i_2, \dots \rangle$ в игре $\exists_x P$ мы получаем $x \in X_{i \uparrow l}^k$ для некоторого $l = l(k)$ (а тогда, по предположению, и для всех $l' \geq l$), то это обстоятельство фактически становится ясным уже после ходов $i_0, \dots, i_l$. Следовательно, $x \in X \leftrightarrow \forall j_{00} \exists j_{01} \forall j_{02} \exists j_{03} \dots \exists m_0 \forall j_{10} \exists j_{11} \dots \exists m_1 \dots$

$$\dots \forall j_{l0} \exists j_{l1} \dots \exists m_l \dots \forall k (x \in X_{j \uparrow \uparrow k}),$$

где каждое замкнутое множество $X_{j \uparrow \uparrow k}$ определяется следующим образом. Кортеж $j \uparrow \uparrow k$ разворачивается в простой кортеж

$$i \uparrow m = \langle j_{00}, j_{01}, \dots, j_{0m_0}, j_{10}, \dots, j_{1m_1}, \dots, j_{k0}, \dots, j_{km_k} \rangle$$

длины $n = m_0 + \dots + m_k$, после чего полагаем $X_{j \uparrow \uparrow k} = Y_{i \uparrow n}^k$.

Фактически, этим доказано, что X получается применением операции $\Psi = \widetilde{R\bar{R}}(\bigcap_{\omega} \bigcup_{\omega})$ к построенному семейству замкнутых множеств. Однако, по теореме о свойствах преобразования R в конце § 3, которая, естественно, справедлива и для «дополнительного» преобразования $\widetilde{R}$, и в силу того, что $\bigcap_{\omega} \bigcup_{\omega} \leq \Gamma = \widetilde{R} \bigcap_{\omega}$, мы получаем:

$$\widetilde{R} \bigcap_{\omega} \leq \widetilde{R}(\bigcap_{\omega} \bigcup_{\omega}) \leq \widetilde{R\bar{R}} \bigcap_{\omega} \approx \widetilde{R} \bigcap_{\omega},$$

откуда следует, что $\widetilde{R}(\bigcap_{\omega} \bigcup_{\omega}) \approx \widetilde{R} \bigcap_{\omega}$. Тем самым, операция Ψ эквивалентна

операции $R_2 \approx \widetilde{R\bar{R}} \bigcap_{\omega}$, и поэтому $X \in \Sigma R_2$.

Общий случай. В наиболее интересном (с точки зрения проективной характеристики R -множеств) направлении $R \subseteq \exists \Delta_3^0$ идея доказательства теоремы Бэрджесса хорошо видна из данного в [49] вывода включения $\Pi R_3 \subseteq \exists \Pi_{2,2}^0$. Каноническое определение ΠR_3 -множества может быть записано следующим образом:

$$x \in X \leftrightarrow \square_0 \square_1 \square_2 \dots \exists n (x \in X_{j \uparrow \uparrow \uparrow n}),$$

где все $X_{j \uparrow \uparrow \uparrow n}$ открыты, а каждое $\square_p$ есть полная кванторная приставка вида (19), в которой все переменные снабжены добавочным (первым) индексом p , т. е. $\square_p$ есть $\forall j_{p00} \dots \exists m_{p0} \dots \forall k_p$.

«Моделирующая» игра длины ω развивается здесь так, что 1) игрок $\forall$ делает ходы, соответствующие j_{p1m} , 2) игрок $\exists$ делает ходы, соответствующие

щие m_{pi} и обозначающие окончание раундов, и 3) игрок $\forall$ также может иногда делать ходы, соответствующие k_p и обозначающие окончание суперраундов (один суперраунд включает в себе несколько — по числу m_{pi} — раундов). Выигрыш для $\exists$ в этой игре получается, когда игрок $\exists$ сделал бесконечное число ходов, соответствующих m_{pi} , и при этом либо $\forall$ сделал конечное число своих ходов типа k_p , либо получается естественный выигрыш для $\exists$ в смысле системы множеств $X_{j \uparrow \uparrow \uparrow n}$. Несложный анализ показывает, что здесь мы приходим к действию оператора Θ на множество, представляющее собой разность двух Π_2^0 -множеств (каждое из которых выражает требование бесконечности числа определенных ходов).

На более высоких уровнях иерархии R -множеств структура раундов разных рангов соответственно усложняется, но фактически все сводится к разностным комбинациям Π_2^0 -отношений, требующих бесконечности числа ходов определенного типа (плюс простое отношение для естественного выигрыша), на которые потом накладывается Θ .

§ 7. О свойствах R -множеств

Мы рассмотрим здесь три направления в исследованиях по R -множествам: это мера и категория, разбиения на борелевские множества, принципы сравнения индексов. Эти направления, можно сказать, унаследованы из классической дескриптивной теории множеств, где усилиями Н. Н. Лузина и его учеников была детально изучена A -операция и ее геометрический эквивалент — операция просеивания сквозь решето. Однако правильные обобщения результатов, связанных с A -операцией, стали возможны только после того, как А. Н. Колмогоровым был выделен тот общий механизм, который лежит в основе главных свойств A -операции, — механизм R -преобразования. По существу, все три избранных нами направления в той или иной степени связаны с работой Колмогорова [2] и в известном смысле ведут свое происхождение именно от этой работы.

Мера и категория. Каждое борелевское множество вещественной прямой измеримо по Лебегу и имеет свойство Бэра (это означает, что оно совпадает с подходящим открытым множеством с точностью до множества первой категории). Это положение можно вывести из того, что операции $\bigcup_{\omega}$ и $\bigcap_{\omega}$, конструирующие борелевские множества, сохраняют измеримость (т. е., будучи примененными к измеримым множествам, дают измеримые множества) и сохраняют (в том же смысле) свойство Бэра. Сразу же после открытия A -операции П. С. Александровым [7] и построения М. Я. Суслиным [32] класса A -множеств (т. е. суслинских, или, в другой терминологии, Σ_1^1 -множеств), Н. Н. Лузин и В. Серпинский [18] (см. также [17]) доказали, что A -операция также сохраняет измеримость и свойство Бэра и, следовательно, все A -множества вещественной прямой, как и дополнительные к ним CA -множества, измеримы по Лебегу и обладают свойством Бэра.

Итак, свойство «сохранять измеримость и свойство Бэра» удалось распространить с операций $\bigcup_{\omega}$ и $\bigcap_{\omega}$ (где оно очевидно) на A -операцию. Теоремой VI работы [2] А. Н. Колмогоров демонстрирует, что возможность такого распространения может быть основана на одном лишь том, что A -операция есть R -преобразование операции $\bigcup_{\omega}$. Вот формулировка упомянутой теоремы:

если $\delta\omega$ -операция Φ (со счетным индексным множеством; ниже речь идет только о таких операциях) сохраняет измеримость, то операция $R\Phi$ также сохраняет измеримость. Теорема VI дана в [2] без доказательства — доказательство было впервые опубликовано А. А. Ляпуновым в [20] (с подобающей ссылкой на Колмогорова) вместе с доказательством аналогичной теоремы для свойства Бэра. Отсюда Ляпунов вывел, что:

1) все R -множества вещественной прямой измеримы (при должном обобщении измеримости по Лебегу этот результат сохраняет силу для всех польских пространств, что также проверено Ляпуновым); и

2) все R -множества имеют свойство Бэра. (Справедливо для любого польского пространства.)

Результаты для свойства Бэра получили в современных исследованиях далеко идущие обобщения в рамках «игрового» подхода к операциям. В частности, А. Кехрис [60] установил, что свойство Бэра имеется у всех множеств класса $\mathfrak{B}$, который, как мы видели, значительно шире класса R -множеств. К. Шиллинг и Р. Воот [69] показали, что все игровые борелевские операции сохраняют свойство Бэра (откуда следует и результат Кехриса). Доказательство теоремы Шиллинга — Воота состоит в использовании специальной игры, которая описывается кванторной приставкой следующей формулы Бэрджесса:

$$\forall H_0 \subseteq H \forall i_0 \exists H_1 \subseteq H_0 \exists i_1 \forall H_2 \subseteq H_1 \forall i_2 \dots \lambda n \exists m (H_m \subseteq X_{i \uparrow n}).$$

Здесь каждое H_m должно принадлежать фиксированной счетной базе топологии данного пространства, $A \subseteq B$ означает, что разность $A - B$ есть множество первой категории, $\{X_r\}$ — семейство открытых множеств, к которым применяется операция $G\lambda$, а H — фиксированное открытое множество. Эта игра детерминирована (при борелевском λ), и 1) если игрок $\exists$ имеет выигрывающую стратегию, то $H \subseteq X$, где $X = G\lambda\{X_r\}$, но 2) если игрок $\forall$ имеет ВС, начинающуюся с некоторого хода H_0 , то $H_0 \subseteq (H_0 - X)$. Отсюда и следует свойство Бэра для X .

О дальнейших исследованиях по свойству Бэра см. статьи [45], [48—50], [69], [71].

Игровой анализ измеримости требует обращения к значительно более сложным играм, чем те, которые связаны со свойством Бэра. Вероятно, именно поэтому в современных работах по борелевским игровым операциям мера редко рассматривается отдельно — обычно указывают лишь на возможность получить для меры результаты, аналогичные имеющим место для категории. В частности, в [69] отмечено, что борелевские игровые операции сохраняют измеримость (в смысле достаточно широкого класса мер), и следовательно, все множества из $\mathfrak{B}$ измеримы (в том же смысле).

Разбиения на борелевские множества. Изыскания в этом направлении были начаты Н. Н. Лузиным и В. Серпинским в работе [18], где показано, что всякое CA -множество можно некоторым каноническим образом разбить на попарно не пересекающиеся борелевские множества (называемые конституантами) в числе $\aleph_1$. Позже аналогичная возможность была установлена и для самих A -множеств, см. [17] (соответствующие конституанты были названы внутренними). Отсюда элементарно выводится возможность аналогичного разбиения и для множеств более широкого класса $\Sigma_2^1 = \Lambda_2$ (поскольку каждое Σ_2^1 -множество является проекцией CA -множества, а борелевские множества проектируются в A -множества). Следовательно, и любое R -множество может быть разбито на борелевские в числе $\aleph_1$, ибо $R \subseteq \Delta_2^1 \subseteq \Sigma_2^1$.

Дело, однако, в том, что канонические разбиения A -множеств и CA -множеств на конституанты обладают принципиальным свойством регулярности относительно меры, которое заключается в том, что мера данного множества концентрируется на счетном числе слагаемых разбиения, и таким же свойством по отношению к категории, что, вообще говоря, не верно для даваемых только что описанной простейшей конструкцией разбиений множеств класса Σ_2^1 . Задача построения регулярных относительно меры и категории разбиений R -множеств на борелевские множества была решена А. А. Ляпуновым в [20] при помощи следующей теоремы Колмогорова.

Теорема V из [2]. *Предположим, что δs -операция Φ со счетным индексным множеством I такова, что $\Phi \geq \bigcap_{\omega}$ и $\Phi\Phi \approx \Phi$. Тогда дополнение любого множества из $(R\Phi)(F)$ есть сумма возрастающей по типу ω_1 последовательности из $\aleph_1$ множеств класса $\widetilde{\Phi}(F)$.*

Доказательство. В ситуации, рассмотренной в § 4, мы имеем $\widetilde{X} = \bigcup_{\alpha} \widetilde{X}_{\Lambda\alpha}$, причем в силу счетности I это объединение ограничивается числами $\alpha < \omega_1$, а множества $\widetilde{X}_{s\alpha}$ удовлетворяют равенствам (17). Если принять, что исходные множества X_r замкнуты, то в сделанных предположениях относительно Φ (приведенных к виду $\widetilde{\Phi} \geq \bigcup_{\omega}$ и $\widetilde{\Phi}\widetilde{\Phi} \approx \widetilde{\Phi}$) индукцией по α нетрудно будет вывести, что каждое множество $\widetilde{X}_{s\alpha}$ принадлежит $\widetilde{\Phi}(F)$, т. е. получается из замкнутых множеств однократным применением $\widetilde{\Phi}$.

Вытягивая теперь из каждого $\widetilde{X}_{\Lambda\alpha}$ объединение всех $\widetilde{X}_{\Lambda\gamma}$ с номерами $\gamma < \alpha$, мы получаем разбиение $\widetilde{X}$ на множества

$$\widetilde{X}_{\alpha} = \widetilde{X}_{\Lambda\alpha} - \bigcup_{\gamma < \alpha} \widetilde{X}_{\Lambda\gamma} = \{x: \text{Ind}_{\Lambda} x = \alpha\}, \quad \alpha < \omega_1.$$

В предположениях последней теоремы каждое $\widetilde{X}$ представляет собой пересечение множества класса $\widetilde{\Phi}(F)$ с множеством класса $\Phi(F)$.

Дополнив этот результат разложением самого множества X (получаемым на основе так называемых внутренних индексов: внутренний индекс $\text{Ind}^* x$ точки $x \in X$ можно положить равным наименьшему $\alpha < \omega_1$ такому, что $S_{x\alpha} = S_{x, \alpha+1}$) и проведя индукцию по построению операций нормального ряда, Ляпунов доказал в [20] теорему о том, что каждое R -множество допускает регулярное относительно меры и категории разбиение на $\aleph_1$ борелевских множеств. Начало индукции здесь составляет случай $\Phi = \bigcup_{\omega}$ (следовательно, $R\Phi = A$), когда теорема Колмогорова неприменима (ибо неверно, что $\bigcup_{\omega} \geq \bigcap_{\omega}$), однако те же рассуждения дают борелевость множеств $\widetilde{X}_{\alpha}$, тождественных классическим конституантам CA -множеств в дескриптивной теории.

Принцип сравнения индексов и его приложения. Снова обратимся к ситуации, рассмотренной в § 4, и предположим, что $R\Phi$ есть одна из операций R_{α} , $\alpha \geq 1$, нормального ряда, и в соответствии с построением последнего, $\Phi = \bigcup_{\omega} \{R_{\gamma}: \gamma < \alpha\}$. Рассмотрим также пару множеств $X = R_{\alpha}\{X_r\}$, $X' = R_{\alpha}\{X'_r\}$ класса ΣR_{α} (все X_r , X'_r предполагаются замкнутыми). С системами множеств X_r и X'_r ассоциируются две функции индексов по Колмогорову: $\alpha(x) = \text{Ind}_{\Lambda} x$ и $\alpha'(x) = \text{Ind}'_{\Lambda} x$, причем $\alpha(x) < \omega_1$ при $x \in \widetilde{X}$ и $\alpha(x) = \omega_1 = \infty$ при $x \in X$ и аналогично для α' . Какова природа множества тех точек x , в которых $\alpha(x) \leq \alpha'(x)$? Ответ дает:

Принцип сравнения индексов (А. А. Ляпунов [21]). Множество $\{x: \alpha(x) \leq \alpha'(x)\}$ принадлежит классу ΣR_{α} .

На самом деле этот вопрос рассмотрен Ляпуновым в значительно более общем случае (см. [20—24], а также [45]). В дескриптивной теории множеств принцип сравнения индексов был впервые установлен П. С. Новиковым для случая, соответствующего $\alpha = 1$ (т. е. когда R_{α} есть A -операция; фактически Новиков рассматривал решета), и использован в [27, 28] для решения некоторых вопросов, связанных с неявными **B**-измеримыми функциями и C -множествами. Но наиболее естественное приложение принципа сравнения индексов — это доказательство теорем делимости.

Говорят, что для некоторого класса K выполнен *первый принцип отделимости* (символически $Sep_1(K)$), когда любые два непересекающихся множества X, X' этого класса можно накрыть взаимно дополнительными множествами Y, Y' того же класса.

Говорят, что для класса K выполнен *второй принцип отделимости* $Sep_2(K)$, когда для любой пары K -множеств X, X' множества $X - X'$ и $X' - X$ можно накрыть непересекающимися множествами Y, Y' , дополнения которых принадлежат классу K .

Т е о р е м а (А. А. Ляпунов [22]). Оба принципа отделимости выполнены для классов ΣR_α , но не выполняются для классов ΠR_α .

Доказательство «положительной» части для второго принципа производится при помощи множеств

$$Y = \{x: \alpha(x) > \alpha'(x)\}, \quad Y' = \{x: \alpha'(x) > \alpha(x)\},$$

а для первого принципа Ляпунов берет те же множества, заранее обеспечивая специальным дополнительным построением, чтобы было $\alpha(x) \neq \alpha'(x)$ для всех x . «Отрицательная» же часть теоремы выводится из «положительной» при помощи дважды универсальной пары ΣR_α -множеств.

В дескриптивной теории оба принципа отделимости для класса $\Sigma R_1 (=A)$ и неотделимости для $\Pi R_1 (=CA)$ были доказаны Н. Н. Лузиным [17].

В современных исследованиях по R -преобразованию и R -множествам принцип сравнения индексов используется для вывода важного свойства нормированности [45] (называемого еще принципом полного предупорядочения [41]) для классов ΠR_α , для решения некоторых тонких вопросов построения функций, которые осуществляют выбор выигрывающих стратегий, а также в связи с сечениями плоских множеств. В частности, в [45], [51], [70] проведено изучение множества

$$\{x: \widetilde{E^x} = \{y: \langle x, y \rangle \notin E\} \text{ имеет 1-ю категорию}\}$$

для плоских множеств E определенных классов.

§ 8. К проблеме Колмогорова о длинах борелевских иерархий

В старых номерах журнала *Fundamenta mathematicae* публиковался продолжающийся список проблем в областях, близких к основаниям математики. Под номером 65 в этом списке помещена [4] проблема А. Н. Колмогорова, которая хотя и не стала столь же знаменитой, как проблема Суслина (№ 3 в том же списке, *FM.* — 1920. — V. 1. P. 223), но все же привлекла значительный интерес специалистов по теории множеств (см. книгу [14], с. 140).

Пусть задана некоторая начальная совокупность множеств $F_\bullet$. Индукцией по α определяем

$$F_\alpha = \bigcup_{\omega} \left(\bigcup_{\gamma < \alpha} F_\gamma \right) \quad \text{или} \quad F_\alpha = \bigcap_{\bullet} \left(\bigcup_{\gamma < \alpha} F_\gamma \right)$$

в зависимости от четности или нечетности порядкового числа α . Тогда $F = F_{\omega_1}$ будет наименьшим семейством, содержащим все множества из $F_\bullet$, и замкнутым относительно $\bigcup$ и $\bigcap$. Фактически это одна из возможных конструкций иерархии борелевских множеств, рассматривавшаяся в работах 20-х и 30-х годов: в качестве F_0 нужно взять совокупность F всех замкнутых множеств.

Числом Колмогорова $K(F_0)$ для F_0 в [65] названо наименьшее α , удовлетворяющее равенству $F_\alpha = F$. (Это равенство при $\alpha \geq 1$ равносильно дру-

тому: $F_{\alpha+1} = F_\alpha$, о котором, собственно, и идет речь в [4].) Понятно, что $K(F_0) \leq \omega_1$, а проблема Колмогорова заключается в следующем: узнать, для каких $\alpha \leq \omega_1$ существует семейство F_0 такое, что $K(F_0) = \alpha$?

Обзор классических и более современных результатов в связи с этой задачей помещен в статье А. Миллера [65]. Главный же результат, приведенный Миллером с указанием на авторство К. Кюнена, дает полное решение поставленной проблемы. Именно, ко всякому $\alpha \leq \omega_1$ найдется начальное семейство F_0 , удовлетворяющее $K(F_0) = \alpha$. Интересно, что данное в [65] доказательство этой теоремы использует метод вынуждения, обычно применяемый для вывода результатов о непротиворечивости, неразрешимости и т. п.; здесь же с его помощью получено решение проблемы в традиционном смысле.

Заключение

Мы постарались показать в этой статье первоначальную форму тех идей, которые были заложены А. Н. Колмогоровым в основания теории операций над множествами, развитие теории операций над множествами под влиянием идей Колмогорова, а также их обогащение и принимаемые ими в ходе этого развития новые формы.

В настоящее время теория операций над множествами чрезвычайно далека от того, чтобы иметь какой-то вполне законченный вид, и в ней без труда просматриваются перспективы дальнейших исследований. Так, было бы весьма интересно получить нетривиальные результаты о строении класса всех $\delta\alpha$ -операций с точки зрения порядка «сильнее» из § 1. Например, рассмотрим наименьшее семейство $\mathcal{R}$ операций, замкнутое относительно суперпозиции и содержащее действия $\bigcup$ и $\bigcap$. Тогда $\Phi \leq A$ для любой операции $\Phi \in \mathcal{R}$. Будет ли верно, что $A \leq \overset{\omega}{\Psi}$, какова бы ни была операция Ψ , удовлетворяющая $\Phi \leq \Psi$ для всех $\Phi \in \mathcal{R}$?

Вторая важная задача — поиск «операционной» концепции для класса $\mathfrak{A}_\alpha^\bullet$: мы знаем, что $\mathfrak{A}_1^0$ является классом борелевских множеств, $\mathfrak{A}_2^\bullet = \mathbb{C}$ и $\mathfrak{A}_3^0 = \mathbb{R}$, но не ясно, каким должен быть следующий шаг и, в более общем плане, какова должна быть здесь генеральная идея для всех $\mathfrak{A}_\alpha^\bullet$, дающая $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ на трех первых шагах.

Другая сторона этой задачи заключается в построении индуктивного анализа для игровых борелевских операций, подобного данному Колмогоровым в рассмотренном им случае. Учитывая отмеченную в § 4 связь между индуктивным анализом и доказательством детерминированности соответствующих игр, ключ к решению этой второй задачи можно искать в доказательстве теоремы Мартина [62] о детерминированности борелевских игр. Во всяком случае, индуктивный анализ игровых Σ_2^0 -операций может быть проведен параллельно данному П. Вольфом доказательству детерминированности Σ_2^0 -игр, [72].

Далее, в теории операций над множествами рассматриваются сами операции и их преобразования. Есть ли какой-нибудь смысл в рассмотрении следующего уровня, т. е. преобразований над преобразованиями? В этом плане было бы весьма интересно придать определенный смысл выражению $\overbrace{RRRRR} \dots \Phi$.

Этот список ожидающих своего решения задач можно было бы продолжить, и нет сомнения, что дальнейшее развитие теории операций над множествами откроет новые грани в этой части научного наследия великого математика — Андрея Николаевича Колмогорова.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Труды А. Н. Колмогорова по теории операций над множествами

- [1] Колмогоров А. Н. Об операциях над множествами//Мат. сб. 1928. — Т. 35, № 3/4. — С. 414—422. В книге [5, с. 85—92].
- [2] Колмогоров А. Н. Об операциях над множествами. II. — В книге [6, с. 294—303] ¹⁾.
- [3] Колмогоров А. Н. П. С. Александров и теория δ -операций//УМН. — 1966. — Т. 21, вып. 4. — С. 275—278. В книге [5, с. 352—356].
- [4] Колмогоров А. Problem 65//Fund. math. — 1935. — V. 25. — P. 578.
- [5] Колмогоров А. Н. Избранные труды. Математика и механика. — М.: Наука, 1985.
- [6] Колмогоров А. Н. Теория информации и теория алгоритмов. — М.: Наука, 1987.

Литература по классической теории операций над множествами
и классической дескриптивной теории множеств

- [7] Alexandroff P. Sur la puissance des ensembles mesurables (B)//C.r. Acad. sci. Paris. — 1916. — Т. 162. — P. 323—325. Рус. пер.: О мощности множеств, измеримых по Борелю//Александров П. С. Теория функций действительного переменного и теория топологических пространств. — М.: Наука, 1978. — С. 35—39.
- [8] Alexandroff P. Sur les ensembles complementaires aux ensembles (A)//Fund. math. — 1924. — V. 25. — P. 160—165.
- [9] Кановей В. Г. Развитие дескриптивной теории множеств под влиянием трудов Н. Н. Лузина//УМН. — 1985. — Т. 40, вып. 3(243). — С. 117—155.
- [10] Kantorovitch L., Livenson E. Memoir on the analytical operations and projective sets (I)//Fund. math. — 1932. — V. 18. — P. 214—279.
- [11] Kantorovitch L., Livenson E. Memoir on the analytical operations and projective sets (II)//Fund. math. — 1933. — V. 20. — P. 54—97.
- [12] Kantorovitch L., Livenson E. Sur quelques theoremes concernant la theorie des ensembles projectifs//C.r. Acad. sci. Paris. — 1937. — V. 204. — P. 466—468.
- [13] Козлова З. И., Ляпунов А. А. Дескриптивная теория множеств//История отечественной математики, т. 4, кн. 2. — Киев: Наукова думка, 1970. — С. 393—407.
- [14] Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. — М.: Мир, 1970.
- [15] Куратовский К. Топология. Т. 1. — М.: Мир, 1966.
- [16] Lebesgue A. Sur les fonctions representable analytiquement//J. math. pures et appl. — 1905. — Т. 5, N 1. — P. 139—216.
- [17] Лузин Н. Н. Лекции об аналитических множествах и их приложениях. — М.: Гостехиздат, 1953.
- [18] Lusin N., Sierpinski W. Sur quelques proprietes des ensembles (A)//Bull. Int. Acad. sci. Cracovie. — 1918. — V. 4. — P. 35—48. 1918. — Т. 4. — P. 35—48. Рус. пер.: О некоторых свойствах A -множеств//Лузин Н. Н. Собр. соч., т. II. — М.: Изд-во АН СССР, 1958. — С. 273—284.
- [19] Ляпунов А. А. Об R -множествах//ДАН СССР. — 1947. — Т. 58, № 9. — С. 1887—1890.
- [20] Ляпунов А. А. R -множества//Труды МИАН СССР. — 1953. — Т. 40. — С. 1—68.
- [21] Ляпунов А. А. О классификации R -множеств//Мат. сб. — 1953. — Т. 32(74), № 2. — С. 255—262.

¹⁾ Рукопись, датированная февралем 1922 г., была, как сказано в [5, с. 364], обнаружена уже после сдачи в набор книги [5], и потому опубликована в [6], а не в [5] вместе со статьей [1].

- [22] Л я п у н о в А. А. Отделимость и неотделимость R -множеств//Мат. сб. — 1953. — Т. 32(74), № 3. — С. 515—532.
- [23] Л я п у н о в А. А. Об операциях над множествами, допускающих трансфинитные индексы//Тр. Моск. мат. об-ва. — 1957. — Т. 6. — С. 195—230.
- [24] Л я п у н о в А. А. Об операциях над множествами//Алгебра и логика. — 1963. — Т. 2, вып. 2. — С. 47—56.
- [25] Л я п у н о в А. А. О методе трансфинитных индексов в теории операций над множествами//Труды МИАН СССР. — 1973. — Т. 133. — С. 132—148.
- [26] Л я п у н о в А. А., Н о в и к о в П. С. Дескриптивная теория множеств//Математика в СССР за 30 лет. — М. — Л.: Гостехиздат, 1948. — С. 243—255.
- [27] Н о в и к о в П. С. О взаимоотношении второго класса проективных множеств и прооекций униформных аналитических дополнений//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1937. — Т. 1, № 2. — С. 231—252.
- [28] Н о в и к о в П. С. Отделимость C -множеств//Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1937. — Т. 1, № 2. — С. 253—264.
- [29] О ч а н Ю. С. Теория операций над множествами//УМН. — 1955. — Т. 10, вып. 3 (65). — С. 71—128.
- [30] П а р о в и ч е н к о И. И. Теория операций над множествами. — Кишинев: Штиинца, 1981.
- [31] С е л и в а н о в с к и й Е. А. Об одном классе эффективных множеств (множества C)//Мат. сб. — 1928. — Т. 35, № 3/4. — С. 379—413.
- [32] S o u s l i n M. Sur une definition des ensembles mesurables B sans nombres transfinis//C.r. Acad. sci. Paris. — 1917. — Т. 164. — P. 89—91.
- [33] У с п е н с к и й В. А. Вклад Н. Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств и функций: понятия, проблемы, предсказания//УМН. — 1985. — Т. 40, вып. 3 (243). — С. 85—116.
- [34] H a u s d o r f f F. Mengenlehre, 2-e Aufl. — Berlin: W. de Gruyter, 1927.
- [35] Х а у с д о р ф Ф. Теория множеств: Пер. с нем. Н. Б. Веденисова под ред. и с доп. П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова. — М. — Л.: ОНТИ, 1937.
- [36] Ч о б а н М. М. Об операциях над множествами//Сиб. мат. журн. — 1975. — Т. 16, № 6. — С. 1332—1351.

Литература по современной теории операций
над множествами и смежным вопросам

- [37] А ц е л П. Введение в теорию индуктивных определений//Справочная книга по математической логике. Часть III. Теория рекурсии. — М.: Наука, 1982. — С. 224—268.
- [38] К а н о в е й В. Г. Aksioma выбора и aksioma детерминированности. — М.: Наука, 1984.
- [39] К а н о в е й В. Г. Aksioma детерминированности и современное развитие дескриптивной теории множеств//Итоги науки и техники. Алгебра, топология, геометрия. Т. 23. — М.: Наука, 1985. — С. 3—50.
- [40] К е х р и с А. С., М о с к о в а к и с Я. Н. Рекурсия в высших типах//Справочная книга по математической логике. Часть III. Теория рекурсии. — М.: Наука, 1982. — С. 166—223.
- [41] М а р т и н Д. А. Дескриптивная теория множеств: проективные множества//Справочная книга по математической логике. Часть II. Теория множеств. — М.: Наука, 1982. — С. 235—272.
- [42] У л а м С. Нерешенные математические задачи. — М.: Наука, 1964.
- [43] A a n d e r g a a S. Inductive definitions and their closure ordinals. — In: Generalized Recursion Theory. — Amsterdam: North Holland, 1974. — P. 207—220.
- [44] A c z e l P. Quantifiers, games and inductive definitions//Third Scandinavian Logic Symposium. — Amsterdam: North Holland, 1975. — P. 1—14.
- [45] B a r u a R. R -sets and category//Trans. Amer. Math. Soc. — 1984. V. 286, N 1. — P. 125—158.

- [46] Blackwell D. Borel-programmable functions//Ann. of Probability. — 1978. — V. 6. — P. 321—324.
- [47] Burgess J. P. What are R -sets?//Patras Logic Symposion. Proc. Log. Symp. Patras 19—22 Aug. 1980. — Amsterdam: North Holland, 1982. — P. 307—324.
- [48] Burgess J. P. Classical hierarchies from modern standpoint. Part 1: C -sets//Fund. math. — 1983. — V. 115, N 2. — P. 81—95.
- [49] Burgess J. P. Classical hierarchies from modern standpoint. Part 2: R -sets//Fund. math. — 1983. — V. 115, N 2. — P. 97—105.
- [50] Burgess J. P., Lockhart R. A. Classical hierarchies from modern standpoint. Part 3: BP -sets//Fund. math. — 1983. — V. 115, N 2. — P. 107—118.
- [51] Burgess J. P., Miller D. E. Remarks on invariant descriptive set theory//Fund. math. — 1975. — V. 90, N 1. — P. 53—75.
- [52] Fenstad J. E., Normann D. On absolutely measurable sets//Fund. math. — 1974. — V. 81, N 1. — P. 91—98.
- [53] Freiling C. Banach games//J. Symbol. Log. — 1984. — V. 41, N 2. — P. 343—375.
- [54] Gale D., Stewart F. Infinite games with perfect information//Ann. Math. Studies. — 1953. — V. 28. — P. 245—266.
- [55] Harrington L. A. The Kolmogorov R -operator and the first non-projective ordinal. — Mimeographed notes, 1975.
- [56] Harrington L. A., Kechris A. S. On monotone vs nonmonotone induction//Bull. Amer. Math. Soc. — 1976. — V. 82. — P. 888—890.
- [57] Hinman P. G. Hierarchies in effective descriptive set theory//Trans. Amer. Math. Soc. — 1969. — V. 142. — P. 111—140.
- [58] Hinman P. G. The finite levels of the hierarchy of effective R -sets//Fund. math. — 1973. — V. 79, N 1. — P. 1—10.
- [59] Hinman P. G. Recursion-Theoretic Hierarchies. — Berlin: Springer-Verlag, 1978.
- [60] Kechris A. S. Forcing in analysis//Lect. Notes Math. — 1978. — V. 669. — P. 277—302.
- [61] Kechris A. S. Spector second order classes and reflection//Lect. Notes Math. — 1978. — V. 689. — P. 147—183.
- [62] Martin D. A. Borel determinacy//Ann. of Math. — 1975. — V. 102, N 2. — P. 363—371.
- [63] Martin D. A., Kechris A. S. Infinite games and effective descriptive set theory//Analytic Sets. — London: Academic Press, 1980. — P. 403—470.
- [64] Mauldin R. D. (editor). The Scottish Book: Mathematics from the Scottish Cafe. — Boston: Birkhauser, 1981.
- [65] Miller A. W. On the length of Borel hierarchies//Ann. Math. Logic. — 1979. — V. 16. — P. 233—267.
- [66] Moschovakis Y. N. Elementary Induction and Abstract Structures. — Amsterdam: North Holland, 1974.
- [67] Moschovakis Y. N. Descriptive Set theory. — Amsterdam: North Holland, 1980.
- [68] Shilling K. Absolutely Δ_2^1 operations and the Baire property//Abstract Amer. Math. Soc. — 1980. — V. 1. — P. 239. — Abstract N 80. T. — E 22.
- [69] Shilling K., Vaught R. Borel games and the Baire property//Trans. Amer. Math. Soc. — 1983. — V. 279, N 1. — P. 411—428.
- [70] Vaught R. Invariant sets in topology and logic//Fund. math. 1974. — V. 82. — P. 269—294.
- [71] Vaught R., Shilling K. Borel game operations and the Baire property//Notices Amer. Math. Soc. — 1979. — V. 26. — P. A-247. — Abstract N 764-El.
- [72] Wolfe P. The strict determinacy of certain infinite games//Pacific J. Math. — 1955. — V. 5. — P. 841—847.