1989 г. июль—август *т. 44, вып. 4 (268)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 510.67+510.6

ОЦЕНКИ И ПУЧКИ. О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ НЕСТАНДАРТНОГО АНАЛИЗА

В. А. Любецкий

СОДЕРЖАНИЕ

В работе излагаются некоторые части математической теории, иногда называемой *гейтинговозначным анализом* (или *нестандартным анализом в широком смысле*). Иногда эту теорию рассматривают как часть общей теории топосов. Можно думать, что эта теория имеет некоторые приложения и вне математической логики: в алгебре, анализе — и даже в еще более широком контексте, например, известны работы А. Робинсона по применению нестандартного анализа в квантовой теории поля.

В гл. I излагается собственно метод гейтинговозначного (в частности, булевозначного) анализа. П. I.1 является введением; в нем на интуитивном уровне объясняется суть метода; вводную роль играют также части статьи, выделенные заголовком «пример», а также начала гл. II—IV и начало добавления. В начале добавления обсуждаются термины «гейтинговозначный и булевозначный анализы, нестандартный анализ в широком смысле» и т. п. В п. I.2 бегло напоминаются понятия, существенно используемые в дальнейшем. П. I.3 содержит определение оценки — ключевого понятия этого метода — и все основные примеры оценок. Понятие пучка на гейтинговой алгебре появляется в п. I.7, хотя неявно оно работает с самого начала. Итак, метод излагается в п. I.3—I.7. Гл. II—IV содержат конкретные примеры применений метода гейтинговозначного анализа. В гл. II, главным образом, рассматривается вопрос о существовании модельного компаньона у локально аксиоматизируемого класса колец. Модельный компаньон — обобщение понятий алгебраического и вещественного замыкания поля, которое было введено А. Робинсоном, оно играет существенную роль в теории моделей. В примере 10 гл. II показана модельная полнота класса безатомных колец, все локализации которых являются центральными конечномерными и простыми алгебрами с центром, удовлетворяющим модельно полной теории. В гл. III рассматривается гипотеза П. С. Новикова (см. [5, с. 127]). В этой главе речь идет о переходе от классической к интуиционистской истинности в произвольном кольце. В упомянутой работе П. С. Новикова показана возможность такого перехода в случае кольца Z. В гл. IV для некоторых колец непрерывных Y-значных функций (как алгебр над кольцом Y) строится такое нестандартное представление $\tilde{Y}$, что в определенном смысле эта алгебра подобна своему кольцу скаляров Y. Добавление кратко содержит примеры применений булевозначного анализа в связи с вопросами двойственности.

Практически все теоремы и предложения имеют полные доказательства.

По-видимому, все общие теоремы гейтинговозначного анализа содержатся в гл. I. Что касается приложений, то нецелесообразно и вряд ли возможно охватить их во всей полноте. Автор выбрал несколько приложений в соответствии со своими научными интересами и с таким расчетом, чтобы избежать пересечений с известными и легко доступными работами. Отметим некоторые из таких работ. Это интересные работы К. И. Бейдара и А. В. Михалева, [18, 34—35] (по изучению полупервичных колец на основе их редукции к первичным кольцам методом ортогональной полноты); цикл работ по операторным алгебрам [20—22]; работы [11, 15], перепечатанные в [41] (в них строится теория булевозначных мер и интегральных представлений); большой цикл работ А. Г. Кусраева и С. С. Кутателадзе, см. например, [36—38] (в основном в связи с проблематикой K-пространств Канторовича, а также категорными аспектами); глубокие работы по робинсоновскому нестандартному анализу В. Г. Кановея [32—33], Е. И. Гордона [39—40], А. К. Звонкина и М. А. Шубина [31].

Дальнейшие подробности можно найти в работах из списка литературы; эти работы, в свою очередь, содержат многочисленные ссылки, в том числе приоритетного характера. В частности, детальную библиографию содержат работы [1—3, 7—10], где имеются ссылки на работы А. Робинсона, П. Коэна, П. Вопенки, Д. Скотта, Р. Соловея, Г. Такеути и других известных по этой тематике авторов. Введением в гейтинговозначный анализ могут служить, например, работы [1, 3].

После минимального знакомства с гл. I можно переходить к любой другой главе или к добавлению, возвращаясь к гл. I по мере необходимости.

Смысл знака $\rightleftharpoons$ «равно по определению» или «эквивалентно по определению». Знак $\square$ отмечает конец доказательства.

ГЛАВА I
ОЦЕНИВАНИЕ В АЛГЕБРАИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

I.1. Концепции оценки, глобальной истинности, теоремы перенсса. *Оцениванием* (*оценкой*) в данном языке для фиксированной решетки X называется сопоставление каждой формуле φ элемента из X, обозначаемого $[\![\varphi]\!]_X$ или короче $[\![\varphi]\!]$, причем логические связки языка моделируются операциями в решетке X. Последнее означает, что $[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!]$, $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!]$, $[\![\neg\varphi]\!] = \neg [\![\varphi]\!]$, $[\![\varphi \Rightarrow \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!]$, где в левых частях равенств знаки $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\neg$ суть связки языка, а в правых частях равенств знаки $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\neg$ суть (одноименные со связками) операции в X. И так далее для всех пропозициональных связок. Кванторы (и связанные переменные) предполагают указание, кроме того, еще некоторого фиксированного множества D (которое обычно называется *множеством параметров данного языка*). Если такое D фиксировано, то $[\![\exists x\varphi]\!] = \bigvee \{[\![\varphi(k)]\!] \mid k \in D\}$ и $[\![\forall x\varphi]\!] = \bigwedge \{[\![\varphi(k)]\!] \mid k \in D\}$. И так же для других предикатных связок. Здесь операции $\bigvee$, $\bigwedge$ применяются уже к подмножествам в X, т. е. имеют вид $\bigvee$: $\mathscr{P}(X) \to X$, где $\mathscr{P}$ — операция вычисления множества всех подмножеств. В нашем случае операции $\vee$, $\bigvee$ и $\wedge$, $\bigwedge$ — это точные верхние и нижние грани в решетке X для двух или соответственно для произвольного семейства элементов в X. Операции $\neg$, $\to$ также обычно выражаются через отношение порядка в решетке X.

Чтобы подчеркнуть выбор множества параметров D, оценку иногда обозначают $[\![\cdot]\!]_{X,D}$ или $[\![\cdot]\!]_D$. Обозначим $1 = \bigvee X$.

Обозначим $Я(D)$ множество всех формул языка $Я$ с параметрами из D (без свободных переменных). Тогда оценивание — одноместная функция вида $[\![\cdot]\!]$: $Я(D) \to X$, удовлетворяющая отмеченным выше индуктивным условиям. Часто $Я(D)$ обозначают короче $Я$, а формулы с параметрами из D называют короче *формулами*. Если функция $[\![\cdot]\!]$ определена на атомарных формулах языка, то она однозначно продолжается на все множество формул.

Итак, кроме обычной истинности суждения φ в какой-то фиксированной математической структуре K (обозначение $K \models \varphi$) возникает новый вид истинности (новая семантика) $[\![\varphi]\!]_{X,D} = 1$, обозначаемая $\langle X, D\rangle \models \varphi$ или короче $X \models \varphi$ (или иногда $D \models \varphi$), где $[\![\cdot]\!]_{X,D}$ — оценка также фиксированная и как-то связанная со структурой K. Предикат $X \models \varphi$ называют *глобальной истинностью суждения* φ; иногда он читается «φ значимо в решетке X». Вместо $X \models \varphi$ также пишут $\Box\varphi$. Эта новая истинность (семантика) обладает полезными свойствами, и, в частности, позволяет в ряде случаев решать вопросы, касающиеся обычной истинности суждений в K. В какой-то мере ее можно сравнить с (формально-логической) выводимостью (обозначаемой далее в классическом случае $\vdash$ и в интуиционистском случае $H \vdash$). Разница с выводимостью в том, что проверка (верификация) глобальной истинности $X \models \varphi$ в некотором смысле сводится к вычислению «алгебраических» функций в решетке X, причем число применений этих функций не больше длины проверяемой формулы φ.

Обычно структура K допускает (неоднозначный) выбор такой решетки $X = X(K)$ (в качестве D обычно берется носитель структуры K) и выбор такой оценки $[\![\cdot]\!]$ (в этом случае оценку удобно обозначать $[\![\cdot]\!]_K$), что для многих формул φ выполняется $[\![\varphi]\!]_K = 1$ (хотя, быть может, $K \not\models \varphi$). Класс таких формул φ обозначим $\Phi_+(K)$. С другой стороны, обозначим $\Phi_-(K)$ класс формул ψ, для которых выполняется $([\![\psi]\!]_K = 1) \Rightarrow (K \models \psi)$. Обычно оценка $[\![\cdot]\!]_K$ замкнута относительно некоторой выводимости (зависящей прежде всего от решетки X и в этом смысле обозначаемой $\underset{X}{\vdash}$), т. е. если $\varphi \underset{X}{\vdash} \psi$ и $[\![\varphi]\!]_K = 1$, то $[\![\psi]\!]_K = 1$.

Возможна точка зрения, при которой нестандартный анализ в широком смысле понимается как направление, в основе которого лежит изучение оценок $[\![\cdot]\!]_X$ и семантики $[\![\cdot]\!]_X = 1$ (или более общей семантики $[\![\cdot]\!]_X \in j$, где j — фильтр в X; например, $j = \{1\}$). Типичное и, возможно, основное применение нестандартного анализа (в этом смысле) состоит в следующем. Если $[\![\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n]\!]_K = 1$ (но, может быть, $K \not\models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n$), т. е. $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Phi_+(K)$, и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \underset{X(K)}{\vdash} \psi$, а $\psi \in \Phi_-(K)$, то $K \models \psi$. Если $\psi \notin \Phi_-(K)$, то в K может все-таки иметь место утверждение ψ', где ψ' — формула исходного языка, эквивалентная глобальной истинности формулы ψ.

Можно сказать, что следствия ψ и ψ' мифических для K свойств $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ истинны в K (в самом обычном смысле). Такую ситуацию называют *теоремой переноса.*

Далее речь идет об обычном наборе связок $\bigvee$, $\bigwedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\exists$, $\forall$ и (в общем случае) о бесконечных множествах параметров D. Последнее обстоятельство требует всюду определенности операций $\bigvee, \bigwedge\colon \mathscr{P}(X) \to X$ или, по крайней мере, определенности операций $\bigvee$, $\bigwedge$ на подмножествах в X вида $\{[\![\varphi(k)]\!]_X \mid k \in D\}$. Иногда можно проследить, какие подмножества в X имеют такой вид и для них потребовать применимость операций $\bigvee$ и $\bigwedge$. Но проще, и мы это сделаем, считать, что X — полная решетка, т. е. в ней существуют точные верхние и нижние грани $\bigvee_\alpha u_\alpha$ и $\bigwedge_\alpha u_\alpha$ для любого множества $\{u_\alpha\} \subseteq X$. Всегда верно: $u \bigwedge \bigvee_\alpha u_\alpha \geqslant \bigvee_\alpha (u \bigwedge u_\alpha)$.

I.2. Гейтинговы алгебры и стоуновы пространства. *Полной гейтинговой алгеброй* называется полная решетка Ω, для которой выполняется свойство (бесконечной дистрибутивности) $u \bigwedge \bigvee_\alpha u_\alpha \leqslant \bigvee_\alpha (u \bigwedge u_\alpha)$, т. е. $u \bigwedge \bigvee_\alpha u_\alpha = \bigvee_\alpha (u \bigwedge u_\alpha)$ для любых элемента $u \in \Omega$ и множества $\{u_\alpha\} \subseteq \Omega$. Обозначим $1 = 1_\Omega = \bigvee \Omega$ и $0 = 0_\Omega = \bigwedge \Omega$.

Другое эквивалентное определение полной гейтинговой алгебры таково: это полная решетка Ω, в которой определима такая двуместная операция $\cdot \to \cdot\colon \Omega^2 \to \Omega$, что $w \leqslant (u \to v) \Leftrightarrow u \bigwedge w \leqslant v$, $\forall u, v, w \in \Omega$. Удобно считать, и мы это сделаем, что $1 \neq 0$.

Если H решетка (не обязательно полная) с наибольшим элементом 1 и наименьшим элементом 0, в которой определена такая операция $\cdot \to \cdot$, то H называется *гейтинговой алгеброй.* В H всегда рассматривается структура $\langle H, \bigvee, \bigwedge, \to, 0, 1\rangle$, где $\bigvee$, $\bigwedge$, $\to$ суть двуместные операции. Всякая гейтингова алгебра дистрибутивна в смысле: $(u \bigvee v) \bigwedge w = (u \bigwedge w) \bigvee (u \bigwedge w)$ и $(u \bigwedge v) \bigvee w = (u \bigvee w) \bigwedge (v \bigvee w)$. Далее, Ω (если явно не оговаривается иное) — полная гейтингова алгебра, в которой фиксирована структура $\langle \bigvee, \bigwedge, 0, 1\rangle$, где $\bigvee\colon \mathscr{P}(\Omega) \to \Omega$ и $\bigwedge\colon \Omega^2 \to \Omega$. Фиксирование структуры в алгебре важно, например, для понятий подалгебры или морфизма алгебр. В Ω определим $\bigwedge_\alpha u_\alpha = \bigvee \{v \mid \forall \alpha\, (v \leqslant u_\alpha)\}$, $\neg u = \bigvee \{v \mid v \bigwedge u = 0\}$, $(u \to v) = \bigvee \{w \mid u \bigwedge w \leqslant v\}$. Легко проверить: $(u \leqslant v) \Leftrightarrow u \bigwedge v = u$, $u \bigwedge (u \to v) \leqslant v$, $u \bigwedge \neg u = 0$, $w \leqslant (u \to v) \Leftrightarrow u \bigwedge w \leqslant u$, $u \bigvee (v \bigwedge w) = (u \bigvee v) \bigwedge (u \bigvee w)$.

Булевым называется такой элемент $u \in \Omega$, для которого $u \bigvee \neg u = 1$. *Полной булевой алгеброй* называется такая Ω, в которой все элементы булевы. *Булевой алгеброй* называется гейтингова алгебра (не обязательно полная), в которой все элементы булевы. *Базой* (*плотным подмножеством*) в Ω называется такое подмножество $\Omega_0 \subseteq \Omega$, для которого $\forall u \in \Omega \exists \{u_\alpha\} \subseteq \Omega_0$ $(u = \bigvee_\alpha u_\alpha)$. *Нульмерной* называется такая Ω, у которой существует база, состоящая из булевых элементов. *Финитным* называется такой элемент $u \in \Omega$, для которого $\forall \{u_\alpha\} \subseteq \Omega$ $(u \leqslant \bigvee_\alpha u_\alpha \Rightarrow u \leqslant u_{\alpha_1} \bigvee \ldots \bigvee u_{\alpha_n})$ для некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Если Ω имеет базу, состоящую из финитных элементов, то Ω называется *алгебраической решеткой.* Легко заметить, что нульмерная алгебраическая Ω имеет базой и множество финитных и булевых элементов — обычно эта база используется в доказательствах. *Компактной* называется гейтингова алгебра, в которой единица является финитным элементом. Нульмерная, компактная решетка, конечно, алгебраическая.

Двумя обширными и в некотором смысле взаимно дополнительными классами полных гейтинговых алгебр являются класс всех топологий (топология $\mathscr{T}(X)$ — это решетка всех открытых подмножеств непустого топологического пространства X), и класс всех полных булевых алгебр. Далее $\mathbb{B}$ или $\boldsymbol{B}$ — всегда полная булева алгебра, а B — булева алгебра.

Два простых, но существенных класса полных гейтинговых алгебр (сокращенно: cHa) можно описать как все нульмерные, алгебраические cHa и все нульмерные, компактные cHa. Первый класс — это все решетки идеалов булевых колец, а второй класс — это все решетки идеалов булевых алгебр. Решетка всех идеалов гейтинговой алгебры H обозначается $I(H)$.

Стоуновым пространством $X = X(H)$ гейтинговой алгебры H называется множество всех простых идеалов («точек») в H, т. е. таких $p \subseteq H$, что $1 \notin p$, $0 \in p$, $\forall u, v \in p\ (u \vee v \in p)$, $\forall u \in p\ \forall v \in H\ (u \wedge v \in p)$, $\forall u, v \in H\ (u \wedge v \in p \Rightarrow u \in p \vee v \in p)$.

В множестве $X(H)$ фиксируется топология, база которой определяется как $\{\{p \mid u \notin p\} \mid u \in H\}$. Элемент $u \in H$ отождествляется с множеством $\{p \mid u \notin p\}$, это множество обозначается также u (отсюда: $p \in u \Leftrightarrow u \notin p$); таким образом, эту базу топологии можно обозначать H. Легко показать, что в топологическом пространстве $X(H)$ множество H состоит из всех открыто-компактных элементов (точнее — открытых и квазикомпактных), а само $X(H)$ есть T_0 — квазикомпактное топологическое пространство; оно отделимо в том и только в том случае, когда H — булева алгебра. Последнее эквивалентно тому, что простые и максимальные идеалы в H одно и то же.

Если H — булева алгебра, то $X(H)$ — вполне несвязный компакт, а H — семейство всех его открыто-замкнутых множеств; если H — полная булева алгебра, то $X(H)$ экстремально несвязно.

Топология пространства $X(H)$ отождествляется, как решетка, с $I(H)$ по правилу: $a \mapsto \mathcal{O}_a$, где $a \in I(H)$, а $\mathcal{O}_a = \{p \in X(H) \mid a \nsubseteq p\}$. В этом смысле $I(H) = \mathcal{T}(X(H))$.

Важное свойство стоунова пространства состоит в следующем: если $\{u_\alpha\}$ — направленное вниз семейство открыто-компактных в $X(H)$ множеств и F — любое замкнутое в $X(H)$ множество, то $\forall\alpha\,(u_\alpha \cap F \neq \varnothing) \Rightarrow$ $\Rightarrow (\bigcap\limits_\alpha u_\alpha) \cap F \neq \varnothing$. Поэтому, в частности, $X(H)$ — бэровское пространство.

Все сказанное без изменения переносится на любую дистрибутивную решетку в роли H (а после незначительных изменений и на дистрибутивную верхнюю полурешетку с нулем).

Важную роль играет возможность вложить любую гейтингову алгебру H в полную булеву алгебру $\mathbb{B} = \mathbb{B}(H)$ таким образом, что сохраняются операции $\vee$, $\wedge$, 0, 1, а кроме того — вложить H в полную гейтингову алгебру $\Omega = \Omega(H)$ таким образом, что сохраняются уже все операции $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, 0, 1. Это делается так. Реализуем H как алгебру открыто-компактных множеств в стоуновом пространстве $X = X(H)$ и топологию $\mathcal{T} = \mathcal{T}(H)$ расширим до топологии $\mathcal{T}_1$, добавив к $\mathcal{T}$ дополнения всех открыто-компактных в $\mathcal{T}$ множеств. Пусть B — булева алгебра, порожденная H; она состоит из множеств в X вида $\bigwedge\limits_{i=1}^{n} (Cu_i \vee u_i')$, где $u_i, u_i' \in H$, а C — теоретико-множественное дополнение; B является базой топологии $\mathcal{T}_1$. Элементы из B удобно записывать в виде $\bigwedge\limits_i (u_i \underset{B}{\rightarrow} u_i')$, где $\underset{B}{\rightarrow}$ — импликация в B. Положим $I(\bigwedge\limits_i (u_i \underset{B}{\rightarrow} u_i')) \rightleftharpoons \bigwedge\limits_i (u_i \underset{H}{\rightarrow} u_i')$, где $\underset{H}{\rightarrow}$ — импликация в H; такое I вида $I\colon B \to H$.

Итак, *искомое* $\mathbb{B} = \mathbb{B}(H)$ — это пополнение B по Дедекинду; иными словами, $\mathbb{B}$ — семейство всех открытых регулярных (в смысле топологии $\mathcal{T}_1$) подмножеств в $X = X(H)$.

Напомним, что множество $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X)$ называется *регулярным*, если

$\overset{\circ}{\bar{\mathcal{O}}} = \mathcal{O}$, где $\overset{\circ}{-}$ — композиция операторов замыкания $\bar{}$ и затем внутренности $^\circ$.

Используя I, легко проверить, что естественное вложение H в B сохраняет операцию $\bigvee$. Само по себе вложение B в $\mathbb{B}$ сохраняет обе операции $\bigvee$ и $\bigwedge$.

Далее, продолжим операцию I на $\mathbb{B}(H)$ по правилу $I(b) \leftrightharpoons \bigvee_B \{I(b_1) \mid b_1 \in B \wedge b_1 \leqslant b\}$. Итак, *искомое* $\Omega \leftrightharpoons \Omega(H)$ — это $\{b \in \mathbb{B}(H) \mid I(b) = b\}$. Используя I, легко проверить, что естественное вложение H в $\Omega(H)$ сохраняет и операции $\bigwedge$, $\to$.

I.3. Определение и примеры оценок. Удобно к атомарным формулам относить и такие $\top$ («истина»), $\bot$ («ложь») с очевидным приписанием им оценок; при этом $\neg\varphi$ всегда понимается как $\varphi \Rightarrow \bot$. Повторим по существу уже сформулированное в пункте I.1 определение оценивания (оценки). *Оценкой* для языка $Я$ (включающего символ равенства $\cdot = \cdot$) и семейства параметров D, $D \neq \varnothing$, а также полной гейтинговой алгебры Ω называется отображение вида $[\![\cdot]\!]$: $Я(D) \to \Omega$ (где $Я(D)$ — все замкнутые формулы языка $Я$ с параметрами из D), удовлетворяющее условиям: $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \wedge [\![\psi]\!]$, $[\![\exists x\varphi]\!] = \bigvee \{[\![\varphi(k)]\!] \mid k \in D\}$ и так далее для всех связок; а также удовлетворяющее условиям: $[\![k = k]\!] = 1$, $\forall k \in D$ («рефлексивность») и для любой атомарной формулы φ_0 выполняется («согласование с равенством»): $[\![k = t]\!] \wedge [\![\varphi_0(k)]\!] \leqslant [\![\varphi_0(t)]\!]$, $\forall k, t \in D$, где k в φ может находиться по месту любой свободной переменной. Из определения вытекает: $[\![k = t]\!] = [\![t = k]\!]$ («симметричность»), $[\![k = t]\!] \wedge [\![t = l]\!] \leqslant [\![k = l]\!]$ («транзитивность»), т. е. $[\![\cdot = \cdot]\!]$ является отношением эквивалентности на D. Индукцией по длине формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ получим $(\bigwedge_{i=1}^{n} [\![k_i = t_i]\!] \wedge [\![\varphi(\bar{k})]\!]) \leqslant [\![\varphi(\bar{t})]\!]$. Определение оценки не закончено в том случае, если язык включает функциональные символы. Тогда каждому функциональному символу $f(x_1, \ldots, x_n)$ сопоставляется функция f: $D^n \to D$, «согласованная с оценкой» условием $(\bigwedge_{i=1}^{n} [\![k_i = t_i]\!]) \leqslant [\![f(\bar{k}) = f(\bar{t})]\!]$. Все термы по определению сначала вычисляются в D, а затем подставляются в формулы — такое понимание вхождений термов в формулы называется *операторным*.

Ω-множеством называется набор $\langle \Omega, D, [\![\cdot]\!] \rangle$, где все определяется, как выше, за исключением того, что условие рефлексивности заменяется на условие симметричности (см. пример 7).

Константы языка $Я$ отождествляются с фиксированными элементами семейства D; в этом смысле константы языка и параметры языка не различаются.

Все, что требуется для задания любой оценки — это определить функцию $[\![\cdot]\!]$: $Я_0(D) \to \Omega$, где $Я_0(D)$ — все замкнутые атомарные формулы языка $Я$ с параметрами из D.

Часто D — носитель некоторой структуры, и поэтому определен предикат $D \models \varphi$, где $\varphi \in Я(D)$ (в этом случае обычно вместо D пишем K). *Нормальной* можно назвать такую оценку $[\![\cdot]\!]$, что для любой атомарной формулы $\varphi \in Я_0(D)$ выполняются $(D \models \varphi) \Leftrightarrow ([\![\varphi]\!] = 1)$. Если D — множество без структуры, то положим для любой атомарной формулы φ: $(D \models \varphi) \Leftrightarrow ([\![\varphi]\!] = 1)$ — и получим структуру в D, для которой эта оценка нормальна. Термин «нормальная оценка» употребляется и в том случае, когда указанное условие выполняется для части атомарных формул. Если явно не оговорено иное, то будем считать, что это условие относится только к атомарной формуле $\cdot = \cdot$.

Слабо пучковой назовем оценку $[\![\cdot]\!]_\Omega$, для которой $\forall u \in \Omega$ (u — булев элемент $\Rightarrow \forall k, t \in D \exists s \in D\, u \leqslant [\![s = k]\!]_\Omega \wedge \neg u \leqslant [\![s = t]\!]_\Omega$). Для нормальной оценки такое s единственно. Будем обозначать его $u \cdot k + \neg u \cdot t$. Для слабо пучковой оценки выполняется: если $\{u_1, \ldots, u_n\}$ — дизъюнктное семейство булевых элементов из Ω, то для любых $\{k_1, \ldots, k_n\} \subseteq D$ существует $k \in D$, для которого $u_1 \leqslant [\![k = k_1]\!], \ldots, u_n \leqslant [\![k = k_n]\!]$. Это k обозначим $\sum\limits_i u_i \cdot k_i$.

Пучковой назовем оценку $[\![\cdot]\!]_\Omega$ со следующим свойством: если $\{u_\alpha\} \subseteq \Omega$ и $\{k_\alpha\} \subseteq D$, и $\forall \alpha, \beta\ (u_\alpha \wedge u_\beta \leqslant [\![k_\alpha = k_\beta]\!]_\Omega)$, где $\bigvee\limits_\alpha u_\alpha$ — булев элемент, то существует $k \in D$, для которого $u_\alpha \leqslant [\![k = k_\alpha]\!]_\Omega\ \forall \alpha$. Пучковая оценка — слабо пучковая. Соответствующее k будем обозначать $\sum\limits_\alpha u_\alpha \cdot k_\alpha$.

Отличительная особенность пучка (в традиционном смысле этого термина) состоит в возможности склеивать отдельные сечения. «Пучковые» оценки и объекты определяются как раз возможностью склеивать элементы-сечения k_α, «определенные» на u_α, т. е. возможностью образовывать элемент-сечение $\sum\limits_\alpha u_\alpha \cdot k_\alpha$.

Назовем *достижимой* оценку $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D}$, для которой выполняется $([\![\exists\, x\varphi]\!] \geqslant u) \Rightarrow \exists\, k \in D\ ([\![\varphi\,(k)]\!] \geqslant u)$ для любой формулы $\varphi\,(x)$ с одной свободной переменной x и любыми параметрами из D, а также любого булева элемента $u \in \Omega$. Обычно достижимость используется для $u = 1$.

Для произвольной оценки $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D}$ в языке, включающем символ $\cdot \in \cdot$, и для $d \in D$ обозначим $\hat{d}^\Omega$ (или короче $\hat{d}$) множество $\{x \in D \mid [\![x \in d]\!]_{\Omega, D} = 1\}$. Оператор $(\cdot)^\wedge$ аналогичен оператору $^*(\cdot)$ в робинсоновском нестандартном анализе, который сопоставляет внутреннему множеству d внешнее множество $^*d$.

Для произвольной оценки $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D}$ и простого идеала p в Ω обозначим $D_p \leftrightharpoons D/\!\sim_p$, где $(x \sim_p y) \Leftrightarrow [\![x = y]\!] \notin p$. Для любой атомарной формулы φ_0 и классов эквивалентности $[k_1]_p, \ldots, [k_n]_p \in D_p$ также положим

$$(D_p \models \varphi_0\,([k_1]_p, \ldots, ([k_n]_p)) \Leftrightarrow ([\![\varphi_0\,(k_1, \ldots, k_n)]\!]_{\Omega, D} \notin p).$$

Такая структура D_p называется *слоем* над точкой p. Вместо $[k]_p$ часто пишут $k\,(p)$ (или, короче, $[k]$).

Пример 1. Пусть $Я$ — обычный язык теории множеств (язык ZF), в нем атомарные предикаты $\cdot \in \cdot$ и $\cdot = \cdot$. В качестве семейства параметров D выберем класс V^Ω. Класс V^Ω определяется как $\bigcup\limits_\alpha V^\Omega_\alpha$, где α пробегает класс On всех ординалов, а V^Ω_α — множество всех функций вида $f\colon V^\Omega_\beta \to \Omega$, $\beta < \alpha$. Например, $(f = g) \Leftrightarrow \forall x\,(x \in f \Leftrightarrow x \in g)$ — замкнутая формула этого языка (с параметрами $f, g \in V^\Omega$). В этом случае $Я_0\,(D) = \{(f \in g) \mid f, g \in V^\Omega\} \cup \{(f = g) \mid f, g \in V^\Omega\}$.

Положим $[\![f \in g]\!]_\Omega = \bigvee \{g\,(h) \wedge [\![f = h]\!]_\Omega \mid h \in \mathscr{D}\,(g)\}$ и $[\![f = g]\!]_\Omega = \bigwedge \{(f\,(h_1) \to [\![h_1 \in g]\!]_\Omega) \mid h_1 \in \mathscr{D}\,(f)\} \wedge \bigwedge \{(g\,(h_2) \to [\![h_2 \in f]\!]_\Omega) \mid h_2 \in \mathscr{D}\,(g)\}$. Это корректное определение, в сущности, индукцией по α. Оценка однозначно продолжается на все формулы.

Заменим семейство параметров V^Ω на семейство параметров $V^\Omega/\!\sim$, где $f \sim g \leftrightharpoons [\![f = g]\!]_\Omega = 1$; это фактор-семейство также будем обозначать V^Ω. Оценка в языке ZF с семейством параметров $V^\Omega/\!\sim$ определяется как $[\![\varphi\,([f_1], \ldots, [f_n])]\!]_\Omega = [\![\varphi\,(f_1, \ldots, f_n)]\!]_\Omega$ (правая часть не зависит от выбора представителей). Она, по существу, совпадает с оценкой в языке ZF с семейством параметров V^Ω. Эту оценку назовем *оценкой в языке* ZF.

Гейтингова алгебра $Z_2 = \{0, 1\}$ вкладывается в любую алгебру Ω. Это вложение индуцирует вложение $(\cdot)^\vee\colon V \to V^\Omega$ класса «всех множеств» V в V^Ω (где $V = \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$, а α пробегает On и $V_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \mathscr{P}\,(V_\beta)$). Вложение $(\cdot)^\vee$ совпадает с отождествлением V и V^{Z_2}. Обычно V, V^{Z_2} и образ V при этом вложении не различаются. В этом смысле V содержится во всех V^Ω (хотя V и содержит все V^Ω).

Если $X \subseteq V^\Omega$ и X — множество, то обозначим $(X)_-$ (или $\underline{X}$) функцию, определенную на $\underline{X}$ и тождественно равную 1. Конечно, $\underline{X} \in V^\Omega$.

Функция f из V^Ω называется *экстенсиональной*, если $\forall x, y \in \mathscr{D}(f)\,((f(x) \wedge [\![x = y]\!]_\Omega) \leqslant f(y))$. Более общо, *экстенсиональной* называется функция $f\colon D \to \Omega$, где D — множество параметров какой-то оценки $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D}$, если выполняется $\forall d_1, d_2 \in D\ (f(d_1) \wedge [\![d_1 = d_2]\!]_{\Omega, D} \leqslant f(d_2))$.

Некоторые свойства произвольной оценки и оценки в языке ZF собраны в следующих четырех теоремах.

Теорема 1. *Пусть Ω нульмерная и оценка $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D}$ — слабо пучковая.*

а) *Если Ω — компактная решетка, то оценка достижима. Если оценка $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D}$ — пучковая и Ω — полная булева алгебра, то оценка достижима.*

б) *Если $\exists d_1, \ldots, d_n \in D\ ([\![\varphi(d_1, \ldots, d_n)]\!]_{\Omega, D} = 1)$, то*

$$[\![\exists \bar{x}\,(\varphi \wedge \psi)]\!]_{\Omega, D} = \bigvee \{[\![\psi(x_1, \ldots, x_n)]\!]_{\Omega, D} \mid x_1, \ldots, x_n \in D,\ [\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]_{\Omega, D} = 1\}$$

и

$$[\![\forall x_1, \ldots, x_n\,(\varphi \Rightarrow \psi)]\!]_{\Omega, D} = \bigwedge \{[\![\psi(x_1, \ldots, x_n)]\!]_{\Omega, D} \mid x_1, \ldots, x_n \in D,\ [\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!]_{\Omega, D} = 1\},$$

где φ, ψ содержат любые параметры из D.

в) *Пусть $[\![\cdot]\!]_\Omega$ — оценка в языке ZF. Если $\hat{f}^\Omega \neq \varnothing$, то выполняется $[\![(\hat{f}^\Omega)_- = f]\!]_\Omega = 1$. Пусть $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D}$ — нормальная оценка и множество X — часть D. Если X — пучковое относительно индуцированной оценки $[\![\cdot]\!]_{\Omega, X}$, то $(\underline{X})^{\wedge\Omega} = X$.*

Доказательство. а) Пусть $[\![\exists x \varphi(x, k_1, \ldots, k_n)]\!] \geqslant u$, где u — финитный элемент в Ω. То есть $\bigvee\limits_{d \in D} [\![\varphi(d, \bar{k})]\!] = \bigvee\limits_{d, \alpha} b_{d, \alpha} \geqslant u$, где $b_{d, \alpha}$ — булевы элементы. Так как u — финитный элемент, то существуют $d_1, \ldots, d_n$, для которых $b_{d_1} \vee \ldots \vee b_{d_n} \geqslant u$, где b_{d_i} — объединение $b_{d, \alpha}$, соответствующих одному d. Все b_{d_i} — булевы элементы. Образуем (за счет булевости) $\{b_i\}$, где $b_i \leqslant b_{d_i}$, $b_1 \vee \ldots \vee b_n \geqslant u$ и $\{b_i\}$ — дизъюнктное семейство. По условию слабой пучковости образуем $d = \sum\limits_i b_i \cdot d_i$. Тогда $b_i \leqslant [\![d = d_i]\!]$, $b_i \leqslant [\![\varphi(d, \bar{k})]\!]$, $u \leqslant [\![\varphi(d, \bar{k})]\!]$. До сих пор компактность Ω не использовалась. Теперь заметим: если u — булев элемент в компактной Ω, то он — и финитный элемент.

Проверим второе утверждение. Пусть $[\![\exists x \varphi(x, \bar{k})]\!] = \bigvee\limits_d b_d \geqslant b \in \Omega$, где $b_d = [\![\varphi(d, \bar{k})]\!]$. Образуем дизъюнктное семейство $\{b_d'\}$, $\bigvee\limits_\alpha b_d' \geqslant b$, $b_d' \leqslant b_d$ и по условию пучковости образуем такое k, что $b_d' \leqslant [\![k = d]\!]$. И закончим, как выше.

б) Нужно проверить $\left(\bigwedge\limits_{x_1, \ldots, x_n \in D} ([\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!] \to [\![\psi(x_1, \ldots, x_n)]\!]\right) \geqslant \bigwedge \{[\![\psi(x_1, \ldots, x_n)]\!] \mid x_1, \ldots, x_n \in D,\ [\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!] = 1\}$. Пусть $[\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!] = \bigvee\limits_\alpha u_\alpha$, где u_α — булевы элементы в Ω. Положим $t_1 = u_\alpha \cdot x_1 + \neg u_\alpha \cdot d_1, \ldots, t_n = u_\alpha \cdot x_n + \neg u_\alpha \cdot d_n$. Все они из D. Тогда $u_\alpha \leqslant [\![t_1 = x_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![t_n = x_n]\!] \wedge [\![\varphi(x_1, \ldots, x_n)]\!] \leqslant [\![\varphi(t_1, \ldots, t_n)]\!]$, $\neg u_\alpha \leqslant [\![t_1 = d_1]\!] \wedge \ldots \wedge [\![t_n = d_n]\!] \wedge [\![\varphi(d_1, \ldots, d_n)]\!] \leqslant [\![\varphi(t_1, \ldots, t_n)]\!]$. Отсюда $1 = [\![\varphi(t_1, \ldots, t_n)]\!]$. Кроме того, $[\![\psi(t_1, \ldots, t_n)]\!] \leqslant (u_\alpha \to [\![\psi(x_1, \ldots, x_n)]\!])$, $[\![\psi(t_1, \ldots, t_n)]\!] \leqslant (\bigvee\limits_\alpha u_\alpha) \to [\![\psi(x_1, \ldots, x_n)]\!]$. Аналогично рассматривается случай $\exists \bar{x}$.

в) Достаточно проверить равнообъемность $g = (\hat{f}^\Omega)_-$ и f (в остальном речь идет о произвольной оценке в языке, содержащем символ $\cdot\in\cdot$). Очевидно, $[\![h \in g]\!] = \bigvee \{[\![h = h_1]\!] \mid [\![h_1 \in f]\!] = 1\} \leqslant [\![h \in f]\!]$. В обратную сторону используем предыдущий пункт. Второе утверждение: в одну сторону равенство очевидно. Если $[\![d \in \underline{X}]\!] = 1$, то $1 = \bigvee\limits_{x \in X} [\![d = x]\!]$. Эти слагаемые обозначим u_x. Тогда $u_x \wedge u_y \leqslant [\![x = y]\!]$ и по пучковости множества X существует $k \in X$, для которого $u_x \leqslant [\![k = x]\!]$. Поэтому $1 = [\![k = d]\!]$. В силу нормальности $d = k \in X$. $\square$

Выражение «$\bigcup$-оценка» означает наличие следующего свойства: $p \in \in [\![\exists x\varphi]\!] \Rightarrow \exists k \in D\ (p \in [\![\varphi\,(k)]\!])$, где φ — любая формула с параметрами из D (по существу, это же свойство фигурирует и в теореме 15). Ясно, что речь идет об ослабленной достижимости.

Теорема 2. *Пусть φ — любая формула с параметрами из D.*

а) *Если оценка пучковая и Ω — полная булева алгебра, то*

$$[\![\varphi\,(d_1, \ldots, d_n)]\!] = \{p \in X\,(\Omega) \mid D_p \models \varphi\,(d_1\,(p), \ldots, d_n\,(p))\}.$$

В пунктах б), в) предположим, что значение оценки на любой атомарной формуле — булев элемент.

б) *Для $\bigcup$-оценки и φ без кванторов в области действия импликации выполняется*

$$(p \in [\![\varphi\,(d_1, \ldots, d_n)]\!]) \Rightarrow D_p \models \varphi\,(d_1\,(p), \ldots, d_n\,(p)).$$

в) *Если оценка слабо пучковая, а φ — AE-формула, то*

$$(\forall p \in u\, D_p \models \varphi\,(d_1\,(p), \ldots, d_n\,(p)) \Rightarrow [\![\varphi\,(d_1, \ldots, d_n)]\!] \geqslant u$$

для любого булева элемента u из Ω.

Доказательство. а) Оценка со значениями в полной булевой алгебре замкнута относительно всех классических преобразований связок (см. теорему 8в)), как, разумеется, и предикат $D_p \models (\cdot)$. Поэтому можно ограничиться проверкой эквивалентности $[\![\varphi]\!] \notin p \Leftrightarrow (D_p \models \varphi)$ для атомарных формул и связок $\wedge$, $\neg$, $\exists$. Для атомарной φ эквивалентность выполняется по определению слоя D_p. Для $\neg$ имеем: $[\![\varphi]\!] \in p \Leftrightarrow D_p \models \neg\varphi$, $[\![\varphi]\!] \in \in p \Leftrightarrow \neg[\![\varphi]\!] \notin p$. Для $\wedge$ имеем:

$$[\![\varphi \wedge \psi]\!] \notin p \Leftrightarrow ([\![\varphi]\!] \notin p) \wedge ([\![\psi]\!] \notin p) \Leftrightarrow (D_p \models \varphi) \wedge (D_p \models \psi).$$

Для связки $\exists$ используем достижимость, которая имеет место по теореме 1а.

б) Для бескванторной формулы φ проверим полезную во многих случаях эквивалентность: $[\![\varphi]\!] \notin p \Leftrightarrow D_p \models \varphi$. Для атомарной формулы и связок $\neg$, $\wedge$ это сделано в пункте а) (для случая $\neg$ важно, что $[\![\varphi]\!] \vee [\![\neg\varphi]\!] = = 1$). Для связки $\vee$ имеем: $[\![\varphi \vee \psi]\!] \notin p \Leftrightarrow ([\![\varphi]\!] \notin p) \vee ([\![\psi]\!] \notin p)$. Для связки $\Rightarrow$ используем: $[\![\varphi]\!] \rightarrow [\![\psi]\!] = \neg[\![\varphi]\!] \vee [\![\psi]\!]$ (с учетом булевости этих оценок). Далее, для связки $\forall$ очевидно, а для связки $\exists$ используем условие $\bigcup$-оценки.

в) Для бескванторной формулы это утверждение доказано в предыдущем пункте, для связки $\forall$ оно очевидно. Рассмотрим случай: $\forall p \in u\ (D_p \models \models \exists x\varphi)$, где φ — бескванторная формула. Обозначим $d_{p_0}(p_0)$ тот элемент из D_{p_0}, для которого $D_{p_0} \models \varphi\,(d_{p_0}(p_0))$, где $d_{p_0} \in D$. По доказанному и по условию $p_0 \in \{p \mid D_p \models \varphi\,(d_{p_0}(p))\} = [\![\varphi\,(d_{p_0})]\!]$ — булев элемент. Этот элемент обозначим b_{p_0}. Тогда $\bigvee\limits_{p_0} b_{p_0} \geqslant u$ и по компактности Ω получим $b_{p_1}, \ldots, b_{p_n}$, для которых $b_{p_1} \vee \ldots \vee b_{p_n} \geqslant u$. Заменим b_{p_i} на b_i, где $\{b_i\}$ — дизъюнктное семейство, $b_0 \leqslant b_{p_i}$, $\bigvee\limits_i b_i \geqslant u$. По слабой пучковости оценки образуем $k = \sum\limits_i b_i \cdot d_{p_i}$. Тогда $b_i \leqslant [\![\varphi\,(d_{p_i})]\!] \wedge [\![k = d_{p_i}]\!] \leqslant \leqslant [\![\varphi\,(k)]\!]$, $[\![\varphi\,(k)]\!] \geqslant u$, $[\![\exists x\varphi]\!] \geqslant u$. (Если ограничиться финитными u, то условие компактности Ω излишне.)

Замечание. Очевидна связь теоремы 2а) с теоремой Лося в робинсоновском нестандартном анализе.

Теорема 3. *Пусть* $f, g \in V^{\Omega}$ *и рассматривается оценка в языке* ZF:

а) *Выполняются*

$$[\![(\exists x \in f)\varphi]\!]_{\Omega} = \bigvee_{x \in \mathscr{D}(f)} f(x) \wedge [\![\varphi(x)]\!]_{\Omega}, \quad [\![(\forall x \in f)\varphi]\!]_{\Omega} = \bigwedge_{x \in \mathscr{D}(f)} (f(x) \to [\![\varphi(x)]\!]_{\Omega}).$$

б) *Для любого множества* $X \subseteq V^{\Omega}$, $\mathscr{D}(f) \subseteq X$ *существует экстенсиональная функция* g, $\mathscr{D}(g) = X$, *для которой* $[\![f = g]\!]_{\Omega} = 1$, *т. е.* $f = g$ *в* V^{Ω}. *Для экстенсиональных функций* f, g *выполняется* $[\![x \in f]\!]_{\Omega} = f(x)$ (*если* $x \in \mathscr{D}(f)$) *и* $[\![f = g]\!] = \bigwedge_{x \in \mathscr{D}(f)} (f(x) \leftrightarrow g(x))$ (*если области определения* f *и* g *совпадают*).

в) *Выполняется* $f(x) \leqslant [\![x \in f]\!]_{\Omega}$ (*если* $x \in \mathscr{D}(f)$). *А также* ($[\![f = g]\!]_{\Omega} \geqslant u \Leftrightarrow f_1 = g_1$, *если* f *и* g *экстенсиональные с общей областью определения и* $[\![f_1 = f]\!]_{\Omega} \geqslant u$ *для любого* $u \in \Omega$, *где* $f_1(x) \leftrightharpoons f(x) \wedge u$ *и* $g_1(x) \leftrightharpoons g(x) \wedge u$.

г) *Выполняется*

$$[\![\varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)]\!]_{\Omega} = \begin{cases} 1, & \varphi(x_1, \ldots, x_n), \\ 0, & \neg\varphi(x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

где $x_1, \ldots, x_n \in V$, *а* φ — *любая ограниченная формула* (*т. е. все кванторы из* φ *входят в* φ *в виде* $\exists x \in u$ *или* $\forall x \in u$, *а* u — *свободная или связанная переменная*). *В этом смысле* $(\cdot)^{\vee}\colon V \to V^{\Omega}$ — *«почти элементарное» вложение.*

Часто используются (см. гл. III) следующие взаимоотношения между V^{Ω} и V^{B}, где $\mathbb{B}$ равно $\mathbb{B}(\Omega)$, определенному в конце пункта I.2.

Во-первых, V^{Ω} является частью V^{B}, а во-вторых, выполняется

Теорема 3д). *Имеет место*: $\forall f, g \in V^{\Omega}$ ($[\![f \in g]\!]_{\Omega} \leqslant [\![f \in g]\!]_{B}$, $[\![f = g]\!]_{\Omega} \leqslant [\![f = g]\!]_{B}$, *а также в* Ω *и в* $\mathbb{B}$ *значимо* «$\{f, g\}_{-}$ — *пара из* f *и* g» *и* «$\{\{f\}_{-}, \{f, g\}_{-}\}_{-}$ — *упорядоченная пара из* f *и* g», *и, наконец,* $[\![x = \{f, g\}]\!]_{\Omega} \leqslant [\![x = \{f, g\}]\!]_{B}$, $[\![x = \langle f, g\rangle]\!]_{\Omega} \leqslant [\![x = \langle f, g\rangle]\!]_{B}$, *где* f *и* g *из* V^{Ω}.

Доказательство теоремы 3 по существу содержится, например, в [3], а фактически и в [2].

Теорема 4. *Оценка в языке* ZF — *нормальная и пучковая. Если* Ω — *полная булева алгебра, то эта оценка достижимая.*

Доказательство. Нормальность оценки сразу вытекает из определения оценки в языке ZF. Пусть $\{u_{\alpha}\} \subseteq \Omega$, $\{f_{\alpha}\} \subseteq V^{\Omega}$ и эти семейства согласованы, т. е. $u_{\alpha} \wedge u_{\beta} \leqslant [\![f_{\alpha} = f_{\beta}]\!]$. Положим $f(\cdot) = \bigvee_{\alpha} (u_{\alpha} \wedge f'_{\alpha}(\cdot))$, где каждая f'_{α} — экстенсиональная функция, равная f_{α} с одной и той же областью определения для всех α. Тогда f имеет ту же область определения и также экстенсиональна. Далее, $f \wedge u_{\beta} = \bigvee_{\alpha} u_{\alpha} \wedge u_{\beta} \wedge f'_{\alpha} = \bigvee_{\alpha} u_{\alpha} \wedge \wedge u_{\beta} \wedge f'_{\beta} = u_{\beta} \wedge f'_{\beta}$; $u_{\beta} \leqslant [\![f = f'_{\beta}]\!]$, $u_{\beta} \leqslant [\![f = f_{\beta}]\!]$, где дважды использовалась теорема 3в. Поэтому $f = \sum_{\alpha} u_{\alpha} \cdot f_{\alpha}$. Для получения второго утверждения применим теорему 1а). $\square$

Конструкция V^{Ω} и ее простые свойства оформились постепенно. Это относится и к концепции произвольной оценки. В какой-то мере это встречалось у К. Гёделя и А. Черча, затем у П. Коэна, в явном виде появилось у П. Вопенки, Д. Скотта, Р. Соловея, Р. Грейсона и других.

Пример 2. Пусть $\langle K, +, -, 0, 1\rangle$ произвольное ассоциативное кольцо с единицей. Обозначим всюду далее $B(K)$ множество всех центральных идемпотентов кольца K, т. е. $k \in B(K) \Leftrightarrow k^2 = k \wedge \forall t\,(k \cdot t = t \cdot k)$. В $B(K)$ имеется каноническая структура булевой алгебры: $e_1 \wedge e_2 = e_1 \cdot e_2$, $\neg e = 1 - e$, $e_1 \vee e_2 = e_1 + e_2 - e_1 \cdot e_2$, где $e_1, e_2 \in B(K)$. Обозначим всюду далее $X(K)$ стоуново пространство булевой алгебры $B(K)$, а $\mathcal{T}(K)$ — его топологию. Точка из $X(K)$ называется *точкой кольца* K. Далее буква $\mathcal{O}$ всегда обозначает открытое множество из соответствующей топологии, в данном случае $\mathcal{O}$ — элемент из $\mathcal{T}(K)$. Конечно, $B(K) \subseteq \mathcal{T}(K)$. Это $\mathcal{T}(K)$ иногда называют *топологическим пополнением* булевой алгебры $B(K)$.

Обозначим далее $\mathbb{B}(K)$ *или* $\boldsymbol{B}(K)$ полную булеву алгебру, являющуюся пополнением по Дедекинду булевой алгебры $B(K)$. Ее удобно отождествить с решеткой всех регулярных открытых множеств в $X(K)$, т. е. $\mathbb{B}(K) \subseteq \mathcal{T}(K)$. Отметим простые свойства: $\neg_{\mathcal{T}}\, \mathcal{O} = (C\mathcal{O})^0$, где C — теоретико-множественное дополнение, $\overset{\circ}{\bar{\mathcal{O}}} = \neg_{\mathcal{T}}\neg_{\mathcal{T}}\mathcal{O}$, а также $\overset{\circ}{\bar{\mathcal{O}}}$ — наименьшее регулярное открытое множество, содержащее $\mathcal{O}$, и $\bigvee_{\mathcal{T}}\mathcal{O}_\alpha = \bigcup\limits_\alpha \mathcal{O}_\alpha$, $\bigvee_B \mathcal{O}_\alpha = (\bigcup\limits_\alpha \mathcal{O}_\alpha)^{-\circ}$, $\bigwedge_{\mathcal{T}}\mathcal{O}_\alpha = (\bigcap\limits_\alpha \mathcal{O}_\alpha)^0$, $\bigwedge_B \mathcal{O}_\alpha = (\bigcap\limits_\alpha \mathcal{O}_\alpha)^0$, $\neg_{\mathcal{T}}\mathcal{O} = \neg_B\mathcal{O}$, т. е. операции в $\mathcal{T}$ и $\mathbb{B}$ различаются только на sup.

Пусть $Я$ — язык колец, т. е. язык, содержащий символы $=, +, -, \cdot, 0, 1$, один сорт переменных (пробегающих K) и все обычные связки. В качестве семейства параметров возьмем $D \rightleftharpoons K$. Тогда $Я_0(D) = \{(k = t) \mid k, t \in K\}$. Подразумевается, что для атомарных формул с термами, т. е. для формул вида $(p = q)$, где p, q — многочлены с параметрами $k_1, \ldots, k_n \in K$, подставленными вместо свободных переменных, сначала вычисляются p и q в K, а затем подсчитывается оценка для $[\![k = t]\!]$, где $k, t \in K$. Такое понимание термов, входящих в состав формул, называется *операторным*.

Итак, положим $[\![k = t]\!] = \bigvee \{e \in B(K) \mid e \cdot k = e \cdot t\}$, где $\bigvee$ вычисляется в одном из двух пополнений алгебры $B(K)$: топологическом пополнении $\mathcal{T}(K)$ или дедекиндовом пополнении $\mathbb{B}(K)$. Таким образом определяются две оценки: $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}(K)}$ и $[\![\cdot]\!]_{B(K)}$. Они называются соответственно $\mathcal{T}$- и $\mathbb{B}$-*оценками в языке колец*. Вместо $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}(K)}$ иногда пишут $[\![\cdot]\!]_K$. Оценка $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}(K)}$ определена Д. Скотт (см. [1]).

Для любого $p \in X(K)$ обозначим $\bar{p}$ наименьший идеал в K, содержащий p. Легко проверить, что $\bar{p} = p \cdot K$ и $1 \notin \bar{p}$, т. е. $\bar{p}$ — собственный идеал. В зависимости от условий на кольцо K класс идеалов $\{\bar{p} \mid p \in X(K)\}$ может быть описан в терминах самого кольца K, без упоминания булевой алгебры $B(K)$. Обозначим $K_p \rightleftharpoons K/\bar{p}$. Отметим ценную функцию $p \mapsto K_p$, а также функцию $k \mapsto k(\cdot)$, где $k \in K$, а $k(\cdot)\colon X(K) \to \bigcup\limits_{p \in X(K)} K_p$, $k(p) \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons [k]_{\bar{p}}$ и $[k]_{\bar{p}}$ — класс эквивалентности в K_p элемента k по идеалу $\bar{p}$. Эта конструкция (по существу, накрывающего пространства $\langle \bigcup\limits_{p \in X(K)} K_p, X(K)\rangle$ со слоями K_p) получена Р. Пирсом.

Конечно, если $k = t$, то $[\![k = t]\!]_{\mathcal{T}(K)} = [\![k = t]\!]_{B(K)} = 1$.

Теорема 5. *Оценка $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}(K)}$ — нормальная и пучковая, а потому и достижимая.*

Лемма 1. *Если $e \leqslant [\![k = t]\!]_{\mathcal{T}(K)}$, где $e \in B(K)$, то $e \cdot k = e \cdot t$.*

Доказательство. По условию $e \subseteq \bigcup\limits_\alpha e_\alpha$, где $e_\alpha \cdot k = e_\alpha \cdot t$. По компактности e получим $e \subseteq e_{\alpha_1} \cup \ldots \cup e_{\alpha_n}$ и по булевости слагаемых $e = e_1' \sqcup \ldots \sqcup e_n'$, где $e_i' \in B(K)$, $e_i' \leqslant e_{\alpha_i}$, а $\sqcup$ означает дизъюнктное объединение. Поэтому $e = e_1' + \ldots + e_n'$, $e \cdot k = e_1' \cdot k + \ldots = e_1' \cdot e_{\alpha_1} \cdot k + \ldots = e_1' \cdot e_{\alpha_1} \cdot t = e \cdot t$. (Несложное рассуждение показывает также, что отображение $k \mapsto k(\cdot)$ инъективно. Значения этого отображения называются *сечениями*. Отсюда элементы произвольного кольца отождествляются с сечениями.)

Доказательство теоремы 5. Нормальность оценки сразу получаем по лемме 1. Достижимость будет вытекать из нормальности и пучковости по теореме 1а), так как $\mathcal{T}(K)$ — нульмерная, компактная решетка. Осталось проверить пучковость оценки. Сначала заметим, что эта оценка — слабо пучковая, так как склейкой k и t на $e \in B(K)$ служит элемент кольца $(e\cdot k + (1-e)\cdot t)$.

Пусть $\bigcup\limits_\alpha \mathcal{O}_\alpha = e \in B(K)$. Тогда $\bigcup\limits_{\alpha,\beta} e_{\alpha,\beta} = e$, где $\mathcal{O}_\alpha = \bigcup\limits_\beta e_{\alpha,\beta}$ и $e_{\alpha_1} \cup \ldots \cup e_{\alpha_n} = e$, и e_{α_1} — объединение конечного числа $e_{\alpha_1,\beta_1}, \ldots, e_{\alpha_1,\beta_m}$. Образуем дизъюнктную систему $\{e_i\}$, где $\bigcup\limits_i e_i = e$ и $e_i \leqslant e_{\alpha_i}$. И теперь склеим $\sum\limits_i e_i\cdot k_{\alpha_i} \rightleftharpoons k$. Это k — искомое: $e_i \leqslant [\![k = k_{\alpha_i}]\!]$, $\mathcal{O}_\alpha = \mathcal{O}_\alpha \wedge \bigvee\limits_i e_i \leqslant \bigvee\limits_i (\mathcal{O}_\alpha \wedge \mathcal{O}_{\alpha_i}) \wedge [\![k = k_{\alpha_i}]\!]) \leqslant \bigvee\limits_i ([\![k_\alpha = k_{\alpha_i}]\!] \wedge [\![k = k_{\alpha_i}]\!]) \leqslant [\![k = k_\alpha]\!]$. $\square$

Кольцо K назовем *нормальным*, если $\forall k \in K \exists e_0 \in B(K)\, \forall e \in B(K)(e\cdot k = 0 \Leftrightarrow e \leqslant e_0)$. Эту формулу, записанную в языке колец, обозначим Φ_1. Интуитивный смысл понятен: в нормальном кольце множество аннуляторов из $B(K)$ любого фиксированного элемента $k \in K$ содержит наибольший элемент. Примерами нормальных колец служат кольца, упомянутые в теореме 14, в том числе строго бирикартовы кольца, определяемые условием $\forall k \in K \exists e \in B(K)(\langle k\rangle^* = e\cdot K)$, где $\langle k\rangle$ — главный (двусторонний) идеал, порожденный элементом k, и a^* — правый аннулятор идеала a, т. е. $a^* = \{t \in K \mid a\cdot t = 0\}$. Обозначим Φ_2 условие безатомности кольца K, т. е. $\Phi_2 \rightleftharpoons \forall e \exists t \exists e_0 \forall t_1 (e^2 = e \wedge e\cdot t = t\cdot e \Rightarrow e_0^2 = e_0 \wedge e_0\cdot t_1 = t_1\cdot e_0 \wedge \wedge (e_0 = 0 \Rightarrow e = 0) \wedge (e_0 = e \Rightarrow e = 0) \wedge (e_0\cdot e = e_0)$. Безатомность K — это условие отсутствия атомов в булевой алгебре $B(K)$, эквивалентное условию отсутствия изолированных точек в топологическом пространстве $X(K)$. Обозначим Φ_3 условие абелевости кольца K, т. е. $\Phi_3 \rightleftharpoons \forall e \forall t\, (e^2 = e \Rightarrow e\cdot t = t\cdot e)$. Например, в кольце без нильпотентных элементов (т. е. $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$) выполняется Φ_3. Другие, часто упоминаемые в этой работе, свойства колец вводятся на с. 115 и обозначаются там Φ_4, Φ_5.

Кольцо K назовем *пучковым*, если оно нормально и, кроме того, выполняется $\forall \{e_\alpha\} \subseteq B(K)\, \forall \{k_\alpha\} \subseteq K \exists k \in K\, (1 = \bigvee_B e_\alpha \wedge \forall \alpha, \beta\, (e_\alpha\cdot e_\beta\cdot k_\alpha = e_\alpha\cdot e_\beta\cdot k_\beta) :\Rightarrow: \forall \alpha\, (e_\alpha\cdot k = e_\alpha\cdot k_\alpha))$.

Условие нормальности обеспечивает единственность такого k; будем обозначать его $\sum\limits_i e_\alpha\cdot k_\alpha$. В случае, когда $B(K)$ — полная булева алгебра, понятия пучкового кольца (модуля) совпадают с понятиями ортогонально полного кольца (модуля), которые были определены К. И. Бейдаром и А. В. Михалевым. Используемый здесь термин созвучен с теорией пучков и работой [1].

Теорема 6. *Если K — нормальное кольцо, то оценка $[\![\cdot]\!]_{B(K)}$ — нормальная. Если K — пучковое кольцо, то та же оценка — нормальная и пучковая, а потому и достижимая.*

Доказательство. Если K нормально, то $\bigcup \{e \mid e\cdot k = 0\} = e_0$, где e_0 из условия нормальности для k. Тогда $[\![k = 0]\!]_B = [\![k = 0]\!]_{\mathcal{T}} = e_0$ и $[\![k = 0]\!]_B = 1$ означает, что $e_0 = 1$. Отсюда по лемме 1 получим $k = 0$. Проверим пучковость оценки. Пусть $b = \bigvee\limits_\alpha b_\alpha$ и $b_\alpha \wedge b_\beta \leqslant [\![k_\alpha = k_\beta]\!]_{B(K)}$. Обозначим $b_\alpha = \bigcup\limits_\gamma e_{\alpha\gamma}$, где $e_{\alpha\gamma} \in B(K)$. Тогда $e_{\alpha\gamma_1} \wedge e_{\beta\gamma_2} \leqslant [\![k_\alpha = k_\beta]\!]_{B(K)}$, по нормальности кольца $[\![k_\alpha = k_\beta]\!]_{B(K)} = [\![k_\alpha = k_\beta]\!]_{\mathcal{T}(K)}$ и по лемме 1 $e_{\alpha\gamma_1}\cdot e_{\beta\gamma_2}\cdot k_\alpha = e_{\alpha\gamma_1}\cdot e_{\beta\gamma_2}\cdot k_\beta$. Добавим к семейству $\{e_{\alpha\gamma}\}$ все e_δ, где $\neg b = \bigcup\limits_\delta e_\delta$, $e_\delta \in B(K)$, и соответственно к семейству $\{k_\alpha\}$ любой фиксированный элемент из K. По условию пучковости кольца K получим такое k, что $e_{\alpha\gamma} \leqslant [\![k = k_\alpha]\!]_{\mathcal{T}(K)} \leqslant [\![k = k_\alpha]\!]_{B(K)}$. Поэтому $b_\alpha \leqslant [\![k = k_\alpha]\!]_{B(K)}$. Теперь применим теорему 1а).

Пример 3. Пусть $\mathcal{X}$ — левый модуль над кольцом K (кольцо такое, как в примере 2). Язык модулей состоит из двух сортов переменных k (по K) и x (по $\mathscr{X}$), атомарных символов языка колец и еще символа $\cdot \underset{1}{=} \cdot$ (для элементов из $\mathscr{X}$) символов $+$, $-$, 0 (для операций в $\mathscr{X}$) и функционального символа $k \cdot x$, а также обычных связок для переменных обоих сортов. Определение оценки в примере 2 дополняется новым пунктом $[\![x = y]\!] = \bigvee \{e \in B\ (K) \mid e \cdot x = e \cdot y\}$, где $\bigvee$ берется соответственно в $\mathscr{T}\ (K)$ или $\mathbb{B}\,(K)$. Эти оценки назовем соответственно $\mathscr{T}$ - и $\mathbb{B}$-*оценками* в языке модулей.

Нормальным называется модуль над нормальным кольцом, для которого $\forall x \exists e_0 \forall\ e\ (e \cdot x = 0 \Leftrightarrow e \leqslant e_0)$. Точно, как в примере 2, определяется *пучковый модуль*.

Теорема 7. а) *Оценка* $[\![\cdot]\!]_{\mathscr{T}(K)}$ *в языке модулей — нормальная и пучковая, а потому и достижимая.*

б) *Если модуль* $\mathscr{X}$ *— нормальный, то оценка* $[\![\cdot]\!]_{B(K)}$ *в языке модулей — нормальная.* Если $\mathscr{X}$ *— пучковый модуль, то оценка* $[\![\cdot]\!]_{B(K)}$ *— нормальная и пучковая, а потому и достижимая.*

Доказательство аналогично случаю колец.

Предложение 1. *Для нормального кольца (модуля) K и формулы φ в языке колец, не содержащей в посылках всех импликаций связки $\exists$ и связки $\forall$ в области действия связки $\bigvee$, выполняется* $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{T}(K)} \leqslant [\![\varphi]\!]_{B(K)}$. *Для пучкового кольца (модуля) K и любой формулы φ в предваренной форме выполняется* $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{T}(K)} = [\![\varphi]\!]_{B(K)}$. (*Отсюда соответствующие отношения между глобальными истинностями*).

Пример 4. Одним из первых примеров оценки является функция, сопоставляющая каждой формуле соответствующий ей элемент алгебры Линденбаума — Тарского. Однако такая оценка существенно иначе «устроена», чем оценки из примеров 1—2 (см. [17, с. 291]).

Пример 5. Модальные связки интерпретируются с помощью соответствующего оценивания. При этом модальные логики хорошо описываются с помощью общезначимости в подходящих классах предпучков и пучков (которые определяются в п. I.7, т. е. с помощью соответствующего оценивания. Эти классы могут содержательно описываться, в частности, в терминах гомологий пучков. Возможны содержательные примеры оценивания со значениями в более общих решетках, таких, как полудистрибутивные и дедекиндовы; в том числе в связи с квантовой логикой. Конструктивизируя алгебру Ω, можно алгоритмически вычислять оценку (при некоторых предположениях) за время порядка логарифма от числа элементов в этой алгебре.

I.4. Связь выводимости и глобальной истинности. Как определялось в п. I.1, Φ_+ — это множество всех замкнутых с параметрами из D формул φ, для которых $\Omega \models \varphi$ (для фиксированного языка $Я$, семейства параметров D, полной гейтинговой алгебры Ω и оценки $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D}$). Как фактически находить это множество? Прямое вычисление оценки иногда реально, но может быть и сложным делом. Обычно заранее известен список T (конечный или бесконечный) формул («аксиом»), которые принадлежат Φ_+. Полезно найти такое понятие вывода $\underset{\Omega}{\vdash}$ (зависящее от оценки), что $(T \underset{\Omega}{\vdash} \varphi) \Rightarrow (\Omega \models \varphi)$. В некоторых случаях выполняется $(T \underset{\Omega}{\vdash} \varphi) \Leftrightarrow (\Omega \models \varphi)$ и даже с такими T и $\underset{\Omega}{\vdash}$, что множество всех выводимых формул рекурсивно аксиоматизируемо. Например, так будет в случае, когда $\Omega = [0;\ 1]^k$. В этой связи нам потребуются дальше некоторые (самые традиционные) аксиоматики и понятие вывода.

Аксиоматика теории множеств ZFC, состоящая из аксиом ZF и еще аксиомы выбора AC, хорошо известна (см. [2]). Рассматривая ее вместе с аксиомами и правилами вывода классического исчисления предикатов в языке ZF, получим теорию ZFC, вывод в которой будем записывать $ZFC \vdash$. Теория ZF получается из теории ZFC удалением аксиомы AC. Вывод в классическом исчислении предикатов будем записывать $\vdash$.

Интуиционистское исчисление предикатов получается из классического исчисления предикатов опусканием «закона исключенного третьего» — аксиомы $\varphi \vee \neg\varphi$ (и эквивалентной ей аксиомы $\neg\neg\varphi \Rightarrow \varphi$), вывод в этом исчислении будем обозначать $\underset{H}{\vdash}$. Соединяя это исчисление в языке ZF с аксиомами теории ZF, ровно одна из которых переформулируется классически эквивалентным образом, получаем интуиционистскую теорию множеств HZF^-. Упомянутые аксиомы ZF — это аксиомы равенства (для $\cdot \in \cdot$ и $\cdot = \cdot$ —, впрочем, они вытекают из остальных аксиом), объемности, пары, объединения, степени, $\in$-индукции (вместо классически эквивалентной ей аксиомы фундирования): $\forall x\, (\forall y \in x\varphi\,(y) \Rightarrow \varphi\,(x) \Rightarrow \forall x\varphi\,(x))$, выделения, подстановки: $\forall x \in u\exists! y\varphi\,(x,\, y) \Rightarrow \exists v\, \forall x \in u\exists y \in v\varphi\,(x,\, y)$, бесконечности. Если аксиому подстановки в теории HZF^- заменить на более сильную аксиому «собирания»: $\forall x \in u\exists y\varphi\,(x,\, y) \Rightarrow \exists v \forall x \in u\exists\, y \in v\varphi\,(x,\, y)$, то получится теория, обозначаемая HZF. Конечно, $ZF \vdash HZF$. В некоторых случаях теорию HZF еще усиливают, добавляя, как аксиому, лемму Цорна ZL и аксиому HAC (в ZF аксиома ZL эквивалентна HAC, которая эквивалентна аксиоме AC): $\forall x \in u\exists y\, (y \in x) \wedge \forall x,\, y \in u\, (x = y \vee \neg\, (x = y)) \Rightarrow \exists f\colon u \to \bigcup u\, (\forall x \in u\, (f\,(x) \in x))$. Интересно, что в теории $HZF^+ \leftrightharpoons (HZF + ZL + HAC)$ еще не выводим закон исключенного третьего, так что эта теория в известной степени также интуиционистская. Для теории HZF^- выполняются свойства дизъюнктности и экзистенциональности, что подтверждает ее интуиционистский статус (см., например, [9, 10]).

Т е о р е м а 8. а) *Если $ZFC \vdash \varphi$, то для любой полной булевой алгебры $\mathbb{B}$ выполняется $\mathbb{B} \models \varphi$ (здесь подразумевается оценка в языке ZF; определение см. в примере 1).*

б) *Если $HZF \vdash \varphi$, то для любой полной гейтинговой алгебры Ω выполняется $\Omega \models \varphi$ (здесь подразумевается та же оценка в языке ZF).*

в) *Для любой оценки $[\![\cdot]\!]_B$ со значениями в полной булевой алгебре $\mathbb{B}$, если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \vdash \psi$, то $[\![\varphi_1]\!]_B \wedge \ldots \wedge [\![\varphi_n]\!]_B \leqslant [\![\psi]\!]_B$, отсюда $(B \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \Rightarrow (\mathbb{B} \models \psi)$, где $n \geqslant 0$.*

г) *Для любой оценки $[\![\cdot]\!]_\Omega$ со значениями в полной гейтинговой алгебре Ω, если $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \underset{H}{\vdash} \psi$, то $[\![\varphi_1]\!]_\Omega \wedge \ldots \wedge [\![\varphi_n]\!]_\Omega \leqslant [\![\psi]\!]_\Omega$, отсюда $(\Omega \models \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \Rightarrow (\Omega \models \psi)$, где $n \geqslant 0$.*

д) *Пусть $\Omega_1 = \mathcal{T}\,(X_1)$, где X_1 — бэровское пространство (т. е. $X_1 = \omega^\omega$ и ω — натуральный ряд). Если для любой пучковой оценки $[\![\cdot]\!]_{\Omega_1}$ выполняется $\Omega_1 \models \varphi$, то $\underset{H}{\vdash} \varphi$ («теорема полноты для интуиционистского исчисления предикатов в языке ZF»).*

Таким образом, традиционные классическое и интуиционистское исчисления предикатов, как и аксиоматика теории множеств, тесно связаны с с оценками. Аналогичная ситуация с модальными логиками.

С неклассическими логиками и, в частности, с интуиционистской логикой, по-видимому, тесно связаны две (взаимозависимые) задачи: во-первых, развитие в рамках данной логики обычной математики (алгебры, топологии, анализа и т. д.) и, во-вторых, подыскание для данной логики синтаксического перевода формул $\varphi \mapsto \varphi'$, при котором выводимость (или истинность) формулы φ в теории с классической логикой влечет выводимость (соответственно истинность) формулы φ' в аналогичной теории с этой неклассической логикой, а смысл суждений φ и φ' близок. Например, знаменитый колмогоровский (геделевский негативный) перевод $\varphi \mapsto \varphi^-$ состоит в том, что φ^- получается из φ добавлением $\neg\neg$ перед атомарными формулами и перед связками $\vee$, $\exists$. Тогда $\vdash \varphi$ влечет $\underset{H}{\vdash} \varphi^-$. Геделевский негативный перевод, решая, например, вопрос о равнонепротиворечивости теорий соответственно с классической и интуиционистской логиками, по-видимому, мало что дает с точки зрения развития интуиционистской математики. Дело в том, что теоремы φ, например, теории Галуа мало что значат в форме φ^-. Фундаментальный результат П. С. Новикова [5, с. 127] дает другой пример. Если в кольце целых чисел $\mathbb{Z}$ (классически) истинна формула $\varkappa \rightleftharpoons \forall x \exists y \varphi(x, y)$ (где $\varphi(x, y)$ задает разрешимый предикат), то в том же кольце интуиционистски истинна формула $\varkappa$. При этом интуиционистская истинность определяется, в сущности, содержательно, без аксиоматизации. Интуиционистскую логику связывают с представлением об «эффективности»: если интуиционистски истинно $\exists y \varphi'(y)$ или $\forall x \exists y \varphi'(x, y)$, то считается, что можно эффективно предъявить такое y, что $\varphi'(y)$, или такую функцию $f(x)$, что $\forall x (\varphi'(x, f(x)))$ (в виде терма или иным явным образом). Отсюда понятно значение результатов типа: если в кольце K классически истинно $\exists y \varphi(y)$ или $\forall x \exists y \varphi(x, y)$, то в этом кольце интуиционистски истинно $\exists y \varphi'(y)$ или $\forall x \exists y \varphi'(x, y)$, где φ' близко по смыслу к φ и не содержит «внесмысловых» связок типа $\neg\neg$. В случае результата П. С. Новикова $K = \mathbb{Z}$ и $\varphi' = \varphi$. В гл. III мы рассмотрим гипотезу П. С. Новикова (высказанную в той же работе) о том, что его результат верен «при очень широких условиях»; см. также определение на с. 121.

1.5. Связь истинности и глобальной истинности. Будут полезны некоторые классы формул. Формулу назовем в «*слабо E-нормальной форме*», если в ней каждая импликация не содержит в посылке *связки* $\exists$ *и связки* $\forall$ *в области действия связки* $\bigvee$. «*Слабо A-нормальная форма*» получается, *если в посылках импликаций нет* $\forall$ и $\Rightarrow$. Формулу назовем в «*нормальной форме*», если в ней каждая импликация в посылке и заключении содержит только связки $\bigwedge$, $\bigvee$. Напомним, что $\neg\varphi$ понимается как $\varphi \Rightarrow \bot$.

Позитивными называются формулы, не содержащие связки $\Rightarrow$ (и, разумеется, связки $\neg$).

Хорновой называется формула, полученная навешиванием связок $\forall$, $\exists$, $\bigwedge$ на формулы вида $\varphi_1 \bigwedge \ldots \bigwedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$, где $n \geqslant 0$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \varphi$ — атомарные формулы (включая $\top$, $\bot$). Этот класс можно наглядно записать в виде $\forall$, $\exists$, $\bigwedge [\varphi_1 \bigwedge \ldots \bigwedge \varphi_n \Rightarrow \varphi]$. Последнее обозначение удобно и в других случаях; поэтому обозначим $Q_1, \ldots, Q_k [\chi_1, \ldots, \chi_m]$ — класс формул, полученных применением в произвольном порядке и числе связок $Q_1, \ldots, Q_k$ к формулам («блокам») вида $\chi_1, \ldots, \chi_m$.

Почти позитивной назовем любую формулу вида $\exists, \forall, \bigwedge, \bigvee [\forall \bar{t} (\varphi(\bar{t}) \Rightarrow \psi(\bar{t}))]$, где φ — любая хорнова формула, а ψ — любая позитивная или почти позитивная формула. Переменные $\bar{t}$ назовем *блоковыми*, а φ — *посылкой блока*. Заметим, что φ может содержать кроме $\bar{t}$ и другие блоковые переменные. Например, в формуле $\zeta \rightleftharpoons \forall w (\exists k (w \leqslant k) \Rightarrow \exists t (w \leqslant t \bigwedge \forall s (w \leqslant s \Rightarrow t \leqslant s))$ (важная формула, выражающая условную полноту решетки, в ней w — произвольное подмножество, а k, t, s — произвольные элементы решетки) обе переменные w и s в $\varphi \rightleftharpoons (w \leqslant s)$ блоковые.

Ранг почти позитивной формулы определим по индукции. Почти позитивная формула, все блоки которой имеют в заключениях позитивные формулы, ранга 0. Почти позитивная формула, все блоки которой имеют в заключениях почти позитивные формулы ранга до $(n - 1)$ включительно, ранга n.

Фиксируем произвольную оценку $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D}$, а также почти позитивное предложение $\varkappa \rightleftharpoons \varkappa(k_1, \ldots, k_n)$ с параметрами из D. Определим вспомогательный предикат $P[\cdot]$ для почти позитивной формулы $\varkappa$. Если $\varkappa$ — позитивная, то $P[\varkappa] \rightleftharpoons T$. Если $\varkappa$ — блок вида $\forall \bar{t} (\varphi(\bar{t}) \Rightarrow \psi(\bar{t}))$, то $P[\varkappa] \rightleftharpoons \exists \bar{t}_0 \in D ([\![\varphi(\bar{t}_0)]\!] = 1) \bigwedge \forall \bar{t} \in D (D \models \varphi(\bar{t}) \Rightarrow P[\psi(t)]$; далее, $P[\exists x \varphi] \rightleftharpoons \exists k \in D (D \models \varphi(k) \bigwedge P[\varphi(k)])$, $P[\forall x \varphi] \rightleftharpoons \forall k \in D (P[\varphi(k)])$, $P[\varphi \bigwedge \psi] \rightleftharpoons P[\varphi] \bigwedge P[\psi]$, $P[\varphi \bigvee \psi] \rightleftharpoons (P[\varphi] \bigwedge D \models \varphi) \bigvee (P[\psi] \bigwedge D \models \psi)$. Предложение $\varkappa$ назовем *разрешимым*, если $D \models \varkappa$ влечет $P[\varkappa]$. Например, предложение ζ ранга 1 и разрешимо, так как можно выбрать $w \rightleftharpoons \varnothing$, а k из условия $D \models \exists k\,(w \leqslant k)$. Здесь подразумевается оценка, у которой $[\![w \leqslant k]\!] \leftrightharpoons [\![\forall x \in w\,(x \leqslant k)]\!]$.

Выбор термина «разрешимая» можно пояснить так: если в языке колец почти позитивная формула $\varkappa$ имеет вид $\varkappa = \forall \bar t\,(\varphi(\bar t) \Rightarrow \psi(\bar t))$, где $\varphi(\bar t) = p_1(\bar t) = 0 \wedge \ldots \wedge p_m(\bar t) = 0$ и $p_1, \ldots, p_m$ — многочлены, а ψ разрешимая, то разрешимость $\varkappa$ (для нормальной оценки $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D}$) эквивалентна разрешимости в D системы уравнений $p_1 = 0, \ldots, p_m = 0$. Можно привести разные, в том числе синтаксические, критерии разрешимости почти позитивных формул.

Теорема 9. *Пусть оценка* $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D}$ *нормальна по всем атомарным формулам и достижима. Формулы содержат параметры из* D.

а) *Для любой хорновой формулы* φ *из* $\Omega \models \varphi$ *вытекает* $D \models \varphi$.

б) *Для любой позитивной формулы* ψ *из* $D \models \psi$ *вытекает* $\Omega \models \psi$.

в) *Пусть, кроме того, оценка* $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D}$ *— слабо пучковая, а* Ω *— нульмерная. Для любой почти позитивной разрешимой формулы* $\varkappa$ *из* $D \models \varkappa$ *вытекает* $\Omega \models \varkappa$.

Доказательство. а) Для атомарной формулы φ в силу нормальности оценки $(D \models \varphi) \Leftrightarrow [\![\varphi]\!] = 1$. Для формулы $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n \Rightarrow \varphi$, если ее оценка 1, то $[\![\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n]\!] \leqslant [\![\varphi]\!]$. Если $[\![\varphi_i]\!] < 1$ для какого-то i, $1 \leqslant i \leqslant n$, то $D \not\models \varphi_i$, и все доказано. Иначе $[\![\varphi]\!] = 1$, и все доказано. Если $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = 1$ или $[\![\forall x \varphi]\!] = 1$, то по индукции. Если $[\![\exists x \varphi]\!] = 1$, то по достижимости $[\![\varphi(k)]\!] = 1$, где $k \in D$, и по индукции.

б) Для атомарной формулы так же. Далее по индукции.

в) Пусть почти позитивная, разрешимая формула $\varkappa$ с параметрами из D ранга n истинна в D. По условию разрешимости получим $P[\varkappa]$. Индукцией по строению $\varkappa$, начиная с ее блоков, покажем: если $D \models \varkappa(\bar k)$ и $P[\varkappa(\bar k)]$, то $[\![\varkappa(\bar k)]\!] = 1$. Если $\varkappa$ — блок, то оценку вычисляем только по таким $\bar t$, что $[\![\varphi(\bar t)]\!] = 1$, отсюда $D \models \psi(\bar t, \bar k)$, а также $P[\psi(\bar t)]$, где ψ — почти позитивная формула ранга $\leqslant n - 1$. Для ψ действуем индукцией по рангу, откуда $[\![\psi]\!] = 1$. Если $\varkappa \leftrightharpoons \exists x \varphi$, то $D \models \varphi(k_0, \bar k)$ и $P[\varphi(k_0, \bar k)]$, т. е. можно применить индуктивный шаг. Если $\varkappa \leftrightharpoons \forall x \varphi$, то $D \models \varphi(k_0, \bar k)$ и $P[\varphi(k_0, \bar k)]$ для любого $k_0 \in D$. Если $\varkappa \leftrightharpoons \varphi \wedge \psi$ или $\varkappa \leftrightharpoons \varphi \vee \psi$, то (второй случай) $D \models \varphi$ и $P[\varphi]$. $\square$

Пусть полные гейтинговы алгебры Ω_1 и Ω_2 вложены в некоторую решетку H и H является гейтинговой алгеброй, но не предполагается, что вложение сохраняет операцию $\to$; вместо этого предположим, что $u \underset{\Omega_1}{\to} v \leqslant u \to v \leqslant u \underset{\Omega_2}{\to} v$, где $\to$ импликация в H. Если $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ или $\Omega_2 \subseteq \Omega_1$, то в качестве H берем здесь соответственно Ω_2 или Ω_1. Будем писать $\Omega_1 \leqslant \Omega_2$, если $\forall \alpha\,(u_\alpha \leqslant v_\alpha)$ влечет $\bigvee\limits_\alpha {}_{\Omega_1} u_\alpha \leqslant \bigvee\limits_\alpha {}_{\Omega_2} v_\alpha$ и $\bigwedge\limits_\alpha {}_{\Omega_1} u_\alpha \leqslant \bigwedge\limits_\alpha {}_{\Omega_2} v_\alpha$. Будем писать $\Omega_1 \lesseqqgtr \Omega_2$, если $\Omega_1 \leqslant \Omega_2$ с той заменой, что $u \vee_{\Omega_1} v \leqslant u \vee_{\Omega_2} v$ (т. е. $\leqslant$ вместо $=$) и $u \underset{\Omega_1}{\to} v = u \underset{\Omega_2}{\to} v$ (т. е. $=$ вместо $\leqslant$). Например, для любого кольца K выполняется $\mathbb{B}(K) \subseteq \mathscr{T}(K)$ и $\mathscr{T}(K) \lesseqqgtr \mathbb{B}(K)$, а кроме того, выполняется $\bigwedge_{\mathscr{T}} u_\alpha = \bigwedge_B u_\alpha$. Второй важный пример: для любой полной гейтинговой алгебры Ω выполняется $\Omega \subseteq \mathbb{B}(\Omega)$, $\Omega \leqslant \mathbb{B}(\Omega)$, а кроме того, $\bigvee_\Omega u_\alpha = \bigvee_{B(\Omega)} u_\alpha$, где $\mathbb{B}(\Omega)$ была определена в конце п. I.2. Эти свойства легко вытекают из определений соответствующих алгебр.

Теорема 10. а) *Пусть* $\Omega_1 \leqslant \Omega_2$, $[\![\cdot]\!]_{\Omega_1, D_1}$, $[\![\cdot]\!]_{\Omega_2, D_2}$ *— две оценки, совпадающие на атомарных формулах, а формула* φ *с параметрами из* $D_1 \cap D_2$ *и в ней каждая импликация содержит в посылке только связки* $\vee$, $\wedge$. *Тогда* $[\![\varphi]\!]_{\Omega_1, D_1} \leqslant [\![\varphi]\!]_{\Omega_2, D_2}$. б) *Пусть формула* φ *— в языке колец с параметрами из кольца* K. *Если* K *— нормальное кольцо, а* φ *— в слабо* E*-нормальной форме, то* $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{T}(K)} \leqslant [\![\varphi]\!]_{B(K)}$.

Пункт б) этой теоремы близок к предложению 1.

1.6. Сокращение идемпотентов и теоремы переноса в случае колец. Выразимость глобальной истинности. Кольцо K называется «*без идемпотентов*», если в нем выполняется свойство $\Phi_4 = \forall e\,(e^2 = e \Rightarrow e = 0 \vee e = 1)$, и «*неразложимым*», если в нем выполняется свойство $\Phi_5 = \forall e \exists t\,(e^2 = e \wedge e\cdot t = t\cdot e \Rightarrow e = 0 \vee e = 1)$; также обозначим $\Phi_5' = \forall e\,((e^2 = e \wedge \forall t\,(e\cdot t = t\cdot e)) \Rightarrow e = 0 \vee e = 1)$. Классически (но не интуиционистски) Φ_5 и Φ_5' эквивалентны.

Теорема 11. а) *Для любого кольца K и $\mathcal{T}(K)$-оценки в языке колец глобально истинно свойство Φ_5'. Если K — нормальное, то для $\mathbb{B}(K)$-оценки глобально истинно свойство Φ_5 (и Φ_5').*

б) *Пусть T — произвольный набор почти позитивных, разрешимых предложений в языке колец с параметрами из кольца K и $K \models T$. Если $T, \Phi_5' \underset{H}{\vdash} \varphi$, то $\mathcal{T}(K) \models \varphi$. Если K пучковое и $T, \Phi_5 \vdash \varphi$, то $\mathbb{B}(K) \models \varphi$.*

Замечание. Эта теорема объясняет, чем полезен переход к глобальной истинности: все идемпотенты сокращаются и этим можно пользоваться, так как глобальная истинность переходит в обычную истинность (см., в частности, теорему 12).

Пусть $\varphi \mapsto \varphi'$ — следующий перевод формул в языке колец с параметрами из K. Если $\varphi\,(k_1, \ldots, k_n)$ — любая формула в предваренной дизъюнктивной форме и $e \in B\,(K)$, то $\varphi'\,(k_1, \ldots, k_n, e)$ получается из φ переносом кванторной приставки, имеющейся в φ, а затем приписыванием

$$\exists \bar{e}_s \forall t\, \forall e_0 \exists t_0 [e_1^2 = e_1 \wedge e_1\cdot t = t\cdot e_1 \wedge \ldots \wedge \prod_s (1 - e_s) \leqslant$$
$$\leqslant (1-e) \wedge e_1\cdot k_1 = e_1\cdot t_1 \wedge \ldots \wedge (e_0^2 = e_0 \wedge e_0\cdot t_0 = t_0\cdot e_0 \wedge e_0\cdot k_2 =$$
$$= e_0\cdot t_2 \Rightarrow e_0 \leqslant 1 - e_1) \wedge \ldots],$$

где индекс s пробегает число дизъюнктивных членов в φ, $k_1 = t_1$ — первое равенство, а $k_2 \neq t_2$ — первое неравенство в первом дизъюнктивном члене в φ. Заметим, что φ' всегда хорнова формула.

Теорема 12. *Пусть φ в дизъюнктивной нормальной форме.*

а) *Для любого булева элемента $e \in B\,(K)$ выполняется*

$$([\![\varphi\,(\bar{l})]\!]_{\mathcal{T}(K)} \geqslant e) \Leftrightarrow (K \models \varphi'\,(l,\ e)).$$

б) *Для любого пучкового кольца K и $e \in B\,(K)$ выполняется*

$$([\![\varphi\,(\bar{l})]\!]_{B(K)} \geqslant e) \Leftrightarrow (K \models \varphi'\,(l,\ e)).$$

Аналогично определяется перевод $\varphi'\,(l) \mapsto \varphi''\,(l, e)$ для формул φ в конъюнктивной нормальной форме. А именно, для бескванторной φ положим $\varphi'' = \exists e_1, \ldots, e_r \forall t\ \ \forall e_0\ \ \exists t_0\,[e_1^2 = e_1 \wedge e_1\cdot t = t\cdot e_1 \wedge \ldots \wedge \prod_s (1 - e_s) \leqslant \leqslant 1 - e \wedge \ldots \wedge e_1\cdot k_1 = e_1\cdot t_1 \wedge \ldots \wedge (e_0^2 = e_0 \wedge e_0\cdot t_0 = t_0\cdot e_0 \wedge e_0\cdot k_2 = = e_0\cdot t_2 \Rightarrow e_0 \leqslant 1 - e_1) \wedge \ldots]$, где s пробегает число сомножителей. r — суммарное число дизъюнктивных членов, а кванторная приставка переносится, как и раньше.

Такой перевод аналогично определяется и для других форм представления формулы φ.

Вместо $\varphi'\,(\bar{k}, 1)$ и $\varphi''\,(\bar{k}, 1)$ будем писать $\varphi'\,(\bar{k})$ и $\varphi''\,(\bar{k})$.

Теорема 12в). *Пусть φ в конъюнктивной нормальной форме. Эквивалентности в п. а) и б) теоремы 12 можно заменить на эквивалентности вида $([\![\varphi\,(\bar{k})]\!] \geqslant e) \Leftrightarrow (K \models \varphi''\,(\bar{k},\ e))$.*

Замечание. В теоремах 11, 12 и в следующем следствии вместо пучковости кольца достаточно нормальности кольца и достижимости оценки.

С л е д с т в и е 1. *Любое множество предложений (в соответствующем языке, расширяющем исходный язык колец) вида* $\mathscr{T}(K) \models \varphi$ *(«глобально истинно* φ*»), где* φ *пробегает множество предложений в языке колец с параметрами из* K *эквивалентно в классе всех колец хорновой теории* T *в языке колец с тем же запасом параметров из* K, *а именно теории* $T' = \{\varphi' \mid \varphi \in T\}$; *вместо* T' *годится и* $T'' = \{\varphi'' \mid \varphi \in T\}$ *(здесь предполагается соответственно, что* T *в дизъюнктивной или конъюнктивной нормальной форме). Если глобальная истинность понимается в смысле* $\mathbb{B}(K)$*-оценки, то такое же утверждение верно в классе всех пучковых колец.*

Класс K колец назовем *внутренне аксиоматизируемым*, если существует такая теория T (в языке колец), что $K \in \mathscr{K} \Leftrightarrow [\![T]\!] = 1$. Следствие 1 говорит, что «внутренняя» аксиоматизируемость в ряде случаев совпадает с «внешней» (т. е. обычной) аксиоматизируемостью. Аналогичные утверждения верны и для некоторых других структур и соответствующих им оценок. Другой вид аксиоматизируемости — локальная аксиоматизируемость — рассматривается в гл. II. Отметим, что внутренняя аксиоматизируемость «проще», например, в том смысле, что теория T формулируется в классе неразложимых колец.

С л е д с т в и е 2. *Если* φ *— хорнова формула в языке колец с параметрами из произвольного кольца* K, *то из* $(K \models \varphi''(\bar{k}))$ *или* $(K \models \varphi'(\bar{k}))$ *вытекает* $K \models \varphi(\bar{k})$.

Т е о р е м а 13. *В условиях теоремы 11б) выполняется* $K \models \varphi' \wedge \varphi''$ *(если* φ *— хорново, то и* $K \models \varphi$*).*

П р и м е р 6. По теореме 11б) K-пространство и $L\mathbb{R}$-алгебра (т. е. алгебра измеримых $\mathbb{R}$-значных функций) для соответствующих оценок описываются как поле $\mathbb{R}$. Теорема 13 дает перенос соответствующих свойств упорядоченного поля $\mathbb{R}$ на K-пространство и $L\mathbb{R}$-алгебру. (Описание K-пространств как поля $\mathbb{R}$ дано Е. И. Гордоном в 1977 г., связь $L\mathbb{R}$-алгебр и вещественно замкнутых полей была обнаружена Д. Скотт в 1969 г.)

Классы колец, упоминаемые в следующей теореме, определяются, например, в [3, с. 389]. Теорема 14 позволяет применять теорему 11б) (и, следовательно, теорему 13), добавив в теорему 11б) перед знаком выводимости $\vdash$ свойство i') в том случае, когда кольцо K обладает свойством i), где число i принимает значения 1, 2, 3, 4. Отметим, что i') сильное по сравнению с i) свойство. Это продолжает замечание на с. 115.

Т е о р е м а 14. *Для кольца* K *1) строго бириккартова, 2) бирегулярного, 3) абелева регулярного, 4) строго риккартова* $\mathscr{T}(K)$ *— глобально истинны соответственно следующие свойства: 1') первичное, 2') квазипростое, 3') тело, 4') без делителей нуля.*

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы содержится в [3].

1.7. Универсальная оценка. Понятие пучка на гейтинговой алгебре. Одно из важных достоинств языка теории множеств ZF, а также самой теории множеств ZFC состоит в том, что почти все обычные математические языки интерпретируются в языке ZF, а соответствующие теории сводятся к теории ZFC и часто даже к более слабой теории ZF. Второе важное достоинство языка и теории ZF состоит в том, что, работая в рамках этой теории, можно использовать в рассуждениях такие не выразимые в языке колец понятия, как идеал, семейства идеалов, кольца $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$ и т. д.

Поэтому представляет интерес сведение оценки $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D}$ в каком-то специфическом языке *Я* со специфическим семейством параметров D^{Ω} к оценке в языке ZF (с раз и навсегда фиксированным семейством параметров Ω). Такое сведение возможно (см. теорему 16) и в этом смысле оценку в языке ZF (определенную в примере 1) иногда называют *универсальной оценкой*. Конечно, это не означает, что другие оценки, отличные от оценки в языке ZF, не нужны.

Для работы с произвольными оценками удобны понятия предпучка и пучка на гейтинговой алгебре, которые мы сейчас напомним. По-видимому, они связаны с именами Лере, Гротендика, Ловера, Тирни (см. [1]).

Любое частично упорядоченное множество, в частности гейтингову алгебру H, можно рассматривать как тривиальную категорию: множество объектов — само H, а множество морфизмов $\mathrm{Hom}(u, v)$, где $u, v \in H$, состоит из одного элемента, если $u \leqslant v$, и пусто, если $u \nleqslant v$. Контравариантный функтор $\mathcal{F}(\cdot)$ из H в любую категорию называется *предпучком*. Для определенности будем рассматривать предпучки со значениями в категории множеств, т. е., по существу, со значениями в классе всех множеств V. По определению множества $\mathcal{F}(u)$ и $\mathcal{F}(v)$, где $u \neq v$, дизъюнктны. Пусть H относительно операций $\wedge$, $\vee$, 0, 1 (но не обязательно относительно операции $\to$) вложено в некоторую полную гейтингову алгебру Ω. Тогда Ω индуцирует в H предикат $u = \bigvee\limits_{\alpha}{}_{\Omega} u_\alpha$, где $u \in H$, $\{u_\alpha\} \subseteq H$. Предпучок $\mathcal{F}(\cdot)$ на H называется *пучком* (относительно данной Ω), если $\forall u \in H \forall \{u_\alpha\} \subseteq H \forall \{k_\alpha\}$ $\exists!\, k \in \mathcal{F}(u)\,(u = \bigvee\limits_{\alpha}{}_{\Omega} u_\alpha \wedge \forall \alpha\,(k_\alpha \in \mathcal{F}(u_\alpha)) \wedge \forall \alpha, \beta\ (\rho^{u_\alpha}_{u_\alpha \wedge u_\beta}(k_\alpha) = \rho^{u_\beta}_{u_\alpha \wedge u_\beta}(k_\beta) \Rightarrow \forall \alpha\,(\rho^{u}_{u_\alpha}(k) = k_\alpha)$, где ρ^u_v — морфизм, соответствующий тому обстоятельству, что $v \leqslant u$.

Предпучок $\mathcal{F}(\cdot)$ на H называется *нормальным* (*отделимым*), если в предыдущем свойстве вместо $\exists!\,k$ оставить только требование единственности такого k.

Нетрудно доказать, что пучок канонически продолжается с H на Ω, оставаясь пучком (с помощью обратных пределов). Если H — полная гейтингова алгебра, то в качестве Ω берется (если явно не указывается иное) сама H.

Если $\mathcal{F}(\cdot)$ — предпучок на Ω, то положим $\mathcal{F} = \bigcup\{\mathcal{F}(u) \mid u \in \Omega\}$ и положим Ek равным тому единственному u из Ω, что $k \in \mathcal{F}(u)$. Отметим E: $\mathcal{F} \to \Omega$. На $\mathcal{F}$ определим операцию $k \restriction u = \rho^{Ek}_{Ek \wedge u}(k)$. Вместо $\mathcal{F}(1)$ можно писать $\mathcal{F}_1$. Элементы множества $\mathcal{F}(1) = \mathcal{F}_1$ называются *глобальными*. Конечно, $\rho^1_u(k) = k \restriction u$ для глобального k.

Пример 7. Оценка, связанная с предпучком. Стратифицированная оценка. Для любого предпучка $\mathcal{F}(\cdot)$ на Ω выберем в качестве множества параметров $\mathcal{F}(1) = \mathcal{F}_1$ и положим $[\![k = t]\!]_{\mathcal{F}_1} = \bigvee\{u \in \Omega \mid k \restriction u = t \restriction u\}$, где $k, t \in \mathcal{F}_1$, т. е. $[\![k = t]\!]_{\mathcal{F}_1} = \bigvee\{u \in \Omega \mid \rho^1_u(k) = \rho^1_u(t)\}$.

Если рассматриваемый язык содержит (кроме $\cdot = \cdot$) атомарную формулу φ_0 (например, арности 2), то в соответствии с общим определением оценки должна быть задана функция вида $[\![\varphi_0(\cdot, \cdot)]\!]_{\mathcal{F}_1}$: $\mathcal{F}_1^2 \to \Omega$, согласованная с $[\![\cdot = \cdot]\!]_{\mathcal{F}_1}$, иными словами — экстенсиональная функция для оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}_1}$. Аналогично интерпретируются функциональные символы: $[\![f(\cdot, \ldots, \cdot) = \cdot]\!]_{\mathcal{F}_1}$: $\mathcal{F}_1^{n+1} \to \Omega$. А именно (например, для двуместного функционального символа f), должна быть задана функция f: $\mathcal{F}_1^3 \to \Omega$, обладающая свойством $\forall k, k_1, t, t_1, y, y_1\ (f(k, t, y) \wedge f(k_1, t_1, y_1) \wedge [\![k = k_1]\!]_{\mathcal{F}_1} \wedge [\![t = t_1]\!]_{\mathcal{F}_1} \leqslant [\![y = y_1]\!]_{\mathcal{F}_1})$ и $\bigvee\limits_{y \in \mathcal{F}_1} f(k, t, y) = 1$, $\forall k, t \in \mathcal{F}_1$. Структура предпучка может быть использована для получения интерпретации атомарных формул и функциональных символов. А именно, если на каждом $\mathcal{F}(u)$ определен предикат $P_u(\cdot, \cdot)$, согласованный со «структурой предпучка» (т. е. $((v \leqslant u) \wedge P_u(k \restriction u, t \restriction u)) \Rightarrow P_v(k \restriction v, t \restriction v)$, где $k, t \in \mathcal{F}_1$), то положим $[\![\varphi_0(k, t)]\!]_{\mathcal{F}_1} = \bigvee\{u \in \Omega \mid P_u(k \restriction u, t \restriction u)\}$.

Полученная таким образом функция экстенсиональна. Для интерпретации функционального символа (например, двуместного) годится любое естественное преобразование f: $(\mathcal{F}(\cdot))^2 \to \mathcal{F}(\cdot)$ функторов; символу $f(\cdot, \cdot)$ соответствует f: $\mathcal{F}_1^2 \to \mathcal{F}_1$. Итак, продолжим оценку с атомарных формул на все формулы в соответствии с общим определением оценки. Полученная оценка называется *оценкой предпучка* $\mathcal{F}(\cdot)$ и обозначается $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}_1}$. Легко проверить для любой формулы φ подстановочность $[\![\varphi(l_1, \ldots, l_n)]\!]_{\mathcal{F}_1}$ относительно $[\![\cdot = \cdot]\!]_{\mathcal{F}_1}$.

Если в определении оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}_1}$ всюду заменить $\mathcal{F}_1$ на $\mathcal{F}$, то получится еще один пример оценки. Однако эта оценка, по-видимому, не находит существенных применений, так как она не учитывает дополнительной структуры, имеющейся в множестве $\mathcal{F}$ (но не в $\mathcal{F}_1$). А именно, множество $\mathcal{F}$ «стратифицировано» функцией $E\colon \mathcal{F} \to \Omega$.

Положим $[\![k \equiv t]\!]_{\mathcal{F}} = \bigvee \{u \in \Omega \mid k{\restriction}u = t{\restriction}u\}$ и $[\![k = t]\!]_{\mathcal{F}} = \bigvee \{u \in \Omega \mid \rho_u^{Ek}(k) = \rho_u^{Et}(t)\}$. Конечно, для $k, t \in \mathcal{F}_1$ выполняется $[\![k = t]\!]_{\mathcal{F}} = [\![k \equiv t]\!]_{\mathcal{F}}$. Структура $\langle \Omega, \mathcal{F}, [\![\cdot = \cdot]\!]_{\mathcal{F}} \rangle$ — типичный пример Ω-множества (см. определение в п. I.3). Оценка, пока определенная только для атомарных формул, продолжается на все формулы: на пропозициональных связках, как обычно, а на кванторных связках по-новому: $[\![\exists x\varphi]\!] = \bigvee \{Ek \wedge [\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{F}} \mid k \in \mathcal{F}\}$, $[\![\forall x\varphi]\!] = \bigwedge \{Ek \to [\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{F}} \mid k \in \mathcal{F}\}$. Атомарные формулы и функциональные символы (если они имеются кроме $\cdot = \cdot$) интерпретируются согласованно с функцией $[\![\cdot \equiv \cdot]\!]_{\mathcal{F}}\colon \mathcal{F}^2 \to \Omega$. Эту оценку называют *стратифицированной оценкой предпучка* $\mathcal{F}(\cdot)$ и обозначают $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}}$.

Две оценки $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D_1}$ и $[\![\cdot]\!]_{\Omega, D_2}$ называются *равными*, если существует биекция $\psi\colon D_1 \to D_2$, для которой выполняется $[\![\varphi(k_1, \ldots, k_n)]\!]_{\Omega, D_1} = [\![\varphi(\psi(k_1), \ldots, \psi(k_n))]\!]_{\Omega, D_2}$ для всех формул φ; когда в D_1 или в D_2 фиксированы какие-то структуры, то они предполагаются одинаковыми и биекция должна сохранять их.

Пример 8. Большой запас оценок получается из оценки $[\![\cdot]\!]_{\Omega}$ в языке ZF (см. пример 1) следующим каноническим образом. Пусть в каком-то языке кроме $\cdot = \cdot$ имеется для конкретности ровно один атомарный предикат φ_0 (арности 2). Выберем некоторую пару функций $h_1, h \in V^{\Omega}$. Запись φ_{h, h_1} означает релятивизацию связанных переменных к h в смысле $\exists x \in h$ и $\forall x \in h$ и замену $\varphi_0(x, y)$ на $\langle x, y \rangle \in h_1$. Положим $[\![\varphi]\!]_{\Omega, h, h_1} = [\![\varphi_{h, h_1}]\!]_{\Omega}$. Вместо h, h_1 можно писать h, как обычно делают, когда указывают только «носитель структуры» $\langle h, h_1 \rangle$. При этом в качестве множества параметров D полученной оценки $[\![\cdot]\!]_{\Omega, h, h_1}$ берется $\mathcal{D}(h)$. Интуитивно $\langle h, h_1 \rangle$ не просто нестандартная, а Ω — нестандартная модель в соответствующем языке. Вместо $[\![\varphi]\!]_{\Omega, h}$ иногда пишут $[\![h \models \varphi]\!]_{\Omega}$, так как релятивизация φ к h совпадает с определением предиката $h \models \varphi$. $\square$

В случае стратифицированной оценки вместо понятий нормальности и слоя удобно рассматривать понятия E-нормальности и E-слоя. Оценка $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}}$ называется *E-нормальной*, если $\forall u \in \Omega\ \forall k, t \in \mathcal{F}\ (Ek = Et = u \wedge [\![k = t]\!]_{\mathcal{F}} \geqslant u \Rightarrow k = t)$, а E-слой, обозначаемый D_p, — это структура, определяемая, как в п. I.3, с той лишь разницей, что для факторизации по $\sim_p$ берется не все $D = \mathcal{F}$, а $\{k \in \mathcal{F} \mid Ek \notin p\}$.

Синглетоном (относительно оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}}$ или $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}_1}$) называется любая экстенсиональная функция вида $p\colon \mathcal{F} \to \Omega$ (или соответственно вида $p\colon \mathcal{F}_1 \to \Omega$), обладающая свойством $p(k) \wedge p(t) \leqslant [\![k = t]\!]_{\mathcal{F}}$. Интуитивно синглетон — это Ω-одноэлементное подмножество в $\mathcal{F}$ или соответственно в $\mathcal{F}_1$. Например, функция $p_k(l) = [\![k = l]\!]_{\mathcal{F}}$, где k фиксировано, $k \in \mathcal{F}$, а l пробегает $\mathcal{F}$, является синглетоном относительно оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}}$. Если в этом примере заменить $\mathcal{F}$ на $\mathcal{F}_1$, то получится пример синглетона относительно оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}_1}$. Оценка называется *полной*, если любой синглетон p равен синглетону вида p_k для какого-то k. Понятия синглетона и полной оценки определены в [1].

Напомним, что слой $\mathcal{F}_p$ предпучка $\mathcal{F}(\cdot)$ определяется как прямой предел системы $\{\mathcal{F}(u) \mid p \in u \in \Omega\}$. Если $k \in \mathcal{F}(u)$, $u \in \Omega$, то значение k в точке p (если оно определено) обозначим $k(p)$.

Следующее предложение является аналогом леммы 1.

Предложение 2. *Для нормального предпучка, если* $u \leqslant [\![k = t]\!]_{\mathcal{F}}$, *то* $k{\restriction}u = t{\restriction}u$ *для всех* $k, t \in \mathcal{F}$.

Теорема 15. *Пусть* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}_1}$ *и* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}}$ — *две оценки, определяемые предпучком* $\mathcal{F}(\cdot)$ *на полной гейтинговой алгебре* Ω.

а) *Предпучок* $\mathcal{F}(\cdot)$ *нормален для любых глобальных элементов в том и только в том случае, если оценка* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}_1}$ *нормальна. Он нормален в том и только в том случае, если оценка* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}}$ *E-нормальна.*

б) *Предпучок* $\mathcal{F}(\cdot)$ *является пучком в том и только в том случае, если оценка* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}}$ *E-нормальная и полная.*

Пусть оценка $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}}$ *на атомарных формулах обладает свойством:* $p \in [\![k = t]\!]_{\mathcal{F}} \Rightarrow \exists u\,(p \in u \wedge k{\restriction}u = t{\restriction}u)$ *(фактически это свойство* Ω *вида:* $p \in \bigvee_{\alpha} u_\alpha \Rightarrow \exists\alpha\,(p \in u_\alpha)$).

в) *Выполняется:* $[\![k = t]\!]_{\mathcal{F}_1} = \{p \in X(\Omega) \mid k(p) = t(p)\}$.

г) *Слой предпучка* $\mathcal{F}_p$ *и E-слой оценки* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}}$ *совпадают. Если* Ω — *нульмерная и* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}}$ — *слабо пучковая, то слой* $\mathcal{F}_p$ *нормального предпучка* $\mathcal{F}(\cdot)$ *и слой оценки* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}_1}$ *совпадают.*

Доказательство. а) Дано: если $1 = \bigvee_{\alpha} u_\alpha$ и $\rho^1_{u_\alpha}(k) = \rho^1_{u_\alpha}(t)$; $\forall\alpha$, где $k, t \in \mathcal{F}_1$, то $k = t$. Если $[\![k = t]\!]_{\mathcal{F}_1} = 1$, то $1 = \bigvee \{u \mid \rho^1_u(k) = \rho^1_u(t)\}$, поэтому $k = t$. Наоборот: если $1 = \bigvee_{\alpha} u_\alpha$, $\rho^1_{u_\alpha}(k) = \rho^1_{u_\alpha}(t)$, $\forall\alpha$, то $[\![k = t]\!]_{\mathcal{F}_1} = 1$, поэтому $k = t$. Пусть $\mathcal{F}(\cdot)$ нормален и $Ek = Et = u$, $[\![k = t]\!]_{\mathcal{F}} \geqslant u$. Тогда $u \leqslant \bigvee \{v \mid k{\restriction}v = t{\restriction}v\} = \bigvee \{v \mid \rho^u_{Ek\wedge v}(k) = \rho^u_{Et\wedge v}(t)\}$, $k = t$. Наоборот: если $k, t \in \mathcal{F}(u)$, $u = \bigvee_{\alpha} u_\alpha$, $\rho^u_{u_\alpha}(k) = \rho^u_{u_\alpha}(t)$, то $[\![k = t]\!]_{\mathcal{F}} \geqslant u$, $k = t$.

Пункт б) доказывается в [1].

в) Если $k(p) = t(p)$, т. е. $k{\restriction}u = t{\restriction}u$ и $p \in u$, где $u \in \Omega$, то $[\![k = t]\!]_{\mathcal{F}_1} \geqslant u \ni p$. Если $p \in [\![k = t]\!]_{\mathcal{F}_1} = \bigvee \{u \in \Omega \mid k{\restriction}u = t{\restriction}u\}$, то по условию получим $p \in u$ и $k{\restriction}u = t{\restriction}u$, т. е. $k(p) = t(p)$.

г) Множество, которое факторизуется в случае предпучка $\mathcal{F}(\cdot)$ и оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}}$, одно и то же — это $\{k \in \mathcal{F} \mid p \in Ek\}$. Отношение эквивалентности также одинаково: $k \sim_p t \Leftrightarrow \exists u\,(p \in u \wedge k{\restriction}u = t{\restriction}u) \Leftrightarrow p \in [\![k = t]\!]_{\mathcal{F}}$.

Если Ω нульмерна, то в качестве множества для факторизации в определении $\mathcal{F}_p$ можно взять $\mathcal{F}_1$, оно же берется в случае оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}_1}$. $\square$

Пусть $\mathcal{F}(\cdot)$ — предпучок на Ω. Напомним, что p_k — это функция, определенная на $\mathcal{F}$ и равная $p_k(l) = [\![k = l]\!]_{\mathcal{F}}$, $p_k\colon \mathcal{F} \to \Omega$. Аналогично, p'_k — функция, определенная на $\mathcal{F}_1$ и равная $p'_k(l) = [\![k = l]\!]_{\mathcal{F}_1}$. Конечно, p_k, $p'_k \in V^\Omega$, где l из области определения p_k или p'_k отождествляется с $\check{l} \in V^\Omega$. Обозначим $\Pi = \{p_k \mid k \in \mathcal{F}\}$ и $\Pi' = \{p'_k \mid k \in \mathcal{F}_1\}$. Положим $\mathcal{F}'(p_k) = Ek$ и $\mathcal{F}'_1(p'_k) \equiv 1$, где $\mathcal{F}'$ определено на Π, а $\mathcal{F}'_1$ определено на Π'. Штрих в обозначениях p'_k, Π' обычно опускают и имеют в виду, что $\mathcal{F}'$ и $\mathcal{F}'_1$ определяются по-разному; $\mathcal{F}'$, $\mathcal{F}'_1 \in V^\Omega$.

Теорема 16. *Пусть* $\mathcal{F}(\cdot)$ — *предпучок на полной гейтинговой алгебре* Ω.

а) *Выполняется* $[\![\varphi(k_1, \ldots, k_n)]\!]_{\mathcal{F}_1} = [\![\varphi(p'_{k_1}, \ldots, p'_{k_n})]\!]_{\Omega,\mathcal{F}'_1}$ *для любой формулы* φ *в языке колец с параметрами из* $\mathcal{F}_1$ *(справа оценка из примера 8). Для нормального (хотя бы только на глобальных элементах) предпучка оценки* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}_1}$ *и* $[\![\cdot]\!]_{\Omega,\mathcal{F}'_1}$ *равны.*

б) *Выполняется* $[\![\varphi(k_1, \ldots, k_n)]\!]_{\mathcal{F}} = [\![\varphi(p_{k_1}, \ldots, p_{k_n})]\!]_{\Omega\mathcal{F}'}$ *для любой формулы* φ *в языке колец с параметрами из* $\mathcal{F}$. *Для нормального предпучка оценки* $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{F}}$ *и* $[\![\cdot]\!]_{\Omega,\mathcal{F}'}$ *равны.*

в) *Если* $\mathscr{F}(\cdot)$ — *пучок, то* $\mathscr{F}_1 \simeq (\mathscr{F}_1')^{\wedge\Omega}$ и $\mathscr{F}_1 \simeq (\mathscr{F}')^{\wedge\Omega}$, *где* $\simeq$ *изоморфизм вида* $k \mapsto p_k'$ *и соответственно* $k \mapsto p_k$.

г) *Если* f_i: $(\mathscr{F}(\cdot))^{n_i} \to \mathscr{F}(\cdot)$ — *естественное преобразование предпучков* (n_i-*арная операция на* $\mathscr{F}_1$, *где* $1 \leqslant i \leqslant m$), *то* $\langle \mathscr{F}_1', \{f_i'\}_-\rangle$— *одноименная с* $\langle \mathscr{F}_1, \{f_i\}\rangle$ *алгебраическая система (и также для* $\mathscr{F}'$).

Замечание. Эта теорема сохраняется, если язык колец расширить новыми предикатными и функциональными символами. В п. г) имеются в виду позитивно определенные алгебраические системы, например, группы или кольца.

Доказательство. а) Функции p_k' и $\mathscr{F}_1'$, очевидно, экстенсиональные. Если φ — атомарная, т. е. φ — равенство, то

$$[\![p_k' = p_t']\!]_{\Omega, \mathscr{F}_1'} = \bigwedge_{l \in \mathscr{F}_1} (p_k'(\check{l}) \leftrightarrow p_t'(\check{l})) = \bigwedge_{l \in \mathscr{F}_1} ([\![k = l]\!]_{\mathscr{F}_1} \leftrightarrow [\![t = l]\!]_{\mathscr{F}_1}) = [\![k = t]\!]_{\mathscr{F}_1}.$$

Связки $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, очевидно, сохраняют равенство. Связка $\forall$ также сохраняет равенство, так как $[\![\forall x\varphi]\!]_{\mathscr{F}_1} = \bigwedge_{k \in \mathscr{F}_1} [\![\varphi(k)]\!]_{\mathscr{F}_1}$, $[\![\forall x\varphi]\!]_{\Omega, \mathscr{F}_1'} = \bigwedge_{k \in \mathscr{F}_1} [\![\varphi(p_k')]\!]_{\Omega, \mathscr{F}_1'}$. Также рассматривается случай связки $\exists$. Для нормального пучка отображение $k \mapsto p_k'$ — биекция, которая и означает совпадение оценок. (Поэтому для нормального пучка можно не различать k и p_k', отождествляя их.)

б) Функции p_k экстенсиональны, атомарный случай и пропозициональные связки рассматриваются, как в п. а). Кванторные связки рассматриваются с учетом определения стратифицированной оценки. (Отметим экстенсиональность функции $\mathscr{F}'$.)

Пункты в)—г) доказываются в [3].

Пример 8а). Применим теорему 16 к одному специальному, нужному в гл. II предпучку. А именно, фиксируем кольцо K и положим $\mathscr{F}(e) = e \cdot K$, где e пробегает $B(K)$; для $e_1 \leqslant e_2$ положим $\rho_{e_1}^{e_2}(k) = e_1 \cdot k$ (где k пробегает $\mathscr{F}(e_2)$, т. е. $e_2 \cdot k = k$). Р. Пирс по существу доказал, что предпучок $\mathscr{F}(\cdot)$ является пучком относительно топологического пополнения $\mathscr{T}(K)$ алгебры $B(K)$. Поэтому, как всегда, $\mathscr{F}(\cdot)$ продолжается на $\mathscr{T}(K)$, оставаясь пучком. Сузим $\mathscr{F}(\cdot)$ на $\mathbb{B}(K)$ — алгебру регулярных открытых множеств в $X(K)$ и, одновременно, дедекиндово пополнение алгебры $B(K)$. Это сужение обозначим $G(\cdot)$. Такое $G(\cdot)$ — предпучок не обязательно даже нормальный. Пучковость кольца K, по существу, означает, что $G(\cdot)$ — пучок. Можно заново определить оценки из примера 2 как $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{T}(K)} = [\![\varphi]\!]_{\mathscr{F}_1}$ и $[\![\varphi]\!]_{B(K)} = [\![\varphi]\!]_{G_1}$. Обозначим $K' = \mathscr{F}_1'$, т. е. K' — тождественно единичная функция, определенная на всех p_k вида $p_k(l) = [\![k = l]\!]_{\mathscr{F}_1}$. Интуитивно, K' — нестандартный образ кольца K в мире множеств $V^{\mathscr{T}(K)}$. По предпучку $G(\cdot)$ можно также образовать $G_1' \in V^{B(K)}$, где G_1' похоже на K', т. е. G_1' — тождественно единичная функция на всех L_k вида $L_k(\check{l}) = [\![k = l]\!]_{G_1}$. Но p_k, вообще говоря, не равно L_k, так как $\mathscr{F}(\cdot)$ не равен $G(\cdot)$.

Теорема 16е). *Пусть K — нормальное кольцо. Тогда $G(\cdot)$ — нормальный предпучок на глобальных элементах (в частности, $K' = \mathscr{F}_1' = G_1'$) и отображение $k \mapsto p_k = L_k$ инъективно, т. е. K вкладывается в $K^{\wedge\mathscr{T}}$ и $K^{\wedge B}$, а также $[\![\varphi]\!]_{\mathscr{T}(K)} = [\![\varphi]\!]_{\mathscr{T}, K'} \leqslant [\![\varphi]\!]_{B, K'} = [\![\varphi]\!]_{B(K)}$ для любой φ в слабо E-нормальной форме.*

Доказательство. Пусть $1 = \bigvee_B e_\alpha$, $e_\alpha \in B(K)$, $e_\alpha \cdot k = e_\alpha \cdot t$, $\forall \alpha$. Тогда $\bigcup_\alpha e_\alpha \subseteq e_0$, где e_0 из условия нормальности. Поэтому $e_0 = 1$ и $k = t$. Далее, $p_k(l) = L_k(l) = e_0$, где e_0 из условия нормальности. Поэтому K', по определению равное $\mathscr{F}'_1$, равно и G'_1, т. е.

$$K' \in V^{B(K)} \subseteq (V^{\mathcal{T}(K)} \cap V^{B(K)}).$$

По теореме 16а) отображение $k \mapsto p_k$ — вложение и с учетом $[\![p_k \in K']\!] = 1$. (для $\mathcal{T}$- и $\mathbb{B}$-случаев) получим нужное вложение K. Последняя цепочка следует из теорем 16а) и 10б).

Напомним, что $\Omega_1 = \mathcal{T}(X_1)$, где X_1 — бэровская прямая ω^ω.

Т е о р е м а 17. *Пусть* φ — *замкнутая формула в языке* ZF. *Если для любых* h, $h_1 \in V^\Omega$ *выполняется* $\Omega_1 \models \varphi_{h, h_1}$, *где* h — *тождественно единичная функция с непустой областью определения и* h_1 — *экстенсиональная функция на* $(\mathscr{D}(h))^2$, *то* $\underset{H}{\vdash} \varphi$.

Эта теорема, а также работа [5, с. 127] стимулируют следующее определение, предложенное, по-видимому, Г. Такеути (см. [10]). Пусть φ — формула в языке ZF, может быть, с параметрами из $V \simeq V^{Z_2}$. Обозначим $cHa \models \varphi$ предикат $\forall \Omega\ (V^\Omega \models \varphi)$, где Ω, как всегда, пробегает все полные гейтинговы алгебры. Этот предикат можно назвать *гейтинговой значимостью*. Гейтингова значимость не влечет выводимость в теории HZF, так как ограниченные формулы имеют одну и ту же оценку во всех V^Ω, например, натуральный ряд — один и тот же объект $\check{\omega}$ во всех V^Ω. Однако, можно полагать, что для неограниченных формул гейтингова значимость лучше соответствует интуиционистской истинности в теории множеств. В частности, для гейтинговой значимости выполняются некоторые свойства дизъюнктности и экзистенциональности. Конечно, если $HZF \vdash \varphi$, то $cHa \models \varphi$.

ГЛАВА II
ЛОКАЛИЗАЦИИ И ОЦЕНКИ

II.1. Локальная аксиоматизируемость класса алгебраических систем. Пусть $\mathscr{K}$ — класс пучков $\mathscr{F}(\cdot)$ на полных гейтинговых алгебрах Ω, где Ω пробегает некоторый класс $\mathscr{K}_0$; каждое значение $\mathscr{F}(u)$ — алгебра одной и той же сигнатуры. Обычно слои — алгебры $\mathscr{F}_p$ пучка $\mathscr{F}(\cdot)$ (здесь и далее p пробегает $X(\Omega)$) проще, чем алгебра $\mathscr{F}(1)$. Поэтому свойства $\mathscr{F}(1)$ стараются редуцировать к свойствам семейства $\{\mathscr{F}_p \mid p \in X(\Omega)\}$. Это одно из проявлений «метода локализации».

Класс пучков $\mathscr{K}$ назовем *локально аксиоматизируемым*, если существует теория T в языке, соответствующем сигнатуре этих алгебр, для которой $\mathscr{F}(\cdot) \in \mathscr{K} \Leftrightarrow (\{\mathscr{F}_p\} \models T)$, где здесь и далее $\{\mathscr{F}_p\} \models T$ означает $\forall p\ (\mathscr{F}_p \models T)$. Теорию T назовем *локальной теорией класса* $\mathscr{K}$. Понятие локальной аксиоматизируемости, как и хорошо известное понятие аксиоматизируемости, выражает определенную «замкнутость (полноту)» класса $\mathscr{K}$. Для пучка $\mathscr{F}(\cdot)$ на Ω в примере 7 были определены оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}_1}$ и $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}}$ со значениями в Ω. Эти оценки — полезный инструмент для перехода от локальной теории T локально аксиоматизируемого класса $\mathscr{K}$ к классу глобальных объектов $\{\mathscr{F}(1) \mid \mathscr{F} \in \mathscr{K}\}$ и теории $Th\{\mathscr{F}(1) \mid \mathscr{F} \in \mathscr{K}\}$. При этом важную роль играет выразимость глобальной (относительно $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}_1}$ или $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}}$) истинности в алгебре $\mathscr{F}(1)$. То есть существование такого перевода $\varphi \mapsto \varphi'$ (не зависящего от пучка $\mathscr{F}(\cdot)$), что $(\mathscr{F}(1) \models \varphi') \Leftrightarrow ([\![\varphi]\!]_{\mathcal{T}_1} = 1)$ для всех $\mathscr{F}(\cdot)$ из $\mathscr{K}$. Аналогично для оценки $[\![\cdot]\!]_{\mathcal{T}}$. В этом случае назовем $\mathscr{K}$ *классом с глобальной истинностью*. В этой главе такой подход применяется для случая, когда все глобальные объекты $\mathscr{F}(1)$ — ассоциативные кольца с 1.

Для этого случая выразимость глобальной истинности обеспечивает теорема 12. При наличии такой выразимости конкретные вопросы о классе $\{\mathscr{F}(1) \mid \mathscr{F}(\cdot) \in \mathscr{K}\}$ или теории $Th\{\mathscr{F}(1) \mid \mathscr{F} \in \mathscr{K}\}$ можно редуцировать к теории T единообразным способом. Это можно делать и для теоретико-модельных вопросов. Например, редуцировать разрешимость, полноту, модельную полноту, категоричность, стабильность и тому подобное к аналогичным свойствам теории T.

Заметим, что свойства локальной аксиоматизируемости класса $\mathcal{K}$ и его аксиоматизируемости не обязательно влекут друг друга, они также нетривиально взаимоотносятся со свойством внутренней аксиоматизируемости (определение см. на с. 116).

В примере 8а) рассматривался следующий (пирсовский) пучок, определяемый по любому ассоциативному и с 1 кольцу K. Для $e \in B(K)$ положим $\mathcal{F}(e) \leftrightharpoons e\cdot K$ и для $e_1 \leqslant e_2$ положим $\rho_{e_1}^{e_2}$: $\mathcal{F}(e) \to \mathcal{F}(e_1)$ есть умножение на e_1, т. е. $\rho_{e_1}^{e_2}(k) \leftrightharpoons e_1\cdot k$. Конечно, $\mathcal{F}(1) = K$. Как правило, $B(K)$ не полна. Выполняется: если $e = \bigcup\limits_{\alpha} e_\alpha$, где $e \in B(K)$, $\{e_\alpha\} \subseteq B(K)$ и $k_\alpha \in \mathcal{F}(e_\alpha)$, т. е. $e_\alpha\cdot k_\alpha = k_\alpha$, и $e_\alpha\cdot e_\beta\cdot k_\alpha = e_\alpha\cdot e_\beta\cdot k_\beta$, то $\exists! k \in \mathcal{F}(e) \forall\alpha\,(e_\alpha\cdot k = k_\alpha)$. Существование такого k очевидно в силу компактности e, а единственность следует из леммы 1 к теореме 5. Поэтому стандартным образом продолжаем $\mathcal{F}(\cdot)$ с $B(K)$ на $\mathcal{T}(K)$, полагая $\mathcal{F}(\mathcal{O})$ равным обратному пределу системы $\{\mathcal{F}(e) \mid e \subseteq \mathcal{O}\}$. Получим (пирсовский) пучок на $\mathcal{T}(K)$. Любой класс колец $\mathcal{K}$ отождествляется с классом соответствующих пирсовских пучков; при этом K и $\mathcal{F}(\cdot)$ на $\mathcal{T}(K)$ можно не различать. Слой $\mathcal{F}_p$ этого пучка совпадает с $K_p = K/\bar{p}$, где $\bar{p} = p\cdot K$, т. е. мы попадаем в ситуацию примеров 2 и 8а). Вместо $\mathcal{F}_1'$ (см. определение перед теоремой 16), где $\mathcal{F}(\cdot)$ — пирсовский пучок кольца K, будем писать K'. Конечно, K' можно определить, не упоминая о пирсовском пучке. Слой K_p в алгебраическом контексте называют еще *пирсовской локализацией кольца* K в «точке кольца» p. Рассматриваются и другие виды локализаций колец и соответствующие им пучки. Последующие результаты в основном переносятся на них, но здесь мы ограничимся пирсовской локализацией.

Теорема 15в) по существу влечет следующее

Предложение 3. *Выполняется* $[\![k = t]\!]_{\mathcal{T}(K)} = \{p \in X(K) \mid k(p) = t(p)\}$.

Доказательство. Если $p \in [\![k = t]\!]_{\mathcal{T}(K)}$, то $p \in e$ и $e\cdot k = e\cdot t$. Если $k(p) = t(p)$, то $p \in e$ и $e\cdot k = e\cdot t$. (Предложение 3 верно и для любой позитивной бескванторной формулы.)

II.2. Оценка и модельная полнота. Булева абсолютность. Подход, описанный в п. II.1, мы применим к следующей задаче А. Макинтаера: если T имеет модельный компаньон, то имеет ли класс $\mathcal{K}$ модельный компаньон (и каков он), см. [7, с. 175]? Напомним соответствующие определения.

Класс колец $\mathcal{K}$ называется Σ-*модельно полным*, если для любых $K, L \in \mathcal{K}$, $K \subseteq L$ и любой формулы φ из класса формул Σ (здесь и далее в языке колец) с любыми параметрами $k_1, \ldots, k_n$ из K выполняется $(K \models \varphi(k_1, \ldots, k_n)) \Leftrightarrow (L \models \varphi(k_1, \ldots, k_n))$. Если Σ совпадает с классом всех формул, то $\mathcal{K}$ называется *модельно полным*. Если класс $\mathcal{K}$ модельно полон и аксиоматизируем, то теория $Th\mathcal{K}$ называется *модельно полной*. Если класс $\mathcal{K}$ аксиоматизируем, то модельная полнота класса $\mathcal{K}$ и теории $Th\mathcal{K}$ эквивалентна тому, что любая система уравнений и неравенств с коэффициентами из K, разрешимая в L, разрешима и в K («критерий Робинсона»). Последнее эквивалентно тому, что любая формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ эквивалентна A-формуле $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ в теории $Th\mathcal{K}$ («теорема Робинсона»). Формула, выражающая естественным образом утверждение о существовании решения у конкретной системы уравнений и неравенств называется *примитивной*.

Класс $\mathcal{K}^*$ называется *модельным компаньоном класса* $\mathcal{K}$, если эти классы взаимно вложимы, т. е. $\forall K \in \mathcal{K} \exists L \in \mathcal{K}^* (K \mathrel{\widetilde{\subseteq}} L)$ и $\forall L \in \mathcal{K}^* \exists K \in \mathcal{K} (L \mathrel{\widetilde{\subseteq}} K)$, и $\mathcal{K}^*$ модельно полон. Если эти классы аксиоматизируемы, то теория $Th\mathcal{K}^*$ называется *модельным компаньоном теории* $Th\mathcal{K}$. Хорошо известно, что, например, класс всех алгебраически замкнутых полей является модельным компаньоном класса всех полей, а класс всех вещественно замкнутых полей является модельным компаньоном класса всех упорядоченных полей.

Фиксируем теорию T, имеющую модельный компаньон T^*, а также класс $\mathscr{K} \leftrightharpoons \{K \mid \{K_p\} \models T\}$. Когда класс $\mathscr{K}$ имеет модельный компаньон? Каков он? В частности, для класса $\mathscr{K}_0$ бирегулярных колец (иными словами, $\mathscr{K}_0 \leftrightharpoons \{K \mid \{K_p\} \models$ «простое кольцо»$\}$), какие его подклассы модельно полны? В этом состоят вопросы Макинтаера (см. [7, с. 175]; [8, с. 88]). А. Макинтаер в работе [8] указал модельный компаньон для класса $\mathscr{K}$ вида $\mathscr{K} \leftrightharpoons \{K \mid \{K_p\} \models$ «поле»$\}$; иными словами, указал модельный компаньон для подкласса в $\mathscr{K}_0$, состоящего из всех коммутативных регулярных колец. Этот результат был получен и другими авторами, о чем говорится в [8]. Доказательства того, что классы $\mathscr{K}_0$ и $\mathscr{K}$ действительно характеризуются таким образом через их локализации, а также другие примеры локально аксиоматизируемых классов, можно получить, например, из теоремы в [3, с. 389], см. также пример 9. Некоторые ответы на эти вопросы Макинтаера содержатся в следующем пункте. А именно, мы фактически предъявим следующий класс $\mathscr{K}^* = \{K \mid \{K_p\} \models T^*,\ K \models \Phi_1 \wedge \Phi_2\}$, где Φ_1 — свойство нормальности, а Φ_2 — свойство безатомности кольца K, и укажем достаточное (а по существу и необходимое) условие того, что $\mathscr{K}^*$ — модельный компаньон для $\mathscr{K}$. Легко проверить: $\forall K \in \mathscr{K}_0\ (K \models \Phi_1)$. Поэтому если $T^* \models$ «простое», то $\mathscr{K}^* \subseteq \mathscr{K}_0$ и условие Φ_1 в определении класса $\mathscr{K}^*$ излишне. В примере 10 предъявляется новый модельно полный подкласс в классе $\mathscr{K}_0$.

Далее существенно используется следующее

Предложение 4. *Если K — нормальное кольцо и $\{\mathscr{K}_p\} \models T^*$ (где T^* — модельно полная теория), то для любой формулы φ выполняются два свойства:* $[\![\varphi(k_1, \ldots, k_n)]\!]_{\mathscr{T}(K)} = \{p \in X(K) \mid K_p \models \varphi(k_1(p), \ldots, k_n(p))\}$ *и* $[\![\varphi(k_1, \ldots, k_n)]\!]_{\mathscr{T}(K)}$ *— открыто-замкнутое множество, где* $k_1, \ldots, k_n \in K$.

Доказательство. Для атомарной формулы $[\![k = t]\!] = e_0$, где e_0 из определения нормальности для элемента $k - t$, и учтем предложение 3. Для связок $\vee, \wedge, \neg$ все очевидно. Для связки $\exists$ заметим $[\![\exists x\varphi]\!] = \{p \in X \mid K_p \models \exists x\varphi\}$. Используя модельную полноту для формулы $(\neg\exists x\varphi)(x_1, \ldots, x_n)$, получим приводящую E-формулу $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ и по нормальности кольца оценка $[\![\exists x\varphi]\!]$ открыто-замкнута. Для связки $\forall$ заметим $[\![\forall x\varphi]\!] \subseteq \{p \in X \mid K_p \models \forall x\varphi\} \subseteq \bigcap\{[\![\varphi(k)]\!] \mid k \in K\}$ и учтем, что $\{p \in X \mid K_p \models \exists x \neg\varphi\}$ открыто-замкнуто.

Следующие два предложения — частные случаи теоремы 2б, в), (см. также [3, с. 388]).

Предложение 5. *Пусть φ — любая формула в нормальной форме или в предваренной форме (в этом случае K — нормальное). Если $p \in [\![\varphi(k_1, \ldots, k_n)]\!]_{\mathscr{T}(K)}$, то $K_p \models \varphi(k_1(p), \ldots, k_n(p))$.*

Доказательство. Рассмотрим случай нормальной формы. Если $p \in [\![k = t]\!]$, то $p \in e \leqslant [\![k = t]\!]$ и по лемме 1 $k(p) = t(p)$. Случаи $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ и $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ очевидны. Если $\varphi = \varphi_1 \Rightarrow \varphi_2$ и $p \in [\![\varphi_1 \Rightarrow \varphi_2]\!]$, то в случае $p \in [\![\varphi_1]\!]$ получим $p \in [\![\varphi_2]\!]$ и все доказано. В случае $p \notin [\![\varphi_1]\!]$ и $K_p \models \varphi_1$ получим противоречие индукцией по числу связок в φ_1.

Замечание. В связи с предложением 5 (и теоремой 2б), которая также верна для нормальной формы) обратим внимание на следующее: по теореме 11а $\mathscr{T}$-глобально истинно, что «K без нетривиальных центральных идемпотентов», т. е. $[\![\Phi_5']\!]_{\mathscr{T}} = 1$. Отсюда нельзя вывести, что $K_p \models (\Phi_5' \wedge \Phi_5)$, именно потому, что Φ_5' не в нормальной форме, а перейти к Φ_5, которая в нормальной форме, нельзя, так как $\mathscr{T}$-глобальная истинность подчиняется интуиционистской логике. И действительно, в K_p могут быть многочисленные центральные идемпотенты (см. [27]). Это показывает, что теорема 11 нетривиальна.

Предложение 6. *Если AE-формула φ в нормальной форме или K — нормальное, то* $([\![\varphi(k_1, \ldots, k_n)]\!]_{\mathcal{T}(K)} \geqslant e) \Leftrightarrow \forall p \in e\ (K_p \models \varphi(k_1(p), \ldots$ $\ldots, k_n(p)))$, $e \in B(K)$.

Класс $\mathscr{K}$ назовем *булево правильным*, если $K, L \in \mathscr{K}$, $K \subseteq L \Rightarrow$ $\Rightarrow B(K) \subseteq B(L)$. Например, достаточно проверить $Z(K) \subseteq Z(L)$, где $Z(K)$ — центр кольца K.

Предложение 7. а) *A-модельная полнота класса $\mathscr{K}$ влечет его булеву правильность.*

б) *Булева правильность эквивалентна* $K \subseteq L \Rightarrow \forall p_1 \in X(L)\ (p_1 \cap$ $\cap K) \in X(K)$ *и эквивалентна* $K \subseteq L \Rightarrow \exists p_1 \in X(L)\ ((p_1 \cap K) \in X(K))$.

Доказательство. а) Для любого $e \in B(K)$ перенесем из K в L формулу $\forall x\ (e \cdot x = x \cdot e)$.

б) Проверим следования в том порядке, как они указаны. Конечно, $p_1 \cap K = p_1 \cap B(K) \subseteq B(K)$, не содержит 1, содержит 0, замкнут относительно $\vee$, а по булевой правильности транзитивно вниз и просто. Если существует $e \in B(K) \setminus B(L)$, то $(p_1 \cap K)$ непросто.

Класс $\mathscr{K}$ назовем *булево простым*, если $K, L \in \mathscr{K}$, $K \subseteq L \Rightarrow \forall e_1 \in$ $\in B(L)\ (e_1 \neq 0 \Rightarrow \exists p_1 \in e_1 \exists p \in X(K)\ [p \supseteq p_1 \cap K \wedge \forall k \in K\ (\exists e \in$ $\in p_1\ (e \cdot k = k) \Rightarrow \exists e \in p\ (e \cdot k = k))]$. Если $\mathscr{K}$ — булево правильный класс и $\forall K \in \mathscr{K}\ (K \models \Phi_1)$, то условие булевой простоты класса $\mathscr{K}$ принимает следующий вид: $K \subseteq L \Rightarrow \forall p_1 \in X(L)\ (p_1 \cdot L) \cap K \subseteq (p_1 \cap K) \cdot K$ (см. доказательство предложения 8б).

Предложение 8. *Пусть $\mathscr{K}$ — булево правильный класс и* $\forall K \in$ $\in \mathscr{K}\ (K \models \Phi_1)$.

а) *AE-модельная полнота класса $\mathscr{K}$ влечет его булеву простоту.*

б) *Свойство класса $\mathscr{K}$ вида* $K \subseteq L \Rightarrow \forall k \in K \forall e \in B(K)\ (K \models$ $\models \psi(k, e) \Rightarrow L \models \psi(k, e))$, *где* $\psi \leftrightharpoons \forall e_0 \exists t\ (e_0^2 = e_0 \wedge e_0 \cdot t = t \cdot e_0 \wedge e_0 \cdot k = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow e_0 \cdot e = e_0)$, *эквивалентно его булевой простоте.*

Доказательство. Пункт а) сразу следует из эквивалентности в пункте б).

б) Пусть выполняется это свойство и (с учетом условия) $e \leftrightharpoons [\![k = 0]\!]_K$. Тогда $L \models \psi(k, e)$, т. е. $[\![k = 0]\!]_L \leqslant [\![k = 0]\!]_K$. Отсюда

$$[\![k \neq 0]\!]_K \leqslant [\![k \neq 0]\!]_L \forall p \in X(L)\ \forall k \in K\ [\exists e_1 \in$$
$$\in p_1\ (e_1 \cdot k = k) \Rightarrow [\![k \neq 0]\!]_K \leqslant e_1,$$
$$[\![k \neq 0]\!]_K \in p_1 \cap K,\ [\![k \neq 0]\!]_K \cdot k = k],$$

т. е. $\exists e \in (p_1 \cap K)\ (e \cdot k = k)$. Это сильнее, чем утверждение о булевой простоте класса $\mathscr{K}$. Наоборот: пусть $e_0 \in B(L)$ и $e_0 \cdot k = 0$. Допустим $e_0 \cap$ $\cap (1 - e) \neq 0$. По условию булевой простоты выберем в $X(L)$ точку $p_1 \in e_0 \cap (1 - e)$, для которой $\bar{p}_1 \cap K \subseteq \bar{p}$, где $p = p_1 \cap K$ — простой идеал в $B(K)$. Так как $(1 - e_0) \cdot k = k$, то существует $e_1 \in p$, для которого $e_1 \cdot k = k$. Поэтому $(1 - e_1) \notin p_1$, $(1 - e_1) \cdot k = 0$, $(1 - e_1) \leqslant e$, $e \notin p_1$, а с другой стороны $(1 - e) \notin p_1$. Противоречие. Здесь $k \in K$ и $e \in B(L)$.

Замечание. Свойство из предложения 8б) вытекает из булевой простоты класса и без использования условия $\forall K \in \mathscr{K}\ (K \models \Phi_1)$.

Пример 9. Если кольца из класса $\mathscr{K}$ обладают свойством Φ_3, то $\mathscr{K}$ — булево правильный. Класс $\mathscr{K}$ строго риккартовых колец в классе нормальных колец имеет в качестве локальной теории T аксиому $\forall k, t\ (k \cdot t = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow k = 0 \vee t = 0)$, т. е. $\mathscr{K} = \{K \mid K \models \Phi_1 \wedge \{K_p\} \models T\}$. Он состоит из нормальных колец и булево правильный. Последнее потому, что $T \vdash \Phi_4$ и, следовательно, в $\mathscr{K}$ выполняется Φ_3.

Класс $\mathscr{K}_1$ абелевых регулярных колец имеет в качестве локальной теории T аксиому «тело». Этот класс — также булево правильный, а, кроме того, и булево простой. Последнее имеет место в силу того, что любой булево правильный класс колец $\mathscr{K}$, все локализации элементов которого — простые кольца (т. е. любой булево правильный подкласс класса бирегулярных колец),— булево простой. Проверим последнее утверждение. Пусть K, $L \in \in \mathscr{K}$, $K \subseteq L$ и выполняется $p_1 \in X(L)$, $k \in \bar{p}_1 \cap K$. Нужно показать $k \in \bar{p}$ для некоторого $p \in X(K)$. Положим $p \rightleftharpoons p_1 \cap K \subseteq B(K)$. В силу булевой правильности $p \in X(K)$. Рассмотрим гомоморфизм $[t]_{\bar{p}} \mapsto [t]_{\bar{p}_1}^{L}$, $K / \bar{p} \to L / \bar{p}_1$, ядро a этого гомоморфизма — двусторонний идеал в $K / \bar{p}$, содержащий элемент $[k]_{\bar{p}}$. Если $a = K/\bar{p}$, то $[1]_{\bar{p}_1}^{L} = [0]_{\bar{p}_1}^{L}$, т. е. $1 = e_1 \cdot l$, где $e_1 \in p_1$, отсюда $e_1 = 1$, противоречие. Если $a = 0$, то $[k]_{\bar{p}} = 0$, отсюда $k = e \cdot k$, где $e \in p$.

Класс $\mathscr{K}_0$ бирегулярных колец, как отмечалось, характеризуется условием $K \in \mathscr{K}_0 \Leftrightarrow \{K_p\} \models$ «простое». Он — не локально аксиоматизируемый (в языке колец).

Еще один интересный для нас класс колец $\mathscr{K}_2$ состоит из всех строго бириккартовых колец. В классе нормальных колец он локально аксиоматизируется теорией T из одной аксиомы: «первичное кольцо», т. е. $\mathscr{K}_2 = \{K \mid K \models \Phi_1 \wedge \{K_p\} \models T\}$. Напомним, что первичное кольцо определяется условием: для любых (двухсторонних) идеалов a, b из $a \cdot b = 0$ следует $a = 0 \vee b = 0$. Это условие можно выразить в языке колец: $\forall k, k_1 \exists t\, (k \cdot t \cdot k_1 = 0 \Rightarrow k = 0 \vee k_1 = 0)$. Заметим, что все упомянутые в этом примере локальные теории таковы, что любая их модель имеет только два центральных идемпотента 0 и 1, т. е. удовлетворяет Φ_5.

Пример 10. Следующий пример — основной в этой главе. Мы изложим его для ассоциативных с 1 колец, хотя он остается правильным для колец без 1 и для неассоциативных колец, о которых говорится в работе [23]. Предполагается, что читатель прочел следующий пункт до конца формулировки теоремы 18. В этом и следующем примерах содержатся утверждения, которые мы нумеруем в силу их частного характера с префиксом 10 или 11. Обозначим $\mathscr{L}$ класс всех первичных PI-колец A (над коммутативным с 1 кольцом R) фиксированной степени s. Центр кольца A, обозначаемый везде $F \rightleftharpoons Z(A)$,— целостное кольцо (т. е. коммутативное, без делителей нуля). Напомним: алгебра A_R называется *PI-кольцом*, если в ней тождественно равен нулю хотя бы один многочлен (с некоммутативными переменными) и старшим коэффициентом 1; наименьшая степень такого многочлена и называется *степенью алгебры* (см., например, [29, 2, с. 43]). Алгебра A_F (рассматриваемая как центральная) вкладывается в свое классическое кольцо частных $S_A \rightleftharpoons A \otimes_F F_{cl}$, где F_{cl} — поле частных для F; в него вкладывается и поле F_{cl}. Соответственно по формулам $a \mapsto a \otimes 1$ и $f \cdot g^{-1} \mapsto 1 \otimes f \cdot g^{-1}$ (так как модули A_F и ${}_F F_{cl}$ без кручения). Любая максимальная линейно независимая система $\{a_i\}$ в A над F образует базис $\{a_i \otimes 1\}$ в S_A над F_{cl}, а любой базис в S_A можно преобразовать к такому виду; все это подробнее (см. [28, с. 46—48]). Поэтому некоторые свойства A и S_A можно выражать друг через друга. Теорема Познера (см. [29, 2, с. 48]) говорит, что S_A m-мерная (над ее центром F_{cl}) и простая алгебра. Для всякой m-мерной (над ее центром) и простой алгебры A выполняется $m = n^2$ для некоторого n. Будем, далее, называть такие алгебры A *n-алгебрами* (см. [25]). В данном случае $n = \left[\frac{s}{2}\right]$. В классе первичных колец A условие «PI-алгебра степени s» аксиоматизируется в виде $A \models S_{2n} \wedge \neg S_{2n-2}$, где S_k — стандартное тождество степени k (см. [25, с. 498]). Его можно аксиоматизировать и иначе: в A существует максимальная линейно независимая над ее центром F система из m элементов. Итак, класс $\mathscr{L}$ аксиоматизируем этими тремя аксиомами, обозначим их $T_{\mathscr{L}}$.

Рассмотрим класс $\mathscr{L}_{T_0}$, состоящий из всех n-алгебр A_F с центром F, удовлетворяющим фиксированной теории T_0. Выполняется $\mathscr{L}_{T_0} \subseteq \mathscr{L}$, так как в A_F выполняются точно те же тождества, что и в матричном кольце

$M_n(F)$ (см. [25, с. 497]), и, в частности, в A_F выполняется стандартное тождество S_{2n}.

Предложение 10.1. *Класс $\mathscr{L}_{T_0}$ аксиоматизируется нижеуказанной теорией T.*

Доказательство. Из теоремы Артина — Веддербарна нетрудно получить, что $A_F \cong M_k(D)$, где D — тело и алгебра над своим центром $F = Z(D)$ размерности s (см. [25, с. 283]). Ясно, что $n^2 = k^2 \cdot s$. Поэтому аксиоматизируем $\mathscr{L}_{T_0}$ теорией T, содержащей аксиому $\bigvee\limits_{k^2 \cdot s = n^2} \exists \{e_{ij}\}^k$

$\forall x \exists y \ \{\sum\limits_{i=1}^{k} e_{ii} = 1 \wedge e_{ij} \cdot e_{pq} = \delta_{jp} \cdot e_{iq} \wedge [x \cdot e_{ij} = e_{ij} \cdot x \Rightarrow y \cdot e_{ij} = e_{ij} \cdot y \wedge (x = 0 \vee x \cdot y = y \cdot x = 1)\ ]) \wedge \exists x_1, \ldots, x_s\, [\forall x \exists y_1, \ldots, y_s\, \forall n \ (x_1 \cdot e_{ij} = e_{ij} \cdot x \wedge \ldots \wedge y_1 \cdot u = u \cdot y_1 \wedge \ldots \wedge x = x_1 \cdot y_1 + \ldots + x_s \cdot y_s) \wedge (x_1, \ldots, x_s$ — линейно независимы над центром$)]\}$, где δ_{jp} — символ Кронекера, а также список аксиом, релятивизирующих для центра F все аксиомы из теории T_0. Пусть A — модель теории T. Нетрудно проверить, что $A \cong M_k(Z(\{e_{ij}\}))$, где $Z(\{e_{ij}\})$ — централизатор системы «матричных единиц» $\{e_{ij}\}$, он всегда образует кольцо (см. [24, с. 82]). В данном случае — по условию это тело размерности s над центром в A.

Предложение 10.2. *Класс $\mathscr{K}_{T_0} \rightleftharpoons \{K \mid \{K_p\} \mid \models T\}$ булево правильный (как и любой его подкласс). Более того, для $K, L \in \mathscr{K}_{T_0}$ выполняется $K \subseteq L \Rightarrow Z(K) \subseteq Z(L)$.*

Доказательство. Отметим, что $\mathscr{L}_{T_0} \subseteq \mathscr{K}_{T_0}$. Проверим второе утверждение. Назовем *отмеченным* полилинейный многочлен (с некоммутативными переменными) и коэффициентами ± 1, содержащий переменные, у которого для любой центральной алгебры $M_n(F)$ все значения лежат в ее центре, и не равный тождественно нулю, где F — любое простое поле, т. е. $\mathbb{Q}$ или какое-то поле вычетов. Такой многочлен существует, например, это многочлен Ю. П. Размыслова ψ. Ясно, что он обладает тем же списком свойств и для всех $n \times n$ — матричных колец над полями. Так как любая n-алгебра $A_{\mathscr{F}}$ обладает в точности теми же тождествами, что и $M_n(F)$, где везде $F \rightleftharpoons Z(A)$, то ψ обладает тем же списком свойств и для всех n-алгебр (см. [29, 2, с. 47]). Для любой алгебры A образ ψ на A совпадает со всем центром F. Пусть $f \in Z(K)$ и $K \subseteq L$, где $K, L \in \mathscr{K}_{T_0}$. Для любой точки $p_0 \in X(K)$ выполняется $k(p_0) \in Z(K_{p_0})$. Поэтому существуют $t_1^{p_0}, \ldots, t_m^{p_0} \rightleftharpoons \bar{t}^{p_0}$, для которых $k(p_0) = \psi(\bar{t}^{p_0}(p_0))$. Это равенство выполняется и в некоторой открыто-замкнутой окрестности e_{p_0} точки p_0, т. е. $\forall p \in e_{p_0}\, (k(p) = \psi(\bar{t}_{p_0}(p)))$. Выберем дизъюнктное подпокрытие $e_{p_1}, \ldots, e_{p_l}$ всего $X(K)$. Склеим $t_1^{p_1}, \ldots, t_1^{p_l}$ на $e_{p_1}, \ldots, e_{p_l}$ (т. е. образуем $t_1 \rightleftharpoons \sum\limits_{i=1}^{l} t_1^{p_i} \cdot e_{p_i}$) и также образуем $t_2, \ldots, t_m$. Тогда $k = \psi(\bar{t})$. Так как $\bar{t} \subseteq L$, то $k = \psi(\bar{t})$ «в L» и для любой точки $p \in X(L)$ выполняется $k(p) = \psi(\bar{t}(p))$, откуда $k(p) \in Z(L_p)$. Итак, $k \in Z(L)$.

Теорема 10.3. *Если T_0 — модельно полная теория, то T модельно полная теория.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathscr{L}_{T_0}$ и $A \subseteq B$ и $F \rightleftharpoons Z(A)$, $G \rightleftharpoons Z(B)$. Тогда предложение 10.2 показывает, что $F \subseteq G$, и легко проверить, что любой базис $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в A над F является и базисом в B над G. Действительно, образуем $A \cdot G$ подалгебру в B над G, порожденную подкольцом A. Выполняется: $Z \rightleftharpoons Z_{A \cdot G}(A) \supseteq F, G$; $F, G \subseteq Z(A \cdot G)$ и $A \cdot G$ алгебра над F. Согласно [25, с. 289] получим $A \cdot G \cong A \otimes_F Z_{A \cdot G}(A)$ — изоморфизм двух F-алгебр вида $a \otimes c \mapsto a \cdot c$. Но — это изоморфизм и G-алгебр. Тогда $n = \dim_G B \geqslant \dim_G A \cdot G = \dim_G (A \otimes_F Z)_G = (\dim_F A) \cdot (\dim_G Z) = n \cdot [Z : G]$. Отсюда $Z = G$. Итак, $\dim_G A \cdot G = n$ и $A \cdot G = B$. Поэтому $B_G \cong (A \otimes_F G)_G$. Теперь любой базис $\{a_i\}$ в A_F превращается в базис $\{a_i \otimes 1\}$

в $(A \otimes_F G)$, т. е. в B_G. Рассуждая как в [23, с. 23], закончим доказательство. Например, модельно полны: теория кватернионов; класс n-алгебр, у которых центр вещественно или алгебраически замкнут; класс колец, каждое из которых элементарно эквивалентно кватернионам или кольцу $M_2(\mathbb{R})$ и т. д.

Следствие 10.4. *Пусть T_0^* — модельный компаньон для T_0. Тогда теория T^* (соответствующая классу $\mathcal{L}_{T_0^*}$) — модельный компаньон для теории T.*

Теорема 10.5. *Пусть T_0 — модельно полная теория. Тогда класс $\mathcal{K}_{T_0} \leftrightharpoons \{K \mid K \models \Phi_2 \wedge \{K_p\} \models T\}$ модельно полон и хорново аксиоматизируем. Кроме того, он булево абсолютен.*

Доказательство состоит в проверке булевой абсолютности (применяя 10.2 и пример 9) и затем применении 10.3 на основе теоремы 18б).

Например, следующие классы модельно полны: $\{K \mid \forall p\,(K_p \equiv \mathbb{H}, K \models \Phi_2\}$ и $\{K \mid (\forall p\,(K_p \equiv \mathbb{H} \vee K_p \equiv M_2(\mathbb{R})) \wedge K \models \Phi_2\}$.

10.6. Теорема. *Пусть T_0^* — модельный компаньон для T_0. Класс $\mathcal{K}_{T_0^*} \leftrightharpoons \{K \mid K \models \Phi_2 \wedge \{K_p\} \models T^*\}$ — хорново аксиоматизируем и модельный компаньон для класса $\mathcal{K}_{T_0}$.*

Коснемся полноты и разрешимости. Обозначим $\mathcal{L}_{T_0,\,\bar{c}}$ — подкласс класса $\mathcal{L}_{T_0}$ с фиксированным k — s соотношением и фиксированными структурными константами $\bar{c}$ из $\mathbb{Q}$. Он аксиоматизируем некоторой теорией $T_{\bar{c}}$.

Предложение 10.7. *Пусть T_0 — модельно полная и полная теория колец. Тогда класс $\mathcal{K}_{T_0,\,\bar{c}} \leftrightharpoons \{K \mid K \models \Phi_2 \wedge \{K_p\} \models T_{\bar{c}}\}$ хорново аксиоматизируем, модельно полон и полон, а также разрешим, если T_0 рекурсивно аксиоматизируема.*

Теорема 10.8. *Пусть T_0^* — теория алгебраически замкнутых полей. Хорново аксиоматизируемый класс $\mathcal{K}_{T_0^*}$ — модельный компаньон для класса $\mathcal{K}_{\mathcal{L}} \leftrightharpoons \{K \mid \{K_p \models T_{\mathcal{L}}\}$.*

Пример 11. Здесь излагается пример 10 в гораздо более простой ситуации матричных колец. Обозначим T множество всех предложений (в языке колец), истинных в матричном кольце $M_n(F)$, где F фиксированное поле, т. е. $T \leftrightharpoons Th(M_n(F))$. Аналогично $T^* \leftrightharpoons Th(M_n(F_1))$, где F_1 — алгебраически замкнутое поле. В [23] отмечается, что теория T^* модельно полна, а мы предположим, что теории $Th(F)$ и $Th(F_1)$ взаимно модельно вложимы. Тогда и теории T и T^* взаимно модельно вложимы, т. е. T^* — модельный компаньон для T. Теории T и T^* нормально и тотально автономны, так как в них содержится предложение Φ_5. Образуем классы $\mathcal{K} \leftrightharpoons \{K \mid \forall p\,(K_p \equiv M_n(F))\}$ и $\mathcal{K}^* = \{K \mid K \models \Phi_2 \wedge \forall p\,(K_p \equiv M_n(F_1))\}$, они соответствуют локальным теориям T и T^*, как обычно. Класс $\mathcal{K}^*$ булево правильный; более того, $K, L \in \mathcal{K}^*$, $K \subseteq L \Rightarrow Z(K) \subseteq Z(L)$. Проверим последнее. В $M_n(F_1)$ (где в F_1 во всем рассуждении можно заменить на любое коммутативное кольцо) существует набор элементов e_{ij}, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ («матричных единиц»), для которых $\sum\limits_{i=1}^{n} e_{ii} = 1$ и $e_{ij} \cdot e_{pq} = \delta_{jp} \cdot e_{iq}$ (где δ_{jp} — символ Кронекера), и это выражается E-формулой. По предложению 6 и теореме 9а) получим, что эта формула верна в K; полученную систему матричных единиц в K обозначим $\{e_{ij}\}$. Она является системой матричных единиц и в L. Легко видеть ([24, с. 82]), что $L \cong M_n(G)$, где $G \leftrightharpoons Z_L(\{e_{ij}\})$ — централизатор семейства $\{e_{ij}\}$ (т. е. $Z_L(X) \leftrightharpoons \{l \in L \mid \forall x \in X\,(l \cdot x = x \cdot l)\}$); здесь G — кольцо и l из G переходит в $l \cdot E$ при этом изоморфизме. В L по теореме Амицура — Левицкого [25, с. 148] и по тем же предложению 6 и теореме 9а) выполняется стандартное тождество порядка $2n$, что по теореме Лерона — Вопне [26, с. 135] означает: G — коммутативное кольцо. Теперь, если $k \in Z(K)$, то $k \in G$ и для любого l из L (пусть ему соответствует матрица m)

получим $kE\cdot m = m\cdot kE$. (Конец доказательства.) Все локализации кольца K из класса $\mathcal{K}^*$ — простые кольца. Действительно, если $K \equiv M_n(F)$, где F — поле, то в $M_n(F)$ и, следовательно, в K выполняется $\exists \bar{e}_{ij} \forall x, y \left(\sum\limits_{=1}^{n} e_{ii} = 1 \wedge e_{ij}\cdot e_{pq} = \delta_{jp}\cdot e_{iq} \wedge e_{ij}\cdot x = x\cdot e_{ij}\right)$. Как и выше, $K \cong M_n(G)$, где $G \leftrightarrows Z(\{e_{ij}\})$ и G — центр в K. Ясно, что $G \equiv F$, в частности, G — поле. Двусторонние идеалы в $M_n(G)$ вида $M_n(a)$, где a — двусторонний идеал в G, поэтому K — простое кольцо. Итак, класс $\mathcal{K}^*$ булево правильный и булево простой (согласно примеру 9). Как отмечалось в примере 9, он состоит из бирегулярных колец, а потому $\forall K \in \mathcal{K}^* (K \models \Phi_1)$, т. е. $\mathcal{K}^*$ нужного вида. Следовательно, $Th\mathcal{K}^*$ — модельно полная, хорнова теория и модельный компаньон для класса $\mathcal{K}$. Отсюда можно обычным способом переходить к полноте и разрешимости теории $Th\mathcal{K}^*$. Например, если поле F_1 имеет разрешимую теорию, то теория $M_n(F_1)$ — разрешимая ([23, с. 36]) и по теореме 21б) теория $Th\mathcal{K}^*$, кроме сказанного выше, полная и (если ThF_1 — рекурсивно аксиоматизируема) разрешимая.

Аналогично получаем: если T — теория n-матричных колец над какими-то коммутативными регулярными кольцами, то теория T^* n-матричных колец над какими-то коммутативными регулярными, алгебраически замкнутыми, безатомными кольцами — модельный компаньон для T и то же верно для соответствующих классов $\mathcal{K}^* \leftrightarrows \{K \mid K \models \Phi_2 \wedge \{K_p\} \models T^*\}$ и $\mathcal{K} \leftrightarrows \{K \mid \{K_p\} \models T\}$.

Булево абсолютным назовем булево правильный и булево простой класс (см. пример 9).

II.3. Задача Макинтаера: модельный компаньон локально аксиоматизируемого класса. Формулировка задачи Макинтаера и соответствующие ссылки приводятся в начале п. II.2 вплоть до предложения 4.

Теорию T назовем *автономной* (*нормально автономной*), если всякая ее модель K вкладывается в такое кольцо F, что $\{F_p\} \models T$ (соответственно F — еще и нормальное кольцо).

Обозначим $X_1(K)$ множество всех собственных идеалов в $B(K)$ (аналогично и для произвольной алгебры Ω). Если $q \in X_1(K)$, то $\bar{q} = q\cdot K$ идеал в K и обозначим $\{K_q\} = \{K/\bar{q} \mid q \in X_1(K)\}$. Теорию T назовем *тотально автономной*, если для любой ее модели F выполняется $\{F_q\} \models T$.

Пример 12. Нормально и тотально автономной является любая теория T, в которой $T \vdash \Phi_5$ (и тем более $T \vdash \Phi_4$). Все классы колец, упомянутые в примере 9, имеют такие локальные теории.

Для теории T в дизъюнктивной нормальной форме напомним обозначение $T' = \{\varphi' \mid \varphi \in T\}$, где φ' определяется перед теоремой 12.

Теорема 18. а) *Класс $\mathcal{K}^*$ аксиоматизируем и притом хорново аксиоматизируем. Если $\mathcal{K}_1 = \{K \mid \{K_p\} \models T,\ K \models \Phi_1\}$, где T — AE-теория (или при отсутствии условия $K \models \Phi_1$ — AE-позитивная теория), то класс $\mathcal{K}_1$ хорново аксиоматизируем, а именно, $\mathcal{K}_1 = \{K \mid K \models T',\ K \models \Phi_1\}$.*

б) *Если $\mathcal{K}^*$ — булево абсолютный класс, то — он модельно полный класс.*

в) *Если T^* — нормально автономная теория, то $\mathcal{K}$ вкладывается в $\mathcal{K}^*$.*

г) *Пусть $T \subseteq T^*$. Если T^* — нормально автономная теория, а $\mathcal{K}^*$ — булево абсолютный класс, то $\mathcal{K}^*$ — хорнов модельный компаньон для $\mathcal{K}$. Выполняется $\mathcal{K}^* \subseteq \mathrm{Mod}\ T' \subseteq \mathcal{K}$. При тех же условиях $\Phi_1 + \Phi_2 + (T^*)'$ — модельный компаньон для T'.*

д) *Если T^* — нормально автономная теория, T — тотально автономная теория, а $\mathcal{K}^*$ — булево абсолютный класс, то $\mathcal{K}^*$ — хорнов модельный компаньон для $\mathcal{K}$ (подразумевается, что модельная вложимость T^* в T выводима в ZFC).*

Доказательство. а) Класс $\mathcal{K}_1 = \{K \mid \{K_p\} \models T^*,\ K \models \Phi_1\}$ хорново аксиоматизируем, точнее $\mathcal{K}_1 = \{K \mid K \models (T^*)',\ K \models \Phi_1\}$. Действительно, если $K \in \mathcal{K}_1$, то по предложению 4 и теореме 12 получим

$K \models \varphi'$, где $\varphi \in T^*$. Наоборот: по теореме 12 и предложению 5 получим $\{K_p\} \models \varphi$. Все формулы φ' и формула Φ_1 хорновы. Класс $\mathcal{K}^*$ выделяется из класса $\mathcal{K}_1$ хорновой аксиомой Φ_2. Второе утверждение этого пункта обобщает первое, так как модельно полная теория AE-аксиоматизируема. Если $K \in \mathcal{K}_1$, то по предложению 6 и теореме 12 получим $K \models T'$. Если $K \models T'$, то по теореме 12 и предложению 5 получим $\{K_p\} \models T$.

б) Пусть ψ — примитивная формула с параметрами из K, где $K \in \mathcal{K}^*$, т. е. утверждение о существовании решения системы уравнений и неравенств с коэффициентами из K, а L — любое расширение кольца K в классе $\mathcal{K}^*$. Обозначим ψ_l — утверждение о существовании решения у подсистемы этой системы, состоящей из всех равенств и какого-то одного неравенства или только всех равенств; индекс l в произвольном порядке нумерует такие подсистемы. В [8], по существу, доказано, что при условии нормальности и безатомности кольца L выполняется $(L \models \psi) \Leftrightarrow [\forall l\, (\{p \in X(L) \mid L_p \models \psi_l\} \neq \varnothing), \bigcup\limits_l \{p \mid L_p \models \psi_l\} = X(L)]$. Мы также проверим сейчас эту эквивалентность. По предложению 4 множество в фигурных скобках совпадает с $[\![\psi_l]\!]_{T(L)}$ и является открыто-замкнутым множеством. Слева направо эта эквивалентность очевидна. Наоборот: обозначим $[\![\psi_l]\!]_{T(L)} = u_l \in B(L)$. Образуем булеву подалгебру в $B(L)$, порожденную конечным множеством $\{u_l\}$. Она конечна и потому атомна. В u_1 выберем атом v_1. Если в u_2 нет атома кроме v_1, то (иначе выберем в u_2 атом $v_2 \neq v_1$) произвольно разделим v_1 (в безатомной алгебре $B(L)$) на v_1 и v_2 и снова получим $v_1 \leqslant u_1$, $v_2 \leqslant u_2$, $v_1 \neq v_2$. Здесь используется безатомность кольца L. Продолжая этот процесс по всем l, получим систему попарно дизъюнктных элементов $\{v_l\} \subseteq B(L)$, $0 \neq v_l \leqslant u_l$. Дополним ее такими $w_l \leqslant u_l$, что $\{\ldots v_l \ldots, w_l \ldots\}$ — разложение 1. По достижимости (теорема 5) существуют $\bar{k}_l$, для которых $u_l \leqslant [\![\psi_l(\bar{k}_l)]\!]$. Склеим эти $\bar{k}_\alpha$ на v_l и $\bar{k}_l$ на w_l, получим $\bar{k} \in L$. Тогда $\bar{k}$ — решение системы ψ в L. Используя эту эквивалентность, получим $(L \models \neg\psi) \Leftrightarrow (\bigvee\limits_l ([\![\psi_l]\!] = 0)) \vee (\bigcup [\![\psi_l]\!] < 1)$, где вместо $\varnothing$ и $X(L)$ пишем 0 и 1.

Первый дизъюнктивный член последовательно перепишем так: $\bigvee\limits_l ([\![\neg\psi_l]\!] = 1)$, по модельной полноте теории T^* найдется E-формула ψ_l' (с бескванторной частью $\bigvee\limits_s \psi_{ls}$), эквивалентная $\neg\psi_l$ в моделях для T^*, т. е. $\bigvee\limits_l ([\![\psi_l']\!] = 1)$; по достижимости (теорема 5) $\bigvee\limits_l \exists\bar{k}\, (\bigcup\limits_s [\![\psi_{ls}]\!] = 1)$, т. е. $\bigvee\limits_l \exists\bar{k}\exists\bar{e}_{ls} \in B(L)\, (e_{ls} \leqslant [\![\psi_{ls}]\!] \wedge \prod\limits_s (1 - e_{ls}) = 0)$. Последнее записывается в виде $\exists\bar{k}\exists\bar{e}_{ls} \bigvee\limits_l \forall e_0 \Big[\prod\limits_s (1 - e_{ls}) = 0 \wedge e_{l_1}\cdot k_1 = e_{l_1}\cdot t_1 \wedge \ldots \wedge (e_0\cdot k_2 = e_0\cdot t_2) \Rightarrow e_0 \leqslant 1 - e_{l_1}) \wedge \ldots\Big]$, где $k_1 = t_1$ — одно из равенств, а $k_2 \neq t_2$ — одно из неравенств, входящих в ψ_{l_1}, а e_{ls}, e_0 — специальные переменные по $B(L)$.

Аналогично, для второго дизъюнктивного члена получим цепочку эквивалентностей: $\exists p \in X(L) \bigwedge\limits_l (p \notin [\![\psi_l]\!])$, $\exists p \in X(L)\, (p \notin [\![\bigvee\limits_l \psi_l]\!])$, $[\![\neg\bigvee\limits_l \psi_l]\!] > 0$, по модельной полноте теории T^* найдется E-формула ψ с бескванторной частью $\bigvee\limits_s \psi_s$, для которой $[\![\psi]\!] > 0$, по достижимости $\exists\bar{k}\, ([\![\bigvee\limits_s \psi_s]\!] \geqslant 0)$, $\exists\bar{k}\exists e \bigvee\limits_s (e \neq 0 \wedge [\![\psi_s]\!] \geqslant e)$. Последнее записывается в виде $\exists\bar{k}\exists e \bigvee\limits_s \forall e_0\, (e_0 \neq 0 \wedge e\cdot k_1 = e\cdot t_1 \wedge \ldots \wedge (e_0\cdot k_2 = e_0\cdot t_2 \Rightarrow e_0 \leqslant 1 - e) \wedge \ldots)$, где $k_1 = t_1$ — одно из равенств, $k_2 \neq t_2$ — одно из неравенств в ψ_s, а e, e_0 — специальные переменные по $B(L)$.

По булевой абсолютности класса $\mathscr{K}^*$ и предложению 8б) получим, что $\neg\psi$ переносится из K в L, где $K \subseteq L$, $K, L \in \mathscr{K}^*$. Так как для аксиоматизируемого класса $\mathscr{K}^*$ выполняется критерий Робинсона, то получим, что этот класс модельно полон.

в) Если $K \in \mathscr{K}$, то K содержится в $\prod\limits_p K_p$, где $K_p \models T$ (и K_p — неразложимое кольцо). По определению модельного компаньона K_p вложим в F^p, модель T^*. По условию нормальной автономности теории T^* можно считать F^p нормальным кольцом, у которого все локализации — модели T^*. Определим в F^p дискретную топологию. Пусть X_0 — канторовский дисконтинуум (или любой вполне несвязный, отделимый компакт без изолированных точек). Пусть $\overline{F^p} = C(X_0, F^p)$ — все непрерывные функции из X_0 в F^p. Кольцо $\overline{F^p}$ состоит из кусочно постоянных F^p-значных функций на X_0 с конечным числом значений. Кольцо F^p включается в $\overline{F^p}$. Мы проверим чуть позже, что $\overline{F^p} \in \mathscr{K}^*$.

В силу хорновости класса $\mathscr{K}^*$ он замкнут относительно любых (даже фильтрованных) произведений. Поэтому $\left(\prod\limits_p \overline{F^p}\right) \in \mathscr{K}^*$ и, следовательно,

$$K \rightarrowtail \prod_p K_p \rightarrowtail \prod_p F^p \rightarrowtail \prod_p \overline{F^p} \in \mathscr{K}^*.$$

Итак, рассмотрим кольцо $\overline{F} = C(X_0, K)$, где F — нормальное кольцо, все локализации которого являются моделями для T^*. Выполняется $B(\overline{F}) = C(X_0, B(F))$ и множество $\langle x_0, p_0\rangle$, по определению равное $\{f \in B(\overline{F}) \mid f(x_0) \in p_0\}$,— простой идеал в $B(\overline{F})$ для любых $x_0 \in X$ и $p_0 \in X(F)$. Любая точка из $X(F)$ имеет такой вид, т. е. символически $X(F) = X_0 \times X(F)$, так как для $p \in X(\overline{F})$ существует $x_0 \in X_0$, для которого $p_0 = \{f(x_0) \mid f \in p\}$ не содержит единицу из $B(F)$ (иначе $\{\{x_0 \in X_0 \mid f(x_0) = 1\} \mid f \in p\}$ — открытое покрытие X_0, а его подпокрытие приводит к таким $f_1, \ldots, f_n \in p$, что $f_1 \vee \ldots \vee f_n \in p$ и $f_1 \vee \ldots \vee f_n \equiv 1$, противоречие). Такое p_0 — простой идеал в $B(F)$. Поэтому $p \subseteq \langle x_0, p_0\rangle$; в силу максимальности p (все происходит в булевых алгебрах) это возможно только, если $p = \langle x_0, p_0\rangle$. Далее, $\overline{\langle x_0, p_0\rangle} = \{f \in \overline{F} \mid f(x_0) \in \bar{p}_0\}$, где $\bar{p}_0 = p_0 \cdot F$, а $\overline{\langle x_0, p_0\rangle} = \langle x_0, p_0\rangle \cdot \overline{F}$. Поэтому $(\overline{F})_{\langle x_0, p_0\rangle} = \overline{F}/\overline{\langle x_0, p_0\rangle} \simeq F/\bar{p}_0 = F_{p_0}$, где p_0 пробегает $X(F)$. По условию для всех F_{p_0} выполняется $F_{p_0} \models T^*$, отсюда $\{(\overline{F})_{\langle x_0, p_0\rangle}\} \models T^*$. Проверим нормальность $\overline{F}$. Если $f \in \overline{F}$, то положим $e_0(x) = e_1$, где e_i — элемент из F, соответствующий в силу нормальности F элементу $f(x)$ из F; такое e_0 удовлетворяет определению нормальности для f в $\overline{F}$. Допустим, f — атом в $B(\overline{F})$. Хотя бы одна «ступенька» для f, например $f(x_0)$, отлична от 0. Эта ступенька над открыто-замкнутым множеством, содержащим хотя бы две различные точки. Удаляя одну из них вместе с ее открыто-замкнутой окрестностью, получим, что f — не атом.

г) Из пунктов б) и в) сразу вытекает первое утверждение. Если $K \in \mathscr{K}^*$, то $K \models \Phi_1 + (T^*)'$ и тем более $K \models T'$. Если $K \models T'$, то по теореме 12 и предложению 5 получим $K \in \mathscr{K}$. Отсюда вытекает последнее утверждение.

д) К пункту г) нужно добавить только вложимость класса $\mathscr{K}^*$ в класс $\mathscr{K}$ (кроме этого в пункте г) нигде не используется условие, которое мы сейчас хотим устранить). Это следует из общей теоремы 19, которая будет доказана ниже.

Теорема 19. *Пусть теория T модельно вложима в теорию T_1 (и это выводимо в ZFC). Если T — AE-теория, а T_1 — тотально автономная теория и K нормально (т. е. $K \models \Phi_1$), $\{K_p\} \models T$, то K вложимо в такое кольцо L, что $L \in \mathscr{K}_1 = \{L \mid \{L_p\} \models T_1\}$.*

Чтобы вывести из этой теоремы теорему 18д), положим $T = T^*$, $T_1 = T$. По определению модельного компаньона T^* модельно вложима в T (а в пункте д) оговаривается выводимость в ZFC этого факта). Теория T^*, как известно, является AE-теорий, а K из $\mathcal{K}^*$ нормально.

Замечание. 1) В пункте в) теоремы 18 от модельной полноты T^* использовались только два свойства: замкнутость $\mathcal{K}^*$ относительно произведения и модельная вложимость T в T^*. Таким образом теоремы 18в) и 19 дают примеры «теорем вложения для локально аксиоматизируемых классов». 2) В пункте г) теоремы 18 доказана формула $(T')^* = (T^*)'$, если условиться, что запись $(T^*)'$ автоматически добавляет аксиомы $\Phi_1 + \Phi_2$.

Следствие 1. *Если в условиях пункта* д) *теоремы* 18 *класс* $\mathcal{K}$ *аксиоматизируем, то* $\Phi_1 + \Phi_2 + (T^*)'$ — *хорнов модельный компаньон для* $Th\mathcal{K}$.

В следующих трех следствиях предполагается $T \subseteq T^*$.

Следствие 2. *Если* $\mathcal{K}$ — *аксиоматизируемый подкласс класса всех бирегулярных колец, а* $\mathcal{K}^*$ — *булево правильный класс, то* $\Phi_1 + \Phi_2 + (T^*)'$ — *хорнов модельный компаньон для* $\mathcal{K}$.

Следствие 3. *Если* $\mathcal{K}$ — *аксиоматизируемый подкласс класса всех строго риккартовых колец, а* $\mathcal{K}^*$ — *булево простой, то* $\Phi_1 + \Phi_2 + (T^*)'$ — *хорнов модельный компаньон для* $Th\mathcal{K}$.

Следствие 4. *Если* $\mathcal{K}$ — *аксиоматизируемый подкласс класса всех абелевых регулярных колец, то* $\Phi_1 + \Phi_2 + (T^*)'$ — *хорнов модельный компаньон для* $Th\mathcal{K}$.

Назовем *нормальным* класс $\mathcal{K}$, если для любого $K \in \mathcal{K}$ существует $L \in \mathcal{K}$, для которого $K \subseteq L$, $L \models \Phi_1$.

Следствие 1 к теореме 19. *Пусть теории* T *и* T_1 *удовлетворяют условиям теоремы* 19. *Если* $\mathcal{K}$ — *нормальный класс, то* $\mathcal{K}$ *вложим в* $\mathcal{K}_1$.

Назовем *квазипучковым* кольцо L, для которого условие пучковости выполняется относительно какой-то правильной булевой алгебры $\mathbb{B} \subseteq B(L)$.

Следствие 2 к теореме 19. *Пусть кроме условий теоремы* 19 *выполняется* $\forall x \exists f\,(x \models T \Rightarrow x \subseteq f \wedge f \models T_1 \wedge f \models T_2)$, *где* T_2 — *хорнова теория. Тогда для соответствующего* L *выполняется* $L \models T_2$ *и* L *квазипучковое* (*пучковое, если* $T_1 \vdash \Phi_5$).

Если положить $T = T_1$, то соответствующее кольцу K кольцо L обладает естественными свойствами «пучкового замыкания кольца K»; соответствующий T класс $\mathcal{K}$ замкнут относительно «пучкового замыкания».

Доказательство теоремы 19. Пусть K удовлетворяет условиям теоремы. По предложению 6 получим $[\![T]\!]_{\mathcal{T}(K)} = 1$, отсюда по теореме 10б) получим $[\![T]\!]_{B(K)} = 1$. Последнее по теореме 16е) означает $[\![T]\!]_{B,K'} = 1$, или, что то же самое, $[\![K' \models T]\!]_B = 1$, где $\mathbb{B} = \mathbb{B}(K)$, и эта оценка определялась в примере 8 (т. е. речь идет об оценке в языке ZF с семейством параметров V^B, см. пример 1), а объект $K' = \mathcal{F}_1'$ определяется перед теоремой 16е). Здесь можно было сослаться и на теорему 16а). По условию в ZFC выводимо $\forall x \exists f\,(x \models T \Rightarrow x \subseteq f \wedge f \models T_1)$. Отсюда по достижимости в V^B получим $[\![K' \subseteq f \wedge f \models T_1]\!]_B = 1$, где $f \in V^B$. Обозначим $\hat{f}^B = L$. Снова по теореме 16е) получим $K \subseteq L$ (в смысле $k \mapsto p_k$) и, проверив включение $L \in \mathcal{K}_1$, получим доказательство теоремы.

Действительно, $\mathbb{B}$ вкладывается в $B(L)$ по правилу $b \mapsto b \cdot 1 + \neg b \cdot 0$ (правая часть — склейка 1 и 0 в f). Это вложение обозначим h. Обозначим $L_{(p_0)} = L/\overline{h(p_0)} = h(p_0) \cdot L$, где в левой части p_0 — точка стоунова пространства $S(\mathbb{B})$ булевой алгебры $\mathbb{B}$, а в правой части $\overline{h(p_0)}$ — идеал в L. Проверим, что $L_{(p_0)}$ совпадает со «слоем» f в точке p, т. е. с факторизацией L отношением эквивалентности $(k \sim_{p_0} t) \Leftrightarrow ([\![k = t]\!]_B \notin p_0)$ (см. с. 115), а также что $([\![f \models \varphi(k_1, \ldots, k_n)]\!]_B = 1) \Leftrightarrow \{L_{(p_0)}\} \models \varphi([k_1]_{p_0}, \ldots, [k_n]_{p_0})$, где p_0 пробегает $S(\mathbb{B})$ и $k_1, \ldots, k_n \in L$. Первое утверждение означает: $\exists b \in p_0\,(h(b) \cdot (k - t) = k - t) \Leftrightarrow [\![k = t]\!]_B \notin p_0$. Слева направо: $h(\neg b) =$

$= 1 - h(b)$, $(1 - h(b))\cdot(k - t) = 0$ в L, далее $\neg b \notin p_0$ и $[\![(1 - h(b))(k - t) = 0]\!]_B = 1$, $\neg b \leqslant [\![k - t = 0]\!]_B$. Наоборот: пусть $b = [\![k = t]\!]_B \notin p_0$, $b \leqslant [\![h(b)\cdot(k - t) = 0]\!]_B$ и $\neg b \leqslant [\![h(b)\cdot(k - t) = 0]\!]_B$, $h(b)\cdot(k - t) = 0$ в L и $\neg b \in p_0$, $h(\neg b)\cdot(k - t) = k - t$. Второе утверждение проверяется в форме $p_0 \in [\![f \models \varphi(k)]\!]_B \Leftrightarrow L_{(p_0)} \models \varphi([k]_{p_0})$ для связок $\wedge$, $\neg$, $\exists$ индукцией по длине формулы φ (см. теоремы 4, 2а)). Итак, $\{L_{(p_0)}\} \models T_1$.

По любому $p \in X(L)$ образуем $p_0 = h^{-1}(p) \subseteq \mathbb{B}$. При этом $p_0 \in S(\mathbb{B})$. Обозначим $a = \overline{h(p_0)}$ идеал в L. Тогда $a \subseteq \bar{p}$ и $L_p = L/\bar{p} \simeq (L/a)(\bar{p}/a) = L_{(p_0)}/\overline{p/a}$. Заметим, что $q = p/a$ обладает свойствами: $q \subseteq B(L/a)$ и q замкнуто относительно $\vee$ и не содержит $[1]_a$: если $[1]_a = [e]_a$, где $e \in p$, то $1 - e = e_0\cdot r$, $e_0 \in h(p_0)$, $1 = e + e_0\cdot r = (e \vee e_0)\cdot 1$, $e \vee e_0 \in p$ — противоречие. Добавим к q все элементы $[l]_a$ из $B(L/a)$, которые мажорируются каким-то $[e]_a$ из q: полученное таким образом q_1 — собственный идеал в $B(L/a)$ и $\bar{q}_1 = q$. Итак, $L_p = L_{(p_0)}/\bar{q}_1$, где $q_1 \in X_1(L_{(p_0)})$, и по условию получим $L_p \models T_1$.

II.4. Модельный компаньон класса локализаций. Полнота теории локально аксиоматизируемого класса. Рассмотрим теперь вопрос о переносе модельной полноты в «обратную сторону» с классов $\mathcal{K}^*$ и $\mathcal{K}$ на их локальные теории. Для этого в общем случае удобно следующее расширение понятия булевой простоты класса (см. предложение 8). Пусть $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}$ — два класса. Назовем класс $\mathcal{K}_1$ *булево простым* для класса $\mathcal{K}$, если $\forall K \in \mathcal{K}\ \forall L \in \mathcal{K}_1\ (K \subseteq L \Rightarrow \exists p_1 \in X(L)\ \exists p \in X(K)\ \forall k \in K\ (p \supseteq p_1 \cap K \wedge \exists e_2 \in p_1\ (e_2\cdot k = k) \Rightarrow \exists e \in p\ (e\cdot k = k))$. Однако в теореме 20 достаточно более слабого условия на классы $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}$, чем условие «класс $\mathcal{K}_1$ — модельный компаньон для класса $\mathcal{K}$ и классы $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}$ взаимно булево простые». Это условие временно обозначим $(*)$. Слабое условие учитывает специальный вид классов $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}$. Напомним, что кольцо $\bar{L} = C(X_0, L)$ определяется по кольцу L в доказательстве теоремы 18в). Класс $\mathcal{K}_1$ назовем *слабым модельным компаньоном для класса* $\mathcal{K}$, если: 1) для любых двух колец $\bar{L}_1$ и $\bar{L}_2$, где L_1, $L_2 \models T_1$, из $\mathcal{K}_1$ и любой хорновой $AEAE$-формулы φ с константными параметрами из $\bar{L}_1$ (т. е. параметрами вида $\lambda(x) \equiv \lambda_0$, где $\lambda_0 \in L_1$, а x пробегает X_0), если $\bar{L}_1 \models \varphi$, $\bar{L}_1 \subseteq \bar{L}_2$, то $\bar{L}_2 \models \varphi$; 2) если $K \models T$, $K \in \mathcal{K}$, то K можно вложить в некоторое L из $\mathcal{K}_1$; и если $L \models T_1$, $\bar{L} \in \mathcal{K}_1$, то $\bar{L}$ можно вложить в некоторое K из $\mathcal{K}$; 3) если $K \models T$, $K \in \mathcal{K}$ и $K \subseteq L$, где $L \in \mathcal{K}_1$, то существуют $p \in X(K)$ и $p_1 \in X(L)$, для которых $p \supseteq p_1 \cap K$ и $\forall k \in K \cap \bar{p}_1\ (k \in \bar{p})$; 4) если $L \models T_1$, $\bar{L} \in \mathcal{K}_1$ и $\bar{L} \subseteq K$, где $K \in \mathcal{K}$, то существуют $p \in X(\bar{L})$ и $p_1 \in X(K)$, для которых $p \supseteq p_1 \cap \bar{L}$ и $\forall l \in L\ (l \in \bar{p}_1 \Rightarrow l \in \bar{p})$. Ясно, что условие $(*)$ влечет, что класс $\mathcal{K}_1$ — слабый модельный компаньон для класса $\mathcal{K}$. В следующей теореме обозначим T_2 часть теории T_1, состоящую из формул вида EAE, т. е. $T_2 = (T_1)_{EAE}$.

Теорема 20. *Пусть* $\{K \mid \{K_p\} \models T_1,\ K \models T_1' + \Phi_1 + \Phi_2\} \subseteq \mathcal{K}_1 \subseteq \{K \mid \{K_p\} \models T_1\}$, $\mathcal{K} = \{K \mid \{K_p\} \models T\}$ *и класс* $\mathcal{K}_1$ — *слабый модельный компаньон для класса* $\mathcal{K}$. *Если* $T \vdash \Phi_5$ *и* $T_1 \vdash \Phi_5$, *то теория* T_1 — *модельный компаньон для теории* T.

(Если $T \subseteq T_1$, то условие 4 в определении слабого модельного компаньона можно опустить.)

Доказательство. Покажем модельную полноту теории T_1. Пусть $F_1 \subseteq F_2$ — две модели для T_1, а ψ — примитивная над F_1 формула, $F_1 \models \neg\psi$. Образуем кольца $\bar{F}_1 = C(X_0, F_1)$ и $\bar{F}_2 = C(X_0, F_2)$; $\bar{F}_1 \subseteq \bar{F}_2$ (см. доказательство теоремы 18в). Локализации $\bar{F}_1$ и $\bar{F}_2$ совпадают с локализациями F_1 и F_2. Так как $T_1 \vdash \Phi_5$, то $\{(\bar{F}_1)_p\} \models T_1$, $\bar{F}_1 \models \Phi_1 \wedge \Phi_2$ и, более того, все локализации $\bar{F}_1$ (и $\bar{F}_2$) совпадают с F_1 (соответственно с F_2). В этой ситуации индукцией по длине произвольной формулы φ проверим следующее обобщение предложения 6: $\{(\bar{F}_1)_p\} \models \varphi(\lambda_1^p, \ldots, \lambda_n^p) \Rightarrow [\![\varphi(\lambda_1, \ldots, \lambda_n]\!]_{\mathcal{T}(F_1)} = 1$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — постоянные из F_1. Доказательство предложения 6 нужно только дополнить тем соображением, что $(\bar{F}_1)_p$ изоморфно F_1 по формуле $[f]_{\bar{p}} \mapsto f(x_0)$, где x_0 соответствует p. Итак, $\bar{F}_1, \bar{F}_2 \in \mathcal{K}_1$. Для A-формулы $\neg\psi$ (как и для любой формулы с константными параметрами) в нормальном кольце выполняется $[\![\neg\psi]\!]_{\mathcal{T}(\bar{F}_1)} = 1$. По теореме 12 $\bar{F}_1 \models (\neg\psi)'$. Тогда по условию $\bar{F}_2 \models (\neg\psi)'$ и по теореме 12 $[\![\neg\psi]\!]_{\mathcal{T}(\bar{F}_2)} = 1$, т. е. $F_2 \simeq (\bar{F}_2) \models \neg\psi$.

Пусть K — модель для теории T. Так как $T \vdash \Phi_5$, то $K \in \mathcal{K}$. По условию $K \subseteq L \in \mathcal{K}_1$. По условию булевой простоты найдутся $p_1 \in X(L)$ и и $p \in X(K)$, для которых $p \supseteq p_1 \cap K$, т. е. $p = p_1 \cap K = \{0\}$. Отсюда $K \to L_{p_1}$, $k \mapsto [k]_{\bar{p}_1}$ — вложение и по условию $L_{p_1} \models T_1$. Если $T \subseteq T_1$, то все доказано, причем условие 4 из определения слабого модельного компаньона не использовалось.

Осталось проверить, что T_1 модельно вкладывается в T. Пусть $L \models T_1$. Образуем $\bar{L} \in \mathcal{K}_1$. По условиям $\bar{L} \subseteq K \in \mathcal{K}$ и найдутся $p_1 \in X(K)$, $p \in X(\bar{L})$, для которых $p \supseteq q = (p_1 \cap \bar{L})$ и p обладает соответствующими свойствами. Как мы видели в доказательстве теоремы 18в), p вида $\langle x_0, p_0 \rangle$, где $p_0 \in X(L)$, т. е. $p_0 = \{0\}$. Поэтому $\bar{p} = \{f \in \bar{L} \mid f(x_0) = 0\}$ и положим $L \rightarrowtail K/\bar{p}_1$, $e \mapsto [e]_{\bar{p}_1}$. По условию это действительно вложение. Отсюда получаем вложение L в $K_{p_1} \models T$.

С л е д с т в и е. *Класс $\mathcal{K}_7$ всех абелевых регулярных колец не имеет в качестве слабого (обычного) модельного компаньона никакого класса вида $\mathcal{K}_1$ (из теоремы 20), где $T_1 \vdash \Phi_5$ (соответственно и $T_1 \vdash$ «простое»).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если такое $\mathcal{K}_1$ является модельным компаньоном для $\mathcal{K}_7$, то теория T_1 является модельным компаньоном для теории тел, что невозможно.

З а м е ч а н и е. Условия $T \vdash \Phi_5$, $T_1 \vdash \Phi_5$ также можно ослабить в в теореме 20 и этом следствии.

Назовем 1-*примитивной* такую примитивную формулу, в которой не более одного неравенства. Будем говорить: *теория T разрешает класс формул* Σ, если для любой формулы φ из Σ либо $T \vdash \varphi$, либо $T \vdash \neg\varphi$.

Т е о р е м а 21.а) *Пусть локальная теория T разрешает все 1-примитивные предложения и все кольца K из класса $\mathcal{K} = \{K \mid \{K_p \models T\}$ имеют множество $B(K)$ бесконечным. Тогда теория $Th\mathcal{K}$ разрешает все E-предложения.*

б) *Если $\mathcal{K}^*$ — булево абсолютный класс и (модельно полная) теория T^* разрешает все 1-примитивные предложения, то теория $(Th\mathcal{K}^*) = (\Phi_1 + \Phi_2 + (T^*)')$ — полная, модельно полная, хорнова.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Пусть $K \in \mathcal{K}$, а ψ — примитивное предложение. (Условие на K обеспечивается, например, безатомностью K^2.) Тогда все ψ_l, $1 \leqslant l \leqslant L$, образованные по ψ, как в доказательстве теоремы 18б), являются 1-примитивными предложениями. По условию либо $T \vdash \psi_l$ для всех l, либо $T \vdash \neg\psi_{l0}$ для некоторого l_0. В первом случае $\forall p\ (K_p \models \bigwedge_l \psi_l)$. Выберем в $X(K)$ ровно L различных точек $p_1, \ldots, p_L$. По отделимости у у них найдутся попарно дизъюнктные окрестности $u_1, \ldots, u_L$. В p_1 выполняется ψ_1 на некоторых $k_1(p_1), \ldots, k_n(p_1)$, равенства из ψ_1 выполняются и на некоторой открыто-замкнутой окрестности u_1' внутри u_1. Поэтому $k_1, \ldots, k_n$ на u_1' удовлетворяют ψ_1. Точно так же найдем $t_1, \ldots, t_n$ на u_L', удовлетворяющие ψ_L. Склеим все $k_1, \ldots, t_1$ и т. д. и получим $k_1, \ldots, k_n$ на $u_1' \cup \ldots \cup u_L'$, удовлетворяющие ψ. На дополнение $u_1' \cup \ldots \cup u_L'$ продолжим эти $k_1, \ldots, k_n$ так, чтобы выполнялись все равенства из ψ. Итак, $K \models \psi$. Во втором случае $\forall p\ (K_p \models \neg\psi_{l_0})$, отсюда (и без нормальности-безатомности) получим $K \models \neg\psi$. Теперь легко получаем разрешимость всех E-формул.

б) Сразу получаем это утверждение по п. а) и теореме 18а, б) с учетом того, что в модельно полной теории любая формула эквивалентна E-формуле.

Следствие. *Если в условиях теоремы 21б) T^* — рекурсивно аксиоматизируемая теория, то $Th\mathcal{K}^*$ разрешимая.*

Замечание. Эта теорема верна и для расширения языка колец произвольным множеством констант, одновременно интерпретируемых во всех кольцах K из $\mathcal{K}$.

II.5. Перенос локальной теории в локально аксиоматизируемый класс. Теория T «сильнее» теории T', иначе говоря, T — теория слоев, а T' — теория глобальных объектов. Поэтому представляют интерес утверждения такого типа: если $T \vdash \psi$, то $T' \vdash \psi'$, где ψ' получается из ψ некоторым синтаксическим переводом (иначе говоря, если в слоях ψ, то в глобальных объектах ψ').

Обозначим $\varphi\neg$ формулу в дизъюнктивной нормальной форме, классически преобразованную из формулы $\neg\varphi$. Обозначим $\varphi\neg\neg$ формулу, полученную из φ в предваренной форме добавлением $\neg\neg$ перед каждой связкой $\exists$.

Предложение 9. *Пусть K — нормальное кольцо.*

а) *Предикат $[\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{T}(K)} = 0$ выразим в K, т. е. существует синтаксический перевод $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \varphi^0(x_1, \ldots, x_n)$, для которого этот предикат эквивалентен $K \models \varphi^0(\bar{k})$ (ср. с теоремой 12). Здесь φ в дизъюнктивной нормальной форме.*

б) *Предикат $[\![\varphi\neg\neg(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}(K)} \geqslant e$, $e \in B(K)$ выразим в K в том же смысле (обозначим $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \varphi^+(x_1, \ldots, x_n, e)$ соответствующий синтаксический перевод). Здесь φ в дизъюнктивной нормальной форме.*

Доказательство. а) Сначала укажем синтаксический перевод $\varphi \mapsto \varphi^0$. Если φ — бескванторная, т. е. $\varphi = \bigvee_s \psi_s$, то $\varphi^0 = \forall e \exists e_0 \forall t_1 \exists t \bigwedge_s ([e^2 = e \wedge e \cdot t = t \cdot e \wedge e \cdot k_1 = e \cdot t_1 \wedge \ldots \wedge (e_0^2 = e_0 \wedge e_0 \cdot t_1 = t_1 \cdot e_0 \wedge e_0 \cdot k_2 = e_0 \cdot t_2 \Rightarrow e_0 \leqslant 1 - e) \wedge \ldots] \Rightarrow e = 0)$, где $k_1 = t_1$ одно из равенств, а $k_2 \neq t_2$ одно из неравенств в ψ_s. Далее $(\exists x\varphi)^0 = \forall x \varphi^0$, $(\forall x\varphi)^0 = \forall e \exists t, k\, (e^2 = e \wedge \wedge e \cdot t = t \cdot e \wedge (e \leqslant [\![\varphi(k)]\!]_{\mathcal{T}(K)}]) \Rightarrow e = 0)$, где третий сомножитель в посылке заменяется по теореме 12а) на $\varphi'(k, \bar{k}, e)$.

Ясно, что $[\![\bigvee_s \psi_s]\!]_{\mathcal{T}(K)} = 0$ эквивалентно $K \models \varphi^0$ и так далее по индукции.

б) Укажем синтаксический перевод $\varphi \mapsto \varphi^+$. Если $\varphi(\bar{k})$ — бескванторная, то $\varphi^+(\bar{k}, e)$ совпадает с $\varphi'(\bar{k}, e)$ из теоремы 12а). Далее $(\forall x\varphi)^+ = \forall x (\varphi^+)$ и, наконец, $(\exists x\varphi)^+ = \forall e_0 \exists t \exists e_1 \forall t_1 \exists k\ [e_0^2 = e_0 \wedge e_0 \cdot t = t \cdot e_0 \wedge e_0 \neq 0 \wedge e_0 \leqslant e \Rightarrow \Rightarrow e_1^2 = e_1 \wedge e_1 \cdot t_1 = t_1 \cdot e_1 \wedge e_1 \neq 0 \wedge e_1 \leqslant e_0 \wedge \varphi^+(k, e_1)]$. Проверка по индукции.

Лемма 2. *Если K — нормальное кольцо и $[\![\varphi(\bar{k})]\!]_{B(K)} = 1$, то $[\![\varphi\neg(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}(K)} = 0$, где $\bar{k} \subseteq K$.*

Доказательство. Если $[\![\varphi\neg(\bar{k})]\!]_{\mathcal{T}(K)} \neq 0$, то по теореме 10б) получим $[\![\varphi\neg(\bar{k})]\!]_{B(K)} \neq 0$, т. е. $[\![\varphi\neg(k)]\!]_{B(K)} \neq 0$. Противоречие.

Теорема 22. *Если $T \vdash \varphi$, то $(T' + \Phi_1) \vdash ((\varphi\neg)^0 \wedge \varphi^+)$.*

Доказательство. Проверим первое утверждение. Пусть в произвольном кольце K выполняется $K \models (T' + \Phi_1)$. По теореме 12а получим $[\![T]\!]_{\mathcal{T}(K)}$ 1. Отсюда по теореме 10б) получим $[\![T]\!]_{B(K)} = 1$. По условию получим $[\![\varphi]\!]_{B(K)} = 1$, а по предыдущим лемме 2 и предложению 9а) имеем $[\![\varphi\neg]\!]_{B(K)} = 0$, $K \models (\varphi\neg)^0$.

Проверим второе утверждение. Пусть $K \models (T' + \Phi_1)$. Тогда $[\![T]\!]_{\mathcal{T}(K)} = 1$. Обозначим $T\neg\neg$ геделевский негативный перевод всех формул из T (формулы из T и формула φ в дизъюнктивной нормальной форме). В силу нормальности K получим $[\![T\neg\neg]\!]_{\mathcal{T}} = 1$. Так как $T\neg\neg \vdash \varphi\neg\neg$, то $[\![\varphi\neg\neg]\!]_{\mathcal{T}} = 1$, где с учетом нормальности как раз такое, как в предложении 9б), поэтому $K \models \varphi^+$.

Замечание. Аналогичная теорема верна и для других пар вместо $\langle \mathcal{T}, B \rangle$. Выразимость всех упомянутых выше предикатов имеет место и для других языков. Условие нормальности K можно ослабить, например, заменив условием типа $\{[\![k = 0]\!]_{\mathcal{T}(K)} |\ k \in K\} \subseteq B(K)$. Язык колец можно расширить включением любого числа констант.

ГЛАВА III

ЕСТЕСТВЕННЫЙ ПЕРЕВОД КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ В ИНТУИЦИОНИСТСКУЮ ДЛЯ АЛГЕБР С МЕТРИКОЙ

Здесь рассматривается другое по сравнению с гл. II приложение гейтинговозначного анализа. А именно, рассматривается проблема перехода от классической истинности некоторого суждения φ к интуиционистской истинности самого φ или нового суждения φ', близкого по смыслу и форме к исходному суждению φ. Такой переход позволяет использовать важные достоинства интуиционистской истинности такие, как эффективность, дизъюнктность, экзистенциональность (см. конец п.I.5и [10, 9, 4]). Однако уже вопрос о точном определении интуиционистской истинности не однозначен и не прост, когда речь идет о теориях абстрактных объектов таких, как множества, алгебры и т. п. Одно из возможных таких определений приведено в конце п. I.5. Это гейтингова значимость, обозначаемая $cHa \models (\cdot)$. Подчеркнем, что все рассмотрения внешне, математически могут быть проведены в рамках интуиционистской теории множеств HZF. В этой главе будет получен результат такого типа: если $ZFC \vdash (K \models (\varphi \Rightarrow \psi))$, то $cHa \models (K \models (\varphi \Rightarrow \psi))$, где φ, ψ могут содержать параметры $k_1, \ldots, k_n$ из K. Здесь φ — условия некоторой теоремы, ψ — ее заключение, а K — объект, к которому относится утверждение $\varphi \Rightarrow \psi$. Вместо $K \models (\varphi \Rightarrow \psi)$ можно, очевидно, писать релятивизацию $\varphi_K \Rightarrow \psi_K$. Так как речь идет, по крайней мере в посылке, о выводимости, то K должно быть формульно описано; широкий и обычный язык описания — это язык ZF; пусть K описывается некоторой формулой $\varkappa$ в языке ZF, а релятивизация осуществляется переменной f, удовлетворяющей $\varkappa(\cdot)$. Итак, мы приходим к следующей форме утверждения: если $ZFC \vdash \forall f (\varkappa(f) \Rightarrow \forall k_1, \ldots, k_n \in f (\varphi_f \Rightarrow \psi_f))$, то $cHa \models \forall f (\varkappa(f) \Rightarrow \forall k_1, \ldots, k_n \in f (\varphi'_f \Rightarrow \psi'_f))$, где φ' и ψ' — некоторые преобразования соответственно формул φ и ψ. Такого вида утверждение будет доказано в теореме 23; в ней на $\varkappa(\cdot)$ накладывается условие — быть дедекиндовой формулой, определение см. ниже; в соответствии с гипотезой П. С. Новикова [5, с. 127], ψ — любая AE-формула, а φ — вообще любая формула. Естественно, что φ и ψ пишутся в языке, соответствующем структуре K. В нашем случае подразумевается, что K кольцо, и потому φ, ψ — формулы в языке колец.

В работах Г. Такеути и С. Титани [10, 42] также развивается, как они выражаются, глобальный интуиционистский анализ. А именно, в них доказывается гейтингова значимость многих элементарных теорем математического анализа, а также гейтингова значимость нескольких теорем из теории функций многих комплексных переменных (например, теоремы Вейерштрасса). Установление гейтинговой значимости (которая и есть предмет изучения в гл. III, IV, а отчасти и в предыдущих главах) связано со значительными усилиями даже в простых случаях потому, что она не замкнута на классическую выводимость. Отсюда все обычные математические утверждения, вообще говоря, не гейтингово значимы (компенсацией является эффективность, возникающая после установления гейтинговой значимости).

Алгеброй с метрикой назовем набор $K, +, -, \cdot, 0, 1, \|\cdot\|$, где $+: \boldsymbol{K}^2 \to K$, $-: K \to K$, $\cdot: K^2 \to K$, $0, 1 \in K$, $\|\cdot\|: K \to \mathbb{R}$, а $\mathbb{R}$ описывается, как множество дедекиндовых сечений $\lambda = \langle \lambda, \lambda_1 \rangle$ в $\mathbb{Q}$. При этом $\mathbb{Q}$ описывается, как обычно, с помощью натурального ряда, который, в свою очередь, определяется, как наименьшее индуктивное множество ω. Такое определение $\mathbb{R}$ обычным способом записывается в языке теории множеств — языке ZF. Обычным образом определяются предикаты, связанные с $\mathbb{R}$ (и другими числовыми системами). Например, предикат $\cdot < \cdot$ на $\mathbb{R}$ определяется формулой $(\lambda < \mu) \Leftrightarrow \exists r \in \mathbb{Q} (r \in \lambda_1 \wedge r \in \mu)$. Функциональный символ $\|\cdot\|$ можно читать «метрика». Далее подразумевается интерпретация алгебры с метрикой как кольца с абсолютным значением. В этой главе (как и в предыдущей) кольцевая структура выбрана в качестве примера: вместо нее можно рассматривать и общие алгебраические системы. Обычные формулы в языке ZF, описывающие порядково-кольцевые структуры $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_{>0}$, $\mathbb{R}$ и кольцевую структуру $\mathbb{C}$ (как множество пар дедекиндовых сечений), обозначим соответственно $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$, $\varkappa_4$.

Обозначим $\mathbb{B}$ алгебру $\mathbb{B}(\Omega)$, определенную в конце п. 1.2 (там вместо Ω пишется H). Обозначим $[\![\cdot]\!]_\Omega$ и $[\![\cdot]\!]_B$ оценки в языке ZF с множеством параметров соответственно V^Ω и V^B (см. пример 1); при этом, конечно, $V^\Omega \subseteq V^B$.

Формулу $\varkappa(\cdot, \ldots, \cdot)$ в языке ZF назовем дедекиндовой, если выполняются следующие три условия:

1) $HZF \vdash \forall f, +, -, \cdot, 0, 1, \|\cdot\| (\varkappa(f, +, -, \cdot, 0, 1, \|\cdot\|) \Rightarrow (f, +, -, \cdot, 0, 1, \|\cdot\|)$ — алгебра с метрикой); в $\varkappa$ входит и формула $\varkappa_3$, а $+, -, \cdot, 0, 1, \|\cdot\|$ — обычные теоретико-множественные переменные, обозначения которых лишь напоминают об их смысле.

2) $\forall\Omega\, ([\![\varkappa(f, \ldots, \|\cdot\|)]\!]_\Omega \leqslant ([\![\varkappa(f, \ldots, \|\cdot\|)]\!]_B \wedge (f(k) \wedge f(t) \to [\![k = t \Leftrightarrow [\![k_B - t\| = 0]\!]_B)))$, где f будем считать экстенсиональным элементом в V^Ω.

3) $\forall\Omega\, ([\![\varkappa(f, \ldots, \|\cdot\|)]\!]_\Omega \leqslant ((f(k) \to [\![\| k\|_\Omega = \| k\|_B]\!]_B) \wedge (f(k) \wedge f(t) \to \to [\![k \underset{\Omega}{+} t \underset{B}{+} t]\!]_B \wedge \ldots))$, где многоточие в правой части означает такое же условие для других операций. Индексы Ω и $\mathbb{B}$ указывают, что термы вычисляются соответственно в V^Ω и V^B. Условие 1) тривиально, условия 2), 3) говорят о некоторой слабой абсолютности формулы $\varkappa$.

Пример 13. 1) Пусть $\varkappa(f, +, -, \cdot, 0, 1, \|\cdot\|)$ говорит: f — множество дедекиндовых сечений в $\mathbb{Q}$, замкнутое относительно обычных кольцевых операций в $\mathbb{R}$, вместе с этими операциями в f и с «нормой» в f, равной $\|x\| = |x| = \max\{x, -x\}$, т. е. $\varkappa(f, \ldots, \|\cdot\|) \Leftrightarrow \forall x \in f(\varkappa_3(x) \wedge \forall x, y \in f(x+y, x\cdot y, 0, 1 \in f \wedge \ldots$, в $\varkappa_3$ входит и формула $\varkappa_1$. Как следует из приведенного ниже предложения 10 и теоремы 3д), эта формула — дедекиндова. Она описывает в V^Ω и в V^B два свойства, состоящих соответственно из всех вещественных числовых колец в $\mathbb{R}_\Omega$ и в $\mathbb{R}_B$. Здесь $\mathbb{R}_\Omega = \{x \mid \varkappa_3(x)\}$ — объект, определяемый в V^Ω формулой $\varkappa_3$, а $\mathbb{R}_B$ — аналогичный объект в V^B. Конечно, обычно $\mathbb{B}$-глобально истинно, $\mathbb{R}_\Omega \neq \mathbb{R}_B$. Однако по предложению 10 $\mathbb{B}$ — глобально истинно, $[\![\mathbb{R}_\Omega \subseteq \mathbb{R}_B]\!]$. Эти объекты можно явно определить, например, как $\mathbb{R}_\Omega(x) = [\![\varkappa_3(x)]\!]_\Omega$, где $[\![\varkappa_3(x)]\!]_\Omega > 0$, и $\mathbb{R}_B(x) = [\![\varkappa_3(x)]\!]_B$, где $[\![\varkappa_3(x)]\!]_B > 0$.

2) Пусть $\varkappa$ говорит: f — множество пар дедекиндовых сечений в $\mathbb{Q}$, замкнутое относительно обычных кольцевых операций в $\mathbb{C}$, вместе с этими операциями в нем и с нормой в f, равной $\|\langle\lambda, \mu\rangle\| = \lambda^2 + \mu^2$. Из того же предложения 10 следует, что эта формула дедекиндова. Она описывает в V^Ω и в V^B два семейства, состоящих соответственно из всех числовых колец в $\mathbb{C}_\Omega$ и в $\mathbb{C}_B$.

3) Аналогичными дедекиндовыми формулами можно описать семейства «числовых» колец в разных гиперкомплексных системах над $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

4) Во всех упомянутых случаях можно добавить в $\varkappa$ формулу $\forall x \in f \exists y \in f(x = 0 \vee x\cdot y = 1)$ и получить соответствующие семейства полей или тел.

5) Во всех упомянутых случаях можно добавить в $\varkappa$ условие вещественной или алгебраической замкнутости: $\forall x \in f \exists y \in f(x > 0 \Rightarrow y^2 = x) \wedge \wedge \forall a_0, \ldots, a_{2n+1} \in f \exists x \in f(a_0 + \ldots + a_{2n+1}x^{2n+1} = 0)$ или $\forall a_0, \ldots, a_n \in f \exists x \in f(a_0 + \ldots + a_n x^n = 0)$. Эти схемы аксиом можно эквивалентным образом выразить одной формулой в языке ZF. Таким образом, практически все обычные классы «числовых» колец и полей (а также групп и алгебр) описываются дедекиндовыми формулами; это означает применимость к ним указанной ниже теоремы 23.

Предложение 10. *Выполняются следующие соотношения*:

а) $1 = [\![\{x \mid \varkappa_1(x) = \check{\mathbb{Q}}]\!]_\Omega = [\![\{x \mid \varkappa_1(x)\} = \check{\mathbb{Q}}]\!]_B$, $\quad 1 = [\![\{x \mid \varkappa_2(x)\} = (\mathbb{Q}_{>0})^\vee]\!]_\Omega = [\![\{x \mid \varkappa_2(x)\} = (\mathbb{Q}_{>0})^\vee]\!]_B$, $[\![\varkappa_3(x)]\!]_\Omega \leqslant [\![\varkappa_3(x)]\!]_B$, $[\![\varkappa_4(x)]\!]_\Omega \leqslant [\![\varkappa_4(x)]\!]_B$;

б) $[\![\varkappa_3(x)]\!]_\Omega \leqslant [\![x = \langle\lambda, \lambda_1\rangle]\!]_\Omega$, *где* $\mathscr{D}(\lambda) = \mathscr{D}(\lambda_1) = \{\check{r} \mid r \in \mathbb{Q}\}$ *и* $\lambda(\check{r}) = [\![\exists u, v\ (x = \langle u, v\rangle \wedge \check{r} \in u)]\!]_\Omega \wedge [\![\varkappa_3(x)]\!]_\Omega$, $\lambda_1(\check{r}) = [\![\exists u, v\ (x = \langle u, v\rangle \wedge \check{r} \in v)]\!]_\Omega \wedge [\![\varkappa_3(x)]\!]_\Omega$;

в) $[\![\varkappa_3(x) \wedge \varkappa_3(y)]\!]_\Omega \leqslant ([\![x < y]\!]_\Omega \leftrightarrow [\![x < y]\!]_B)$;

г) $[\![\varkappa_3(x) \wedge \varkappa_3(y)]\!]_\Omega \leqslant [\![x \underset{\Omega}{+} y = x \underset{B}{+} y]\!]_B$ *и также для* $\varkappa_4$ *и других операций*;

д) $[\![\varkappa_3(x)]\!]_\Omega \leqslant [\![\| x \|_\Omega = \| x \|_B]\!]_B$ *и также для* $\varkappa_4$ (*нормы для* $\mathbb{R}$ *и* $\mathbb{C}$ *определены выше*).

Доказательство. а) Первые соотношения очевидны. С их учетом формула $\varkappa_3$ имеет вид $\exists u, v\, [u, v \subseteq \check{\mathbb{Q}} \wedge x = \langle u, v\rangle \wedge \exists r, s \in \check{\mathbb{Q}}\ (r \in u \wedge s \in v) < \forall r \in \check{\mathbb{Q}} \neg (r \in u \wedge r \in v) \wedge \forall r \in \check{\mathbb{Q}}\ (r \in u \Leftrightarrow \exists s \in u\ (r < s)) \wedge \forall r \in \check{\mathbb{Q}}\ (r \in v \Leftrightarrow \exists s \in v\ (s < r)) \wedge \forall r, s \in \check{\mathbb{Q}}\ (r < s \Rightarrow r \in u \vee s \in v)]$. Тогда

$$[\![\varkappa_3(x)]\!]_\Omega = \bigvee_{u, v} [[\![u, v \subseteq \check{\mathbb{Q}}]\!]_\Omega \wedge \ldots] = \bigvee_{u, v} [((\bigwedge_{y \in \mathscr{D}(u)}^{\Omega} u(y) \underset{\Omega}{\rightarrow} [\![y \in \check{\mathbb{Q}}]\!]_\Omega) \wedge [\![v \subseteq \check{\mathbb{Q}}]\!]_\Omega) \wedge$$
$$\wedge [\![x = \langle u, v\rangle]\!]_\Omega \wedge (\bigvee_{r, s \in Q} [\![\check{r} \in u]\!]_\Omega \wedge [\![\check{s} \in v]\!]_\Omega) \wedge$$
$$\wedge (\bigwedge_{r \in Q} ([\![\check{r} \in u]\!]_\Omega \wedge [\![\check{r} \in v]\!]_\Omega \to 0)) \wedge (\bigwedge_{r \in Q} ([\![\check{r} \in u]\!]_\Omega \leftrightarrow \bigvee_{s \in \mathscr{D}(u)} u(s) \wedge [\![\check{r} < s]\!]_\Omega)) \wedge$$
$$\wedge (\bigwedge_{r \in Q} ([\![\check{r} \in v]\!]_\Omega \leftrightarrow \bigvee_{s \in \mathscr{D}(v)} v(s) \wedge [\![s < \check{r}]\!]_\Omega)) \wedge$$
$$\wedge (\bigwedge_{r, s \in Q} ([\![\check{r} < \check{s}]\!]_\Omega \to [\![\check{r} \in u]\!]_\Omega \vee [\![\check{s} \in v]\!]_\Omega))].$$

Для перехода к оценке в V^B в 4 — 6 сомножителях достаточно проверить, что с оценкой $w = [\![u, v \subseteq \check{\mathbb{Q}}]\!]_\Omega$ можно заменить u, v на такие u', $v' \in V^\Omega$, что $w \leqslant ([\![u = u' \wedge v = v']\!]_\Omega \wedge [\![u = u' \wedge v = v']\!]_B)$, $\mathscr{D}(u') = \mathscr{D}(v') = \mathbb{Q}$. Эти u', v' автоматически экстенсиональны в V^Ω и в V^B. Для этого заменим u, v на экстенсиональные функции u, v, включающие $\{\check{r} \mid r \in \mathbb{Q}\}$ в их области определения (по теореме 3б)), и положим $u' = u \restriction \{\check{r} \mid r \in \mathbb{Q}\}$ и также для v'. Тогда $w \leqslant [\![\forall y\ (y \in u \Leftrightarrow y \in u')]\!]_\Omega$, так как $w \leqslant (u(y) \to [\![y \in u']\!]_\Omega)$, где $y \in \mathscr{D}(u)$. Отсюда такое же соотношение для $[\![\cdot]\!]_B$. Поэтому $w \wedge \bigwedge_r ((u'(r) \wedge v'(r)) \to 0) \wedge \bigwedge_r (u'(r) \leftrightarrow \bigvee_{s \in Q} u'(s) \wedge [\![\check{r} < \check{s}]\!]_\Omega) \wedge \bigwedge_r (v'(r) \leftrightarrow \bigvee_{s \in Q} v'(s) \wedge [\![\check{s} < \check{r}]\!]_\Omega)$ переносится в $\mathbb{B}$.

Аналогично $[\![\varkappa_4(x)]\!]_\Omega = \bigvee_{y, z} [\![\varkappa_3(y) \wedge \varkappa_3(z)]\!]_\Omega \wedge [\![x = \langle y, z\rangle]\!]_\Omega$ переносится в $\mathbb{B}$.

б) Заметим, что указанные λ, λ_1 — автоматически экстенсиональные в в V^Ω и в V^B функции. Используем u', v' из предыдущего пункта и получим неравенство: $[\![\varkappa_3(x)]\!]_\Omega \wedge w \wedge [\![x = \langle u', v'\rangle]\!]_\Omega \wedge \ldots \leqslant ((u'(r) \leftrightarrow \lambda(\check{r})) \wedge) v'(\check{r}) \leftrightarrow \lambda_1(\check{r}))$, где $r \in \mathbb{Q}$. Затем правую часть заменим на $[\![u' = \lambda \wedge v' = \lambda_1]\!]_\Omega$ и на $[\![x = \langle\lambda, \lambda_1\rangle]\!]_\Omega$, а после этого суммируем по всем u, v.

в) Определим $\cdot < \cdot$ как $((x < y) \leftrightharpoons \exists r \in \check{\mathbb{Q}}\ (r \in P_2(x) \wedge r \in P_1(y))$, где $P_1(\cdot)$ и $P_2(\cdot)$ — первый и второй члены упорядоченной пары. Обозначим $w \leftrightharpoons [\![\varkappa_3(x) \wedge \varkappa_3(y)]\!]_\Omega$. С учетом п.б) получим $w \leqslant [\![x = \langle\lambda, \lambda_1\rangle \wedge y = \langle\mu, \mu_1\rangle]\!]_\Omega$. Тогда $w \wedge [\![x < y]\!]_\Omega = w \wedge [\![\exists r \in \check{\mathbb{Q}}\ (r \in \lambda_1 \wedge r \in \mu)]\!]_\Omega = w \wedge \bigvee_r \lambda_1(\check{r}) \wedge \mu(\check{r}) = w \wedge [\![\exists r \in \check{\mathbb{Q}}\ (r \in \lambda_1, \wedge r \in \mu)]\!]_B = w \wedge [\![x < y]\!]_B$.

г) Определим $x + y \leftrightharpoons \langle\{t \in \check{\mathbb{Q}} \mid \exists r \in P_1(x)\, \exists s \in P_1(y)\, (t < r + s)\}, \{t \in \mathbb{Q} \mid \exists r \in P_2(x)\, \exists s \in P_2(y) (t > r + s)\}\rangle$. С учетом б) $w \leftrightharpoons [\![\varkappa_3(x) \wedge \varkappa_3(y)]\!]_\Omega \leqslant [\![x = \langle\lambda, \lambda_1\rangle \wedge y = \langle\mu, \mu_1\rangle]\!]_\Omega$. Нетрудно проверить $w \leqslant [\![\varkappa_3(x + y)]\!]_\Omega \leqslant [\![\varkappa_3(x + y)]\!]_B$, а также глобальную значимость того, что $+$ — функция. Для доказательства этого пункта нужно проверить неравенство: $w \leqslant [\![\{t \in \check{\mathbb{Q}} \mid \exists r \in \lambda \exists s \in \mu\ (t < r + s)\}_\Omega = \{t \in \check{\mathbb{Q}} \mid \exists r \in \lambda \exists s \in \mu\ (t < r + s)\}_B]\!]_B \wedge \ldots$, где первый терм можно заменить функцией $f(\check{t}) \leftrightharpoons$

$\leftrightharpoons [\![\exists r \in \lambda \exists s \in \mu\ (t < r + s)]\!]_\Omega$ на $\mathbb{Q}$ в том смысле, что $[\![f = \{t \in \check{\mathbb{Q}} \mid \exists r \in \in \lambda \exists s \in \mu\ (t < r + s)\}_\Omega]\!]_\Omega = 1$. Но в $\mathbb{B}$ эта функция равна второму терму.

д) Этот пункт прямо следует из в) и г).

Лемма 3. *Пусть φ — произвольная формула в языке колец, классически преобразованная к виду без $\Rightarrow$ и с $\neg$ только у атомарных формул, φ^+ получена из φ заменой всех подформул вида $\neg\,(k = t)$ на $(0 < \| k - t \|^2)$. Тогда* $[\![\varkappa\,(f, \ldots, \| \cdot \|)]\!]_\Omega \wedge f(k_1) \wedge \ldots \wedge f(k_n) \leqslant ([\![\varphi_f^+ (k_1, \ldots, k_n)]\!]_\Omega \to \to [\![\varphi_f^+ (k_1, \ldots, k_n)]\!]_B)$. *Здесь φ_f — релятивизация φ теоретико-множественной переменной f (параметры формулы φ из $\mathscr{D}(f)$), термы и предикат $\cdot < \cdot$ в φ^+ интерпретируются операторно с помощью формул $\varkappa$ и $\varkappa_3$.*

Доказательство. Для $\cdot = \cdot$ переходим к $\mathbb{B}$ с теми же термами (операторно вычисленными в Ω) и с учетом предложения 10 заменяем их на термы, операторно вычисленные в $\mathbb{B}$. Для связок очевидной индукцией, например, для связки $\forall$ получим:

$$[\![\varkappa]\!]_\Omega \wedge f(k_1) \wedge \cdots \wedge f(k_n) \wedge \bigwedge_{x \in \mathscr{D}(f)} (f(x) \to [\![\varphi f(\bar{k}, x)]\!]_\Omega) \leqslant$$
$$\leqslant \bigwedge_{x \in \mathscr{D}(f)} (f(x) \to [\![\varkappa]\!]_\Omega \wedge f(k_1) \wedge \cdots \wedge f(k_n) \wedge f(x) \wedge [\![\varphi_f(\bar{k}, x)]\!]_\Omega) \leqslant$$
$$\leqslant \bigwedge_{x \in \mathscr{D}(f)} (f(x) \to [\![\varphi_f(\bar{k}, x)]\!]_B) = [\![\forall x \in f \varphi_f(\bar{k}, x))]\!]_B. \ \square$$

Лемма 4. *Пусть ψ — E-формула в языке колец, классически преобразованная к виду без $\Rightarrow$ и с $\neg$ только у атомарных формул, а ψ^+ получена из ψ заменой всех подформул вида $\neg\,(k = t)$ точно, как в лемме 3, а всех подформул вида $k = t$ формула $\| k - t \|^2 < \check{\varepsilon}_{k,t}$, где $\varepsilon_{k,t}$ — произвольные элементы из $\mathbb{Q}_{>0}$. Тогда* $[\![\varkappa\,(f, \ldots \| \cdot \|)]\!]_\Omega \wedge f(k_1) \wedge \ldots \wedge f(k_n) \leqslant ([\![\psi_f^+ (k_1, \ldots, k_n)]\!]_B \leftrightarrow \leftrightarrow [\![\psi_f^+ (k_1, \ldots, k_n)]\!]_\Omega)$.

Доказательство. Атомарный случай сводится к вычислению термов в $\mathbb{B}$ и Ω и абсолютности $\cdot < \cdot$ (предложение 10в)). Для связки $\exists$, как обычно. $\square$

Если ψ — AE-формула, то продолжим определение перевода ψ^+, приведенное в лемме 4: все кванторы $\forall$ перепишем без изменения, затем все переменные $\varepsilon_{k,t}$ замкнем кванторами всеобщности (в группе исходных кванторов $\forall$). Только что определенный перевод произвольной AE-формулы ψ в языке колец назовем переводом в заключении; перевод произвольной формулы φ в языке колец, определенный в лемме 3, назовем переводом в посылке. Теперь для указанных формул φ, ψ определим перевод формулы $\varphi \Rightarrow \Rightarrow \psi$ как $\varphi^+ \Rightarrow \psi^+$.

Теорема 23. *Пусть $\varkappa$ — дедекиндова формула в языке ZF, φ, ψ — формулы в языке колец и ψ — AE-формула. Если*

$$ZFC \vdash \forall f, \ldots, \| \cdot \|\ (\varkappa\,(f, \ldots, \| \cdot \|) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall k_1, \ldots, k_n \in f\ [\varphi_f (k_1, \ldots, k_n) \Rightarrow \psi_f (k_1, \ldots, k_n)]),$$

то

$$cHa \models \forall f, \ldots, \| \cdot \|\ (\varkappa\,(f, \ldots, \| \cdot \|) \Rightarrow \forall k_1, \ldots, k_n \in$$
$$\in f\ [\varphi_f^+ (k_1, \ldots, k_n) \Rightarrow \psi_f^+ (k_1, \ldots, k_n)]).$$

Доказательство. Пусть $f, \ldots, \| \cdot \| \in V^\Omega$, $k_1, \ldots, k_n \in \mathscr{D}(f)$, $u \leftrightharpoons ([\![\varkappa\,(f, \ldots, \| \cdot \|)]\!]_\Omega \wedge f(k_1) \wedge \ldots \wedge f(k_n) \wedge [\![\varphi_f^+ (k_1, \ldots, k_n)]\!]_\Omega$. По лемме 3 получим $u \leqslant [\![\varphi_f^+ (k_1, \ldots, k_n)]\!]_B$. По дедекиндовости формулы $\varkappa$ имеем $u \leqslant \leqslant [\![\varkappa\,(f, \ldots, \| \cdot \|)]\!]_B \wedge f(k_1) \wedge \ldots \wedge f(k_n) \wedge [\![\varphi_f (k_1, \ldots, k_n)]\!]_B$. По условию получим $u \leqslant [\![\psi_f (\bar{k})]\!]_B$ и отсюда $u \leqslant [\![\psi_f^+ (\bar{k})]\!]_B$. Пусть $\psi_f^+ (\bar{k}) = \forall t_1, \ldots, t_m \in \in f \forall \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s \in \mathbb{Q}_{>0}\ \ \exists l_1, \ldots, l_r \in f \chi(\bar{k})$. Тогда $\forall t_1, \ldots, t_m \in \in \mathscr{D}(f) \forall \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s \in \mathbb{Q}_{>0}\ (u \leqslant f(t_1) \wedge \ldots \wedge f(t_m) \to [\![\exists l_1, \ldots, l_r \in f \chi(\bar{k}, \bar{t}, \varepsilon)]\!]_B)$, т. е. $u \wedge f(t_1) \wedge \ldots \wedge f(t_m) \leqslant [\![\exists \bar{l} \in f \chi(\bar{k}, \bar{t}, \varepsilon)]\!]_B$. По лемме 4 $u \wedge f(t_1) \wedge$

$\wedge \ldots \wedge f(t_m) \leqslant [\![\exists \bar{l} \in f\chi(\bar{k}, \bar{t}, \check{\varepsilon})]\!]_\Omega$, т. е. $u \leqslant [\![\forall \bar{t} \in f \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \exists \bar{l} \in f\chi(\bar{k}, \bar{t}, \check{\varepsilon})]\!]_\Omega$.

Замечание. Обозначим $cBa \models \varphi$ предикат $\forall \mathbb{B}([\![\varphi]\!]_B = 1)$, где $\mathbb{B}$ пробегает все полные булевы алгебры, а φ — формула в языке ZF с параметрами из V. В теореме 23 условие $ZFC \vdash (\cdot)$, очевидно, можно заменить на условие $cBa \models (\cdot)$. Везде выше можно включить в понятие алгебры с метрикой многоосновные алгебраические системы, что реально полезно в приложениях, а также заменить $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$, порождаемые стандартным $\mathbb{Q}$, на другие системы, порождаемые любым другим формульным стандартным множеством.

Пример 14. Начнем с теоремы В. Я. Лина и М. Г. Зайденберга: инъективное полиномиальное отображение комплексной прямой $\mathbb{C}$ в комплексную плоскость $\mathbb{C}^2$ имеет не более одной критической точки. Эта теорема записывается AE-предложением ψ в языке колец: $\psi \rightleftharpoons \forall a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \exists z_1, z_2 \forall u, v\ (z_1 = z_2 \vee f(z_1) \neq f(z_2) \vee g(z_1) \neq g(z_2) \vee f'(u) \neq 0 \vee g'(u) \neq 0 \vee f'(v) \neq 0 \vee g'(v) \neq 0 \vee u = v)$, где классически эквивалентным образом можно переставить кванторы $\exists z_1, z_2$ и $\forall u, v$. Здесь $f(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$, $g(x) = b_0 + \ldots + b_m x^m$, $\langle f_1 g\rangle\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, а $\langle f', g'\rangle$ — градиент, равенство нулю которого и означает критическую точку. Итак, эта теорема говорит: $\mathbb{C} \models \psi$. В соответствии с гл. II предложение ψ истинно и во всех алгебраически замкнутых полях K. характеристики 0 или даже $p \geqslant p_0$ — фиксированной константы (это просто теорема Тарского—Робинсона), а также в широком классе колец K в смысле $K \models \psi$. Для краткости рассмотрим ситуацию с полями: некоторая дедекиндова формула $\varkappa_0$ описывает упомянутый класс полей (если ограничиться подмножествами $\mathbb{C}$). Поэтому теорема 23 означает: $cHa \models \forall f, \ldots, \|\cdot\|\ [\varkappa_0(f, \ldots, \|\cdot\|) \Rightarrow (\psi)^+_f]$. Аналогично: для совершенно любого предложения вида $\varphi \Rightarrow \psi$, где ψ — AE-формула, истинного в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ (или $\mathbb{Q}$, или в кольце локально постоянных функций на канторовом множестве и т. п.), по соответствующей теореме полноты получаем, что оно истинно в подходящем классе колец, описываемом дедекиндовой формулой, и затем, применяя теорему 23, получаем его естественный интуиционистский вариант. Например, так будет для теоремы Артина. Рассмотрим пример на случай двухосновной алгебры. Хорошо известно, что любое числовое поле разложения K (многочлена h_1 над полем P) обладает свойством: для любого неприводимого над P многочлена h, если K содержит один его корень, то K содержит и все его корни. Это описание полей P, K дается дедекиндовой формулой $\varkappa_1$. Пусть φ — естественная запись того, что h неприводим над P и имеет корень в K. Так как φ не содержит $\Rightarrow$ и $\neg$, то $\varphi^+ = \varphi$. Пусть $\psi \rightleftharpoons \exists x_1, \ldots, x_m \in K$ (h разлагается по $x_1, \ldots, x_m$). Тогда $\psi^+ = \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \exists x_1, \ldots, x_m (\ldots)$. Применяя теорему 23, получим $CHa \models \varphi_{P,K} \Rightarrow (\psi^+)_K$. Наконец, аналогично проверяется гейтингова значимость теоремы Гильберта о нулях. По-разному записывая эти теоремы и меняя вид формулы $\varkappa$, получаем их разные интуционистские варианты.

ГЛАВА IV
ГЕЙТИНГОВО ПОПОЛНЕНИЕ ЛОКАЛЬНО-КОМПАКТНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

В этой главе рассматривается еще одно приложение гейтинговозначного анализа. Здесь под *глобальной истинностью* (или *Ω-глобальной истинностью*) понимается глобальная истинность относительно оценки в языке ZF с множеством параметров V^Ω, см. пример 1. Эта оценка обозначается $[\![\cdot]\!]$ (или $[\![\cdot]\!]_\Omega$).

Пусть Ω и Ω_1 — две полные гейтинговы алгебры. Обозначим Ω^{Ω_1} множество всех морфизмов (в смысле cHa-структуры $\langle \vee, \wedge, 0, 1\rangle$) алгебры Ω_1 в алгебру Ω; в Ω^{Ω_1} фиксируем структуру полной гейтинговой алгебры относительно порядка $(f \leqslant g) \rightleftharpoons \forall u \in \Omega_1\ (f(u) \leqslant g(u))$. Далее рассматривается случай, когда Ω_1 — топология некоторого фиксированного топологического пространства или кольца Y; в этом случае вместо $\Omega^{\mathcal{T}Y}$ будем писать Y^Ω. При этом Y^Ω наделяется канонической структурой алгебры над исходным кольцом «скаляров» Y. Начиная примерно с 1977 г., в различных формах реализуется идея о том, что алгебра Y^Ω в «нестандартном смысле» (т. е. в смысле Ω-глобальной истинности) совпадает с Y. При этом содержательные свойства кольца Y переносятся на алгебру Y^Ω. Более того, гомоморфизмы в алгебру Y^Ω в том же нестандартном смысле совпадают с гомоморфизмами в алгебру Y, и содержательные свойства Y-значных гомоморфизмов переносятся на Y^Ω-значные. В этой главе и в добавлении содержатся некоторые реализации этой идеи. А именно, в теореме 24 показано, что Y^Ω по существу совпадает с $\tilde{Y}$, где $\tilde{Y}$ — пополнение Y, как метрического или равномерного пространства, в V^Ω. Отсюда многие свойства Y переносятся на $\check{Y}$, и далее на $\tilde{Y}$, и затем на Y^Ω. В добавлении (теорема 25) показано (в случае, когда Ω — булева алгебра), что а) Y^Ω-значные функционалы на банаховом пространстве совпадают с Y-значными функционалами на нем, б) банаховы алгебры над кольцом Y^Ω совпадают с банаховыми алгебрами над кольцом Y и, в частности, их спектры соответствуют друг другу, в) непрерывные семейства коммутативных, локально-компактных групп в нестандартном смысле отождествляются с одной такой группой и, в частности, группы их характеров соответствуют друг другу. Конечно, эти наводящие соображения не являются точными формулировками.

Далее $X = X(\Omega)$ — стоуново пространство алгебры Ω. Множество $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X)$ называется Ω-плотным, если существует такое семейство $\{u_i\} \subseteq \Omega$, что $\mathcal{O} = \bigcup\limits_i u_i$ и $\bigvee\limits_i{}_\Omega u_i = 1$. Конечно, Ω-плотное множество плотно (в топологии $\mathcal{T}(X)$); если для любого элемента из $\mathcal{T}(X)$ его плотность влечет его Ω-плотность, то Ω — булева алгебра. Точно так же определяется множество $\mathcal{O}$, Ω-плотное в u, где u — любой элемент из Ω (конечно, $\mathcal{O} \in \mathcal{T}(X)$, $\mathcal{O} \subseteq u$). Топологию $\mathcal{T}(Y)$ в Y везде будем обозначать $\mathcal{T}$, а ее элементы будем обозначать α, β, γ. Напомним, что u пробегает Ω, а $\mathcal{O}$ пробегает $\mathcal{T}(X)$. Обозначим $C_{\Omega,u}(X, Y)$ множество всех непрерывных Y-значных функций, определенных на открытых множествах $\mathcal{O}$, где $\mathcal{O}$ плотно в некотором u из Ω, факторизованное совпадением на каком-то открытом и Ω-плотном множестве. Обозначим $C_{\Omega,u}(X, Y)$ (или короче $C_u(X, Y)$) все функции из $C_\Omega(X, Y)$, определенные на Ω-плотных в u множествах. Особый интерес представляет множество $C_1(X, Y)$. Далее предполагается знакомство с понятиями теории равномерных пространств, например, по книге Н. Бурбаки. Общая топология, глава II, 1968 год. Пусть $[\![\langle\check{Y}, \check{\Sigma}, \check{\mathcal{T}}\rangle$ — равномерное пространство с базой окружений $\check{\Sigma}$ и базой топологии $\check{\mathcal{T}}]\!]_\Omega = 1$. Пусть $\tilde{Y}$ — тот объект в V^Ω, который является (в смысле глобальной истинности) множеством всех минимальных фильтров Коши в $\check{Y}$. Впрочем, $\tilde{Y}$ удобнее определить как множество всех баз минимальных фильтров Коши в равномерном пространстве $\check{Y}$, содержащихся в $\check{\mathcal{T}}$.

Пример 15. Пусть Ω — топология какого-то фиксированного топологического пространства Y и $Y = \mathbb{Q}$ или $Y = \mathbb{R}$. Легко видеть, [1, 10, 42], что алгебра $(\check{\mathbb{Q}})^{\wedge\Omega}$ (обозначение см. на с. 115) изоморфна алгебре локально постоянных непрерывных функций вида $Z \to \mathbb{Q}$ и так же для $(\check{\mathbb{R}})^{\wedge\Omega}$. Выполняется $[\![\check{\mathbb{R}}$ — пополнение по Коши метрического пространства $\check{\mathbb{Q}}]\!]_\Omega = 1$. Поэтому $\check{\mathbb{R}}$ можно рассматривать как определение по Коши (с помощью именно последовательностей) вещественных чисел в V^Ω, и, следовательно, (нестандартные) вещественные по Коши числа в V^Ω отождествляются с простой частью алгебры $C(Z, \mathbb{R})$ всех непрерывных функций. Обозначим $\mathbb{R}^d$ тот объект в V^Ω, который удовлетворяет естественному определению пополнения по Дедекинду упорядоченного множества $\check{\mathbb{Q}}$ (см. доказательство предложения

10а). Тогда $(\mathbb{R}^d)^{\wedge\Omega}$ отождествляется со всей алгеброй $C(Y, \mathbb{R})$. Изоморфизм имеет вид $\lambda \mapsto f$, где $[\![\lambda = \langle\lambda, \lambda_1\rangle \in \mathbb{R}^d]\!]_\Omega = 1$ и $f(x) \leftrightharpoons \langle U, L\rangle$ сечению в $\mathbb{Q}$ (понятно, что $\langle\lambda, \lambda_1\rangle$ — сечение в $\check{\mathbb{Q}}$), $r \in U \leftrightharpoons x \in [\![\check{r} \in \lambda]\!]_\Omega$, $r \in L \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons x \in [\![r \in \lambda_1]\!]_\Omega$. Отсюда, в частности, $(\mathbb{R})^\wedge$ канонически вкладывается в в $(R^d)^\wedge$, и обычно $\check{\mathbb{R}} \neq \mathbb{R}^d$. Существует еще один естественный способ пополнения $\check{\mathbb{Q}}$, классически совпадающий с пополнением последовательностями по Коши. Рассмотрим $\check{\mathbb{Q}}$ как равномерное пространство. Обозначим $\mathbb{R}^f$ тот объект в V^Ω, который является множеством всех минимальных фильтров Коши в равномерном пространстве $\check{\mathbb{Q}}$. Минимальный фильтр Коши определяется простым множеством интервалов в $\mathbb{Q}$ и потому является «конструктивным» объектом. Теорема 24, в частности, говорит, что $(\mathbb{R}^f)^{\wedge\Omega}$ изоморфно $C_1(X, Y)$, где $\mathbb{R}^f$ — это как раз $\widetilde{\mathbb{Q}}$. Стоуново пространство X содержит абсолют $\dot{Z}$ пространства Z, т. е. определено непрерывное сюръективное отображение $\varkappa$: $\dot{Z} \to Z$. Отсюда $C(Z, \mathbb{R})$ канонически вкладывается в $C_1(X, Y)$ отображением $f \mapsto f \circ \varkappa$, что проясняет взаимоотношения $\check{\mathbb{R}}$, $\mathbb{R}^d$ и $\mathbb{R}^f$ в V^Ω.

Сейчас приведем другое описание объекта, основанное на пучках и теореме 16г. Назовем *u-морфизмом* такое f: $\Omega_1 \to \Omega$, для которого выполняются обычные условия морфизма с заменой условия $f(1_{\Omega_1}) = 1_\Omega$ на условие $f(1_{\Omega_1}) = u$, где u — фиксированный элемент в Ω. Обозначим $\Omega_u^{\Omega_1}$ множество всех u-морфизмов. Образуем следующий предпучок $\mathcal{F}(\cdot)$ на Ω: $\mathcal{F}(u) \leftrightharpoons$ $\leftrightharpoons \Omega_u^{\Omega_1}$, $\forall u \in \Omega$ и $\rho_v^u(f) \leftrightharpoons f(\cdot) \wedge v$. Такой предпучок является пучком на Ω. По теореме 16г образуем объект $\mathcal{F}'$, для которого $\Omega^{\Omega_1} = (\mathcal{F}')^{\wedge\Omega}$. Если, как выше, $\Omega_1 \leftrightharpoons \mathcal{T}(Y)$, то объект $\mathcal{F}'$ обозначим $\mathcal{F}'_Y$. Теорема 24 говорит, что $\mathcal{F}'_Y = \tilde{Y}$. Обозначим $\mathcal{F}_Y \leftrightharpoons \bigcup \{\mathcal{F}(u) \mid u \in \Omega\}$. Далее p, q, r везде пробегают множество $\mathcal{F}_Y$.

Итак, мы ввели внешние, т. е. из класса V, объекты $\mathcal{F}_Y$ и $C_\Omega(X, Y)$, Y^Ω и $C_1(X, Y)$ и внутренние, т. е. из класса V^Ω, объекты $\mathcal{F}'_Y$ и $\tilde{Y}$. И собираемся установить, что все они в сущности одно и тоже: $\mathcal{F}_Y \cong C_\Omega(X, Y)$, $Y^\Omega \cong C_1(X, Y)$, $\mathcal{F}(1) = Y^\Omega$ и $\mathcal{F}'_Y = \tilde{Y}$, $Y^\Omega \cong (\mathcal{F}'_Y)^{\wedge\Omega}$. Уточним некоторые детали и перейдем к доказательству этих утверждений.

Пусть $\Omega_1 \leftrightharpoons \mathcal{T}(Y)$, где Y — топологическое пространство, в Y выбрана равномеризация топологии $\mathcal{T}$ в Y с помощью некоторой базы Σ открытых, симметрических окружений в Y.

Выше определенные $\mathcal{F}'_Y$ (а также $\Omega^{\mathcal{T}}$) назовем Ω-пополнением топологического пространства Y.

З а м е ч а н и е. Можно проверить [44], что объект $\mathcal{F}'_Y$ имеет следующее более простое по сравнению с теоремой 16г описание: $\mathcal{F}'_Y$: $\mathcal{F}_Y \to \Omega$, где для любого $p \in \Omega_u^{\mathcal{T}}$ положим $\mathcal{F}'_Y(p) \leftrightharpoons u$. Здесь $p \in V^\Omega$, так как $\mathcal{T}$, на котором определено p, отождествляется с $\{\check{\alpha} \mid \alpha \in \mathcal{T}\} \subseteq V^\Omega$.

Напомним, что (отделимое) Y называется равномерно локально-компактным, если существует такое окружение σ_0, что $\forall y \in Y$ ($\overline{\sigma_0(y)}$ компактно); черта, как всегда, означает замыкание. Равномерно локально-компактное пространство всегда полно и паракомпактно. Напомним, что топология в Y определяется по базе окружений Σ базой топологии $\{\sigma(y) \mid y \in Y, \sigma \in \Sigma\}$. Для случая, когда Ω — булева алгебра, теорема 24 в существенном близка к теоремам 1,4 из работы [11], а частично переходит в материал заметки [14].

В множествах $\mathcal{F}_Y$ и $C_\Omega(X, Y)$ определим оценки: $[\![p = q]\!]_1 = \bigwedge \{p(\alpha) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow q(\alpha) \mid \alpha \in \mathcal{T}(Y)\}$ и $[\![f = g]\!]_2 = j(\{x \in \mathcal{O}_f \cap \mathcal{O}_g \mid f(x) = g(x)\}^\circ)$, где $\mathcal{O}_f$, $\mathcal{O}_g$ — области определения соответствующих функций. Здесь $^\circ$, как всегда, означает внутренность, а $j(\mathcal{O})$ — наименьшее открыто-компактное множество, содержащее $\mathcal{O}$, т. е. $j(\mathcal{O}) = \bigvee_i{}_\Omega u_i$, где $\mathcal{O} = \bigcup_i u_i$ (это j неявно используется и в определении Ω-плотного множества). Итак, определены две оценки: $\langle \mathcal{F}_Y, [\![\cdot = \cdot]\!]_1 \rangle$, $\langle C_\Omega(X, Y), [\![\cdot = \cdot]\!]_2 \rangle$.

Если в Y определены операции, то продолжим их в $\mathcal{F}_Y$ и в $C_\Omega(X, Y)$ следующим каноническим образом: $(p + q)(\alpha) = \bigvee \{p(\beta) \wedge q(\gamma) \mid \beta + \gamma \subseteq \alpha\}$ и $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, где $x \in \mathcal{O}_f \cap \mathcal{O}_g$, и аналогично для операций $-$ и $\cdot$. Если некоторое K действует на Y, то аналогично определяется действие $\mathcal{F}_K$ на $\mathcal{F}_Y$, а именно: $(k \cdot p)(\alpha) = \bigvee \{k(\beta) \wedge q(\gamma) \mid \beta \cdot \gamma \subseteq \alpha\}$. При этом Y канонически вкладывается в $\Omega^{\mathcal{T}(Y)}$ и в $C_\Omega(X, Y)$ по формулам: $y \mapsto \check{y}$, где $\check{y}(\alpha) = \begin{cases} 1, & y \in \alpha \\ 0, & y \notin \alpha \end{cases}$ и $y \mapsto f_y$, где $f_y(x) \equiv y$. В частности, если в Y выделены элементы 0 и 1, то возникают $\check{0}$ и $\check{1}$. Обычно y и $\check{y}$ отождествляют. Корректность этих определений операций, а также то, что операции в $\mathcal{F}_Y$ продолжают одноименные операции в Y, проверяется в теореме 24а.

Как всегда, термы, входящие в оценки $[\![\cdot]\!]_1$, $[\![\cdot]\!]_2$, понимаются операторно. Для оценки $[\![\cdot]\!]_{\Omega, \mathcal{F}'_Y}$, определяемой в соответствии с примером 8, операции можно определять двумя способами. Первый состоит в том, что $+(p, q, r) \leftrightharpoons p(Y) \wedge q(Y) \wedge r(Y) \wedge [\![p + q = r]\!]_\Omega$, т. е. $+$ понимается как нестандартный график. Второй применим в том случае, если $+$ равномерно непрерывен на Y; тогда $+$ с $\check{Y}$ продолжается на $\tilde{Y}$ по непрерывности в соответствии с теоремой 24б и это продолжение принимается за определение операции на $\tilde{Y}$. Во втором случае получается то же, что и в первом.

Т е о р е м а 24. *Пусть Y — произвольное равномерно локально компактное топологическое пространство (с базой Σ открытых и симметрических окружений в Y).*

а) *Оценки $\langle \mathcal{F}_Y, [\![\cdot]\!]_1 \rangle$ и $\langle C_\Omega(X, Y), [\![\cdot]\!]_2 \rangle$ равны, соответствующая этому биекция $\simeq$ стратифицированна, т. е. $\Omega_u^{\mathcal{T}} \cong C_u(X, Y)$. Если Y топологическое кольцо (топологическая группа), то оценки также равны, т. е. биекция $\simeq$ сохраняет и операции в $\mathcal{F}_Y$ и $C_\Omega(X, Y)$. При этом $\Omega_u^{\mathcal{T}}$ и $C_\Omega(X, Y)$ — одноименные с Y алгебраические системы для любого $u \in \Omega$ и Y вложено в них.*

б) *Выполняется $[\![\mathcal{F}'_Y = \tilde{Y}]\!]_\Omega = 1$. Оценки $[\![\cdot]\!]_1$ и $[\![\cdot]\!]_{\Omega, \mathcal{F}'_Y}$ равны, а также $Y^\Omega \cong (\mathcal{F}'_Y)^{\wedge\Omega}$.*

в) *Если Y — топологическое кольцо (топологическая группа), то глобально истинно: «объект $\mathcal{F}'_Y$ — одноименная с Y алгебраическая система». Если Y — условно полная решетка (модуль, с абстрактной нормой, с нормой, банахово пространство) то то же самое глобально истинно для $\mathcal{F}'_Y$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) Установим биекцию ψ между $\mathcal{F}_Y$ и $C_\Omega(X, Y)$, играющую в этой теореме основную роль. Напомним, что p, q, r пробегают множество $\mathcal{F}_Y$. Пусть $p \in \Omega_u^{\mathcal{T}}$ и $x \in u$. Положим $\psi(p) = f_p$, где $f_p(x) \leftrightharpoons \lim p^{-1}(\mathcal{T}_x)$, а $\mathcal{T}_x$ — семейство всех открыто-компактных подмножеств в X, содержащих фиксированную точку $x \in X$ (т. е. $\mathcal{T}_x$ — база топологии в X в точке x). Такое $p^{-1}(\mathcal{T}_x)$ — база фильтра множеств в Y, так как p — морфизм. Выберем произвольное открытое покрытие всего Y относительно компактными множествами: $\{\alpha_y \mid y \in Y\}$. Так как p — морфизм, то $S_p \leftrightharpoons \bigcup \{p(\alpha_y) \mid y \in Y\}$ является Ω-плотным в $u = p(Y)$ множеством. Теперь пусть $x \in S_p$. Тогда $\exists y\, (\alpha_y \in p^{-1}(\mathcal{T}_x))$. Последнее, как легко видеть, означает, что для любого $\sigma \in \Sigma$ база $p^{-1}(\mathcal{T}_x)$ содержит множество порядка σ^2. Поэтому $p^{-1}(\mathcal{T}_x)$ — база фильтра Коши. Так как Y полно, то существует $\lim p^{-1}(\mathcal{T}_x)$. Итак, f_p определено на всем S_p. Множество S_p не зависит от выбора покрытия $\{\alpha_y \mid y \in Y\}$: пусть $\{\beta_y\}$ — другое такое покрытие. Тогда $\bigcup\limits_y p(\alpha_y) = \bigcup\limits_y p(\beta_y)$, так как $\overline{\alpha}_y \subseteq \beta_{y_1} \cup \ldots \cup \beta_{y_n}$ и $p(\alpha_y) \leqslant p(\beta_{y_1}) \cup \ldots \cup p(\beta_{y_n}) \leqslant \bigcup\limits_y p(\beta_y)$. Проверим непрерывность функции

f_p: $S_p \to Y$. Пусть $x_0 \in S_p$, $y_0 = f_p(x_0)$ и $\sigma_1 \in \Sigma$. Рассмотрим окрестность $\sigma_1(y_0)$. Выберем такое σ, что $\sigma^4 \subseteq \sigma_1$ и $\sigma(y)$ относительно компактно для всех $y \in Y$, это возможно по условию на Y. Тогда $\{\sigma(y) \mid y \in Y\}$ — такое, как выше, покрытие Y, и поэтому $S_p = \bigcup_y p(\sigma(y))$. Для какого-то y выполняется $x_0 \in p(\sigma(y))$. Это $p(\sigma(y))$ — искомая окрестность точки x_0. Если $x_1 \in p(\sigma(y)) \cap S_p$, то $y_1 \rightleftharpoons f_p(x_1) \in \overline{\sigma(y)}$ и $y_0 \in \overline{\sigma(y)}$. Поэтому $y_1, y_0 \in \sigma^2(y)$, $y_1 \in \sigma^4(y_0)$.

Обозначим f_p также и класс эквивалентности с представителем f_p в $C_\Omega(X, Y)$. Итак, ψ: $\Omega_u^{\mathcal{T}} \to C_u(X, Y)$.

Проверим инъективность отображения ψ. Пусть $p \neq q$ и $u \rightleftharpoons p(Y) = q(Y)$, т. е. существует $\alpha \in \mathcal{T}$, для которого $p(\alpha) \nleqslant q(\alpha)$ (иначе поменяем p и q местами). И пусть f_p совпадает с f_q на множестве $\mathcal{O}$, Ω-плотном в u. Если для всех β таких, что $\overline{\beta} \subseteq \alpha$, выполняется $p(\beta) \cap S_p \cap S_q \cap \mathcal{O} \subseteq q(\alpha)$, то $p(\beta) \subseteq q(\alpha)$. Действительно, легко проверить $j(\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2) = j(\mathcal{O}_1) \cap j(\mathcal{O}_2)$, и, так как $\bigcup \{\beta \mid \overline{\beta} \subseteq \alpha\} = \alpha$ и p—морфизм, то $\bigvee_\beta p(\beta) = p(\bigcup \beta) = p(\alpha)$ и $p(\alpha) \leqslant q(\alpha)$. Противоречие. Поэтому найдется такое β, что $\overline{\beta} \subseteq \alpha$, $x \in (p(\beta) \cap S_p \cap S_q \cap \mathcal{O})$ и $x \notin q(\alpha)$, т. е. $x \in p(\beta) \setminus q(\alpha)$, $x \in (S_p \cap S_q \cap \mathcal{O}) = \mathcal{O}$. Отсюда $f_p(x) \in \overline{\beta} \subseteq \alpha$, и по предположению $f_q(x) \in \alpha$. По определению предела и с учетом монотонности q получим $x \in q(\alpha)$, что дает противоречие. Проверим сюръективность отображения ψ. Пусть функция f: $\mathcal{O} \to Y$, где $\mathcal{O}$ — открытое и Ω-плотное в $u \in \Omega$ множество, непрерывна. Положим $p(\alpha) = j(f^{-1}(\alpha)) \in \Omega$, p: $\mathcal{T} \to \Omega$. Это p — морфизм, так как j является с Ha-морфизмом вида $\mathcal{T}(X) \to \Omega$, т. е. $p \in \Omega_u^{\mathcal{T}}$. Образуем f_p и S_p. Если $x \in S_p \cap \mathcal{O}$, то $f(x) = f_p(x)$, так как $f(x) = \lim p^{-1}(\mathcal{T}_x)$. Действительно, если $f(x) \in \alpha$, то $x \in p(\alpha)$, $\alpha \in p^{-1}(\mathcal{T}_x)$. Итак, f и f_p совпадают на Ω-плотном множестве $S_p \cap \mathcal{O}$, т. е. $\psi(p) = f$. Отметим полезную формулу $p(\alpha) \equiv j(f_p^{-1}(\alpha))$, где здесь и далее $f_p = \psi(p)$. Итак, ψ: $\Omega_u^{\mathcal{T}} \leftrightarrow C_u(X, Y)$, $\forall u \in \Omega$. Биекция ψ сохраняет оценки $[\![\cdot]\!]_1$ и $[\![\cdot]\!]_2$, т. е. $\bigwedge_\alpha (p(\alpha) \leftrightarrow q(\alpha)) = j(\{x \mid f_p(x) = f_q(x)\}^\circ$, что и означает по определению равенство этих двух оценок. Действительно, если $f_p(x) = f_q(x)$ и $x \in p(\beta)$, где $\overline{\beta} \subseteq \alpha$, то $f_p(x) \in \overline{\beta}$, $f_q(x) \in \alpha$, $x \in q(\alpha)$, т. е. $\{x \mid f_p(x) = f_q(x)\}^\circ \wedge p(\beta) \subseteq q(\alpha)$, $[\![f_p = f_q]\!]_2 \wedge p(\beta) \leqslant q(\alpha)$, $[\![f_p = f_q]\!]_2 \leqslant (p(\alpha) \leftrightarrow q(\alpha))$. Наоборот: если $f_p(x) \neq f_q(x)$ и $x \in \bigcap_\alpha (p(\alpha) \leftrightarrow q(\alpha))$, то существуют такие $\alpha, \beta \in \mathcal{T}$, что $\alpha \cap \beta = \varnothing$, $f_p(x) \in \alpha$, $f_q(x) \in \beta$. Тогда $x \in (p(\alpha) \cap q(\beta))$, $x \in p(\alpha) \wedge q(\beta) \wedge (q(\beta) \to p(\beta)) \leqslant p(\alpha) \wedge p(\beta) = \varnothing$, противоречие. Получаем $[\![p = q]\!]_1 \leqslant \bigcap_\alpha (p(\alpha) \leftrightarrow q(\alpha)) \subseteq \{x \mid f_p(x) = f_q(x)\}$, что дает искомое равенство.

Итак, отображение ψ является искомой биекцией между $\mathcal{F}_Y$ и $C_\Omega(X, Y)$.

Пусть Y — упомянутая алгебраическая система (или любая другая с позитивными аксиомами). Сумма функций p и q (как и f_p, f_q) вычисляется сначала переходом к $p(\cdot) \wedge u$ и $q(\cdot) \wedge u$, где $u = p(Y) \wedge q(Y)$ (соответственно переходом к $f_p \upharpoonright \mathcal{O}$ и $f_q \upharpoonright \mathcal{O}$, где $\mathcal{O} = \mathcal{D}(f_p) \cap \mathcal{D}(f_q)$), а затем сложением. Ясно, что $\mathcal{O}$ Ω-плотно в u. Поэтому корректность операций и изоморфность биекции ψ достаточно проверить для $p, q \in \Omega_u$. Пусть p, q таковы. Проверим, что сумма $p + q$ принадлежит $\Omega_u^{\mathcal{T}}$ (так же будет для всех операций). Действительно, $(p + q)(\varnothing) = 0$, $(p + q)(Y) = p(Y) \wedge q(Y) = u$, $(p + q)(\alpha_1 \cap \alpha_2) = \bigvee \{p(\beta) \wedge p(\gamma)\}$, где $p(\beta) \wedge q(\gamma) \leqslant (p + q) \cdot (\alpha_1) \wedge (p + q)(\alpha_2)$. Наоборот: $(p + q)(\alpha_1) \wedge (p + q)(\alpha_2) = \bigvee \{(p(\beta_1) \wedge q(\gamma_1) \wedge p(\beta_2) \wedge q(\gamma_2) \mid \beta_1 + \gamma_1 \subseteq \alpha_1, \beta_2 + \gamma_2 \subseteq \alpha_2\} \leqslant \bigvee \{p(\beta_1 \cap \beta_2) \wedge q(\gamma_1 \cap \gamma_2) \mid \beta_1 \cap \beta_2 + \gamma_1 \cap \gamma_2 \subseteq \alpha_1 \cap \alpha_2\} \leqslant (p + q)(\alpha_1 \cap \alpha_2)$. Отсюда получаем монотонность любой функции $p + q$ и, в частности, $[\bigvee_i (p +$

$+ q)(\alpha_i) \leqslant (p+q)(\bigcup_i \alpha_i)]$. Если проверить обратное неравенство, то мы докажем, что $(p+q)$ — u-морфизм. Для этого (а главное для доказательства следующего пункта теоремы) нужна

Лемма 5. *Пусть Y — равномерно локально-компактное пространство и $p\colon \mathcal{T} \to \Omega$ — такая функция, что $p(\varnothing) = 0$, $p(Y) = u$ (где $u \in \Omega$), $p(\alpha \cap \beta) = p(\alpha) \wedge p(\beta)$. Тогда эквивалентны следующие три свойства функции p. Первое: $p(\bigcup_i \alpha_i) = \bigvee_i p(\alpha_i)$ («вполне аддитивность»), второе: $p(\alpha) = \bigvee \{p(\beta) \mid \overline{\beta} \subseteq \alpha,\ \overline{\beta}$ — компактно$\}$ («компактная регулярность»), третье: $p(\alpha) = \bigvee \{p(\beta) \mid \exists \sigma \in \Sigma\, (\sigma(\beta) \subseteq \alpha)\}$ и $\forall \sigma \in \Sigma\, (\bigvee \{p(\alpha) \mid \alpha^2 \subseteq \sigma\} = p(Y))$ («равномерная регулярность»). Свойство равномерной регулярности не зависит от выбора базы окружений Σ.*

Доказательство. а) Сначала проверим второе утверждение леммы: $\bigvee \{p(\beta) \mid \exists \sigma \in \Sigma\, (\sigma(\beta) \subseteq \alpha)\} = \bigvee \{p(\beta) \mid \exists \sigma_1 \in \Sigma\, (\sigma_1(\beta) \subseteq \alpha)\}$, что следует из определения базы фильтра. Так же проверяем второе свойство. Перейдем к первому утверждению и занумеруем эти свойства последовательно числами 1, 2, 3. Очевидно, $1 \Rightarrow 2$, и нетрудно проверить, что $2 \Rightarrow 3$. Нетривиально, что $3 \Rightarrow 1$. Выберем новую базу окружений $\Sigma_1 = \{\sigma \cap \sigma_0 \mid \sigma \in \Sigma\}$, где σ_0 таково, что $\overline{\sigma_0(y)}$ компактно для всех $y \in Y$. Для нее по доказанному также выполняется свойство равномерной регулярности; далее переменные вида $\sigma, \sigma_0, \ldots$ пробегают Σ_1. Пусть $\sigma(\beta) \subseteq \alpha$. Выберем такое σ_1, что $\sigma_1^2(\beta) \subseteq \alpha$. Так как $p(Y) = \bigvee \{p(\alpha) \mid \alpha^2 \subseteq \sigma_1\} \leqslant \bigvee \{p(\sigma_1(y)) \mid y \in Y\}$, то $p(\beta) \leqslant \bigvee \{p(\beta) \wedge p(\sigma_1(y)) \mid y \in Y\} \leqslant \bigvee \{p(\sigma_1(y)) \mid y \in \sigma_1(\beta)\}$. Пусть $y \in \sigma_1(\beta)$. Тогда $\sigma_1^2(y) \subseteq \alpha$, $\overline{\sigma_1(y)} \subseteq \alpha$ и $\overline{\sigma_1(y)}$ компактно. Поэтому $p(\beta) \leqslant \bigvee \{p(\sigma_1(y)) \mid \sigma_1(y) \subseteq \alpha,\ \sigma_1(y)$ компактно$\} \leqslant \bigvee \{p(\gamma) \mid \overline{\gamma} \subseteq \alpha,\ \overline{\gamma}$ компактно$\}$, $p(\alpha) \leqslant \bigvee \{p(\gamma) \mid \overline{\gamma} \subseteq \alpha,\ \overline{\gamma}$ компактно$\}$. Итак, мы доказали $3 \Rightarrow 2$. Пусть $\overline{\beta} \subseteq \alpha_1 \cup \alpha_2$, $\overline{\beta}$ компактно. Проверим, что $p(\beta) \leqslant p(\alpha_1) \vee \vee\, p(\alpha_2)$, и тогда по уже доказанной компактной регулярности получим конечную аддитивность функции p. Для любого $y \in \overline{\beta}$ найдется σ_y, для которого $(\sigma_y^2(y) \subseteq \alpha_1) \vee (\sigma_y^2(y) \subseteq \alpha_2)$. Получим покрытие $\overline{\beta}$ такими σ_y, выберем конечное подпокрытие $\sigma_{y_1}(y_1), \ldots, \sigma_{y_n}(y_n)$ и положим $\sigma = \sigma_{y_1} \cap \ldots \cap \sigma_{y_n}$. Получим $\forall y \in \beta\, (\sigma(y) \subseteq \alpha_1 \vee \sigma(y) \subseteq \alpha_2)$, так как любое y содержится, например, в $\sigma_{y_1}(y_1)$, которое содержится в α_1 или в α_2: если, например, $\sigma_{y_1}(y_1) \subseteq \alpha_1$, то и $\sigma(y) \subseteq \alpha_1$. Положим $\beta_1 \leftrightharpoons \{y \in \beta \mid \sigma(y) \subseteq \alpha_1\}$ и $\beta_2 \leftrightharpoons \{y \in \beta \mid \sigma(y) \subseteq \alpha_2\}$. Тогда $\beta = \beta_1 \cup \beta_2$ и $\sigma(\beta_1) \subseteq \alpha_1$, $\sigma(\beta_2) \subseteq \alpha_2$. Выберем такое σ_1, что $\sigma_1^2 \subseteq \sigma$, и получим $\sigma_1^2(\beta_1) \subseteq \alpha_1$, $\sigma_1^2(\beta_2) \subseteq \alpha_2$ и $\sigma_1(\beta) = \sigma_1(\beta_1) \cup \sigma_1(\beta_2)$. Чуть выше проверялась полезная формула: $p(\beta) \leqslant \bigvee \{p(\sigma_1(y)) \mid y \in \sigma_1(\beta)\}$ (для произвольного β). Продолжим ее $p(\beta) \leqslant (\bigvee \{p(\sigma_1(y)) \mid \sigma_1(y) \subseteq \alpha_1) \vee (\bigvee \{p(\sigma_1(y)) \mid \sigma_1(y) \subseteq \alpha_2\}) \leqslant p(\alpha_1) \vee \vee\, p(\alpha_2)$. Осталось из компактной регулярности и конечной аддитивности функции p получить ее вполне аддитивность. Пусть $\alpha = \bigcup_i \alpha_i$ и $\overline{\beta} \subseteq \alpha$, $\overline{\beta}$ — компакт. Тогда $\beta \subseteq \alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_n$ и $p(\beta) \leqslant p(\alpha_1) \vee \ldots \vee p(\alpha_n) \leqslant \bigvee_i p(\alpha_i)$. Отсюда $p(\alpha) \leqslant \bigvee_i p(\alpha_i)$. Лемма 5 доказана.

Продолжим доказательство пункта а) теоремы 24. Проверим компактную регулярность функции $p+q$. Так как $p(\alpha_1) = \bigvee \{p(\beta) \mid \overline{\beta} \subseteq \alpha_1$, $\overline{\beta}$ — компакт$\}$ и $q(\alpha_2) = \bigvee \{q(\gamma) \mid \gamma \subseteq \alpha_2, \overline{\gamma}$ — компакт$\}$, то $(p+q)(\alpha) = \bigvee \{p(\alpha_1) \wedge q(\alpha_2) \mid \alpha_1 + \alpha_2 \subseteq \alpha\} \leqslant \bigvee \{p(\beta) \wedge q(\gamma) \mid \overline{\beta} + \overline{\gamma} \subseteq \alpha, \overline{\beta}, \overline{\gamma}$ — компакты$\} \leqslant \bigwedge \{p(\beta) \wedge q(\gamma) \mid \overline{\beta + \gamma} \subseteq \alpha,\ \overline{\beta + \gamma}$ — компакт$\} \leqslant \bigvee \{(p + q)(\beta + \gamma) \mid \overline{\beta + \gamma} \subseteq \alpha,\ \overline{\beta + \gamma}$— компакт$\} \leqslant \bigvee \{(p+q)(\delta) \mid \overline{\delta} \subseteq \alpha, \overline{\delta}$ — компакт$\}$. По лемме 5 (в ее простой части) получим, что $(p+q) \in \Omega_u^{\mathcal{T}}$.

Наконец, проверим, что биекция ψ сохраняет операции в пучках $\mathcal{F}_Y$ и

$C_\Omega(X, Y)$. А именно, что $\psi(p+q) \leftrightharpoons f_{p+q}$ и $f_p + f_q = \psi(p) + \psi(q)$ (и также для других операций). Действительно, f_{p+q} и $f_p + f_q$ определены на каком-то Ω-плотном в $u = p(Y) = q(Y)$ множестве $\mathcal{O}$. Сравним их в какой-то точке $x \in \mathcal{O}$, т. е. сравним $z = \lim (p+q)^{-1}(\mathcal{T}_x)$ и $y_1 + y_2$, где $y_1 = \lim p^{-1}(\mathcal{T}_x)$, $y_2 = \lim q^{-1}(\mathcal{T}_x)$. Пусть α — любая окрестность точки $(y_1 + y_2) \in Y$. Выберем окрестность $\overline{\delta}$, для которой $(y_1 + y_2) \in \delta$ и $\overline{\delta} \subseteq \alpha$. Выберем такие α_1, α_2, что $y_1 \in \alpha_1$, $y_2 \in \alpha_2$ и $\underline{\alpha_1 + \alpha_2} \subseteq \delta$. Тогда $x \in p\cdot(\alpha_1)$, $x \in q(\alpha_2)$, $x \in (p+q)(\alpha_1 + \alpha_2)$ и $z \in \overline{\alpha_1 + \alpha_2} \subset \overline{\delta} \subseteq \alpha$. Отсюда $y_1 + y_2 = z$.

Убедимся, что Y вложено в $\mathcal{F}_Y$, а именно в множество глобальных элементов Y^Ω. Если $y_1 \neq y_2$, то, очевидно, $\check{y}_1 \neq \check{y}_2$. И $(y_1 + y_2)^\vee = \check{y}_1 + \check{y}_2$ (так же для всех операций в Y). Действительно, с учетом непрерывности операции $+$ получим $(y_1 + y_2)^\vee(\alpha) = \bigvee \{\check{y}_1(\beta) \wedge \check{y}_2(\gamma) \mid \beta + \gamma \subseteq \alpha\}$.

б) Глобальная истинность предложения $\forall\sigma, \sigma_1 \in \check{\Sigma} \exists \sigma_0 \in \check{\Sigma}\ (\sigma_0 \subseteq \sigma \cap \sigma_1) \wedge (\check{Y})^2 \subseteq \sigma \wedge \sigma = \sigma^{-1} \wedge \exists\, \sigma_2 \in \check{\Sigma}\ (\sigma_2^2 \subseteq \sigma))$ означает, что $\langle \check{Y}, \check{\Sigma}\rangle$ — равномерное пространство с базой $\check{\Sigma}$ фильтра окружений. Также проверяется глобальная истинность того, что $\check{\mathcal{T}}$ — одна из баз топологии в равномерном пространстве $\check{Y}$.

Будем пользоваться определением объекта $\mathcal{F}'_Y$, указанным в замечании на с. 141. Напомним, что $b \in \tilde{Y} \leftrightharpoons b$ — «база минимального фильтра Коши в равномерном пространстве $\langle \check{Y}, \check{\Sigma}\rangle$, содержащаяся в базе топологии $\check{\mathcal{T}}$». Вместо слов, взятых в кавычки, будем говорить короче: «b — база в $\check{\mathcal{T}}$ минимального фильтра Коши». Осталось проверить глобальную истинность следующего предложения: «$b \in \mathcal{F}'_Y \Leftrightarrow b$ — база в $\check{\mathcal{T}}$ минимального фильтра Коши».

Напомним, что это последнее понятие означает следующее: 1) $b \subseteq \check{\mathcal{T}}$, 2) $\forall \alpha, \beta \in b\ (\alpha \cap \beta \in b)$, 3) $\forall \alpha, \beta \in \check{\mathcal{T}}\ (\alpha \subseteq \beta \wedge \alpha \in b \colon \Rightarrow) \colon \beta \in b)$, 4) $\exists \alpha \in \check{\mathcal{T}}\ (\alpha \in b)$, 5) $\check{\varnothing} \notin b$, 6) $\forall \sigma \in \check{\Sigma} \exists \alpha \in \check{\mathcal{T}}\ (\alpha \in b \wedge \alpha \times \alpha \subseteq \sigma)$, 7) $\forall \alpha \in b \exists \beta \in b \exists \sigma \in \Sigma\ (\sigma(\beta) \subseteq \alpha)$.

Слева направо: пусть $p \in \Omega_u^{\mathcal{T}}$, и нужно проверить, что $u \leqslant [\![p$ — база в $\check{\mathcal{T}}$ минимального фильтра Коши$]\!]$. Действительно, 1) $\bigwedge_{\alpha \in \mathcal{T}} (p(\alpha) \to [\![\check{\alpha} \in \check{\mathcal{T}}]\!]) = 1$, 2) $\bigwedge_{\alpha, \beta \in \mathcal{T}} (p(\alpha) \wedge p(\beta) \to [\![(\check{\alpha} \cap \check{\beta}) \in p]\!]) = 1$, так как $[\![\check{\alpha} \cap \check{\beta} = (\alpha \cap \beta)^\vee]\!] = 1$, 3) $\bigwedge_{\alpha, \beta \in \mathcal{T}} ([\![\check{\alpha} \subseteq \check{\beta}]\!] \wedge [\![\check{\alpha} \in p]\!] \to [\![\check{\beta} \in p]\!]) = 1$, так как $\check{\alpha} \in p]\!] = p(\alpha)$, 4) $\bigvee_\alpha [\![\check{\alpha} \in p]\!] = \bigvee_\alpha p(\alpha) = u$, 5) $[\![\check{\varnothing} \in p]\!] = p(\varnothing) = 0$, $\check{\varnothing} \in p]\!] = 1$, 6) $\bigwedge_\sigma \bigvee_\alpha p(\alpha) \wedge [\![\check{\alpha} \times \check{\alpha} \subseteq \check{\sigma}]\!] = u$, так как $\check{\alpha} \times \check{\alpha} = (\alpha \times \alpha)^\vee$ и $\{p(\alpha) \mid \alpha \times \alpha \subseteq \sigma\} = p(Y) = u$, 7) $\bigwedge_\alpha (p(\alpha) \to \bigvee_{\beta, \sigma} (p(\beta) \wedge [\![\check{\sigma}(\check{\beta}) \subseteq \check{\alpha}]\!])) = \bigwedge_\alpha (p(\alpha) \to \bigvee_{\sigma(\beta) \subseteq \alpha} p(\beta)) = 1$, так как $[\![\check{\sigma}(\check{\beta}) = (\sigma(\beta))^\wedge]\!] = 1$ и, главное, $p(\alpha) = \bigvee \{p(\beta) \mid \exists \sigma(\sigma(\beta) \subseteq \alpha)\}$.

Теперь проверим вышеуказанную эквивалентность справа налево. Пусть $[\![b$ — база в $\check{\mathcal{T}}$ минимального фильтра Коши$]\!] \leftrightharpoons u \in \Omega$. Положим $p(\alpha) \leftrightharpoons [\![\check{\alpha} \in b]\!] \wedge u$ и покажем, что $[\![p = b]\!] \geqslant u$ и $p \in \Omega_u^{\mathcal{T}}$; это докажет искомую импликацию. Действительно, $u \wedge [\![z \in b]\!] \leqslant [\![z \in \check{\mathcal{T}} \wedge z \in b]\!] \leqslant \bigvee_\alpha [\![z = \check{\alpha} \wedge z \in b]\!] \leqslant \bigvee_\alpha [\![z = \check{\alpha}]\!] \wedge p(\alpha) \leqslant \bigvee_\alpha [\![z = \check{\alpha} \wedge \check{\alpha} \in p]\!] \leqslant [\![z \in p]\!]$, так как $[\![\check{\alpha} \in p]\!] = \bigvee_\beta [\![\check{\beta} \in b]\!] \wedge u \wedge [\![\check{\alpha} = \check{\beta}]\!] = p(\alpha)$. И наоборот: $1 = \bigwedge_\alpha (p(\alpha) \to [\![\check{\alpha} \in b]\!])$, так как $p(\alpha) \leqslant [\![\check{\alpha} \in b]\!]$. Проверим второе утверждение: $p(\varnothing) = [\![\check{\varnothing} \in b]\!] \wedge u = 0$, $p(Y) = [\![\check{Y} \in b]\!] \wedge u \leqslant u$ и $u \leqslant \bigvee_{\alpha} [\![\check{\alpha} \in b]\!] \wedge ([\![\check{\alpha} \subseteq Y \wedge \check{\alpha} \in b]\!] \to [\![\check{Y} \in b]\!]) \leqslant [\![\check{Y} \in b]\!]$, т. е. $p(Y) = u$; $p(\alpha \cap \beta) = [\![(\alpha \cap \beta)^{\vee} \in b]\!] \wedge u = [\![\check{\alpha} \in b]\!] \wedge [\![\check{\beta} \in b]\!] \wedge u = p(\alpha) \wedge p(\beta)$; $p(\alpha) = [\![\check{\alpha} \in b]\!] \wedge u \leqslant [\![\check{\alpha} \in b]\!] \wedge ([\![\check{\alpha} \in b]\!] \to \bigvee_{\beta, \sigma} [\![\check{\beta} \in b]\!] \wedge [\![\check{\sigma}(\check{\beta}) \subseteq \check{\alpha}]\!]) \leqslant \bigvee \{p(\beta) \mid \exists \sigma (\sigma(\beta) \subseteq \alpha)\}$, т. е. $p(\alpha) = \bigvee \{p(\beta) \mid \exists \sigma (\sigma(\beta) \subseteq \alpha)\}$, и $\bigvee \{p(\alpha) \mid \alpha^2 \subseteq \sigma\} = \bigvee \{[\![\check{\alpha} \in b]\!] \wedge u \mid \alpha^2 \subseteq \sigma\} \geqslant [\![\exists \alpha \in \check{\mathscr{T}} (\alpha \in b \wedge \alpha^2 \subseteq \check{\sigma})]\!] \geqslant u$, т. е. p обладает свойством равномерной регулярности. По лемме 5 получим, что p вполне аддитивно.

в) Этот пункт проверяется прямым вычислением оценок. $\square$

З а м е ч а н и е. Известны теоремы о переносе свойств как Y, так и всей структуры с носителем Y на $\check{Y}$, затем с $\check{Y}$ (по непрерывности — единственный нетривиальный шаг) на $\tilde{Y}$, а затем на $\Omega^{\mathscr{T}} \simeq C_1(X, Y)$, как это делалось в предыдущих главах. Построение, аналогичное $\tilde{Y}$, проходит для локально-компактных, метрических и некоторых близких к ним классов топологических пространств в роли Y. Оно возможно и для произвольного Ω_1 вместо $\mathscr{T}_Y$. Также возможно каноническое сопоставление каждому p Ω-значной меры μ_p, причем p равно среднему по этой мере. Определяется интегрирование функций по мере μ_p, для которого $\int f d\mu_p = f(p)$. Для булевозначного случая интегрирование и различные интегральные представления с булевозначными мерами рассматриваются, в частности, в [11, 15].

ДОБАВЛЕНИЕ
БУЛЕВОЗНАЧНЫЙ СЛУЧАЙ ОЦЕНИВАНИЯ

В работах [11, 15] много тщательных вычислений булевозначных оценок в контексте вопросов функционального анализа, теории интегрирования и интегральных представлений, а также общих теорем о булевозначных оценках. Следуя этим работам, приведем здесь примеры специфических рассуждений, характерных для булевозначного анализа. Опущенные детали содержатся в этих работах. Приводимые ниже результаты переносятся частью на произвольные полные гейтинговы алгебры, частью на классы таких алгебр, например, на стоуновы алгебры. Математическое содержание дополнения, как и его общий план, описаны в начале гл. IV.

Если рассматриваемая оценка имеет все свои значения в фиксированной полной булевой алгебре $\mathbb{B}$, то возникает существенная специфика. Она состоит прежде всего в следующем: если $ZFC \vdash \varphi$, то $[\![\varphi]\!]_B = 1$, где $[\![\cdot]\!]_B$ — оценка в языке ZF с множеством параметров V^B (см. например 1 и теорему 8а). Возможен тезис: «если утверждение φ из традиционной математики истинно, то $ZFC \vdash \varphi$». Поэтому «все объекты и утверждения традиционной математики соответственно существуют в V^B и глобально истинны в V^B». Причем они существуют даже в том более сильном смысле, который вытекает из достижимости оценки в языке V^B, см. теорему 4. Это существенно облегчает работу с булевозначными оценками и, в частности, с оценкой в языке ZF. Кроме того, часто бывает удобно использовать в рассуждениях булевость оценки $[\![\varphi]\!]_B$ в языке ZF, булевость $f(g)$, где $f \in V^B$, и отделимость (экстремальную несвязность) стоунова пространства $X(\mathbb{B})$, см. ниже. Теорию булевозначных оценок иногда называют булевозначным анализом; прежде чем переходить к нему — два слова о робинсоновском нестандартном анализе.

Из теоремы 3г) сразу следует: $([\![\varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)]\!]_{Z_2} = 1) \Leftrightarrow ([\![\varphi(\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)]\!]_{\Omega} = 1$, где φ — любая ограниченная формула, Ω — произвольная полная гейтингова алгебра и $Z_2 \subseteq \Omega$, $V^{Z_2} \subseteq V^{\Omega}$. Назовем все объекты вида $\check{x}$ из V^{Ω} стандартными объектами («множествами»); т. е. класс V, отождествляемый с классом $\{\check{x} \mid x \in V\}$,— класс стандартных объектов. Объекты из $V^\Omega \setminus V^{Z_2}$ назовем нестандартными или нечеткими объектами («множествами»). Эта эквивалентность говорит, что глобальные истинности на классе стандартных объектов и на классе всех объектов (для ограниченных формул со стандартными параметрами) совпадают. Существенно новые возможности возникают в том случае, когда эта эквивалентность верна для всех формул со стандартными параметрами. Это верно, если Ω — особо простая полная булева алгебра; а именно, если Ω — дискретная полная булева алгебра, т. е. Ω — решетка всех подмножеств фиксированного множества I (обозначим $\mathscr{P}(I)$ решетку всех подмножеств множества I). Теорию $\mathscr{P}(I)$-значных оценок иногда называют робинсоновским нестандартным анализом. Конечно, робинсоновский нестандартный анализ можно излагать, формально не упоминая никаких оценок. Однако по теореме Лося истинность в ультрапроизведении $(\prod_{\alpha\in I} K_\alpha)/D \models \varphi([k_1], \ldots, [k_n])$ эквивалентна тому, что $[\![\varphi(k_1, \ldots, k_n)]\!] = 1$, где $[\![\varphi]\!] \leftrightharpoons \{\alpha \in I \mid K_\alpha \models \varphi(k_1(\alpha), \ldots, k_n(\alpha))\}$. Поэтому $\mathscr{P}(I)$ — оценки органически входят в робинсоновский нестандартный анализ. Можно думать, что многие достижения робинсоновского анализа возможны и в гейтинговозначном анализе. Напомним аксиоматику робинсоновского нестандартного анализа из работы Е. Нельсона [16]. Она интересна и тем, что соответствующая система понятий непосредственно переносится на булевозначный и гейтинговозначный анализы, для которых также можно привести соответствующие аксиоматики. Мы опишем аксиоматику Нельсона очень неформально. Пусть M — «мир объектов (множеств)» и S (часть мира M) — «мир стандартных объектов (множеств)». Язык (обозначим его ZFS) для описания свойств мира M — это обычный язык ZF, пополненный одноместным предикатом $st(x)$ — «x стандартно»; ясно, что $(M \models st(x)) \Leftarrow (x \in S)$. Далее, $x^\wedge = \{y \in M \mid M \models (y \in x)\}$ называется внешним стандартным множеством (если выполняется $x \in S$), внешним множеством (если выполняется $x \in M$), а множество z, не представимое в виде $z = x^\wedge$ ни для какого $x \in M$, называется строго внешним. У Нельсона (как и вообще в робинсоновском нестандартном анализе) вместо $x^\wedge$ пишут $^*x$. Внутренней называется любая формула языка ZF. Аксиомами служат все обычные аксиомы теории ZFC, сформулированные для внутренних формул, и еще три новых аксиомы (подразумеваемая роль аксиом состоит в том, что они истинны в M): 1) $\varphi \Leftrightarrow \varphi^{st}$ для всех φ, где φ — внутренняя формула, содержащая только стандартные параметры, а φ^{st} означает релятивизацию φ предикатом $st(\cdot)$ (таким образом, внутренними формулами со стандартными параметрами миры M и S неразличимы); далее запись $\forall^{stfin} z$ означает релятивизацию квантора $\forall z$ предикатом «$st(z) \wedge z$ — конечное», 2) $\forall^{stfin} z \exists x \forall y \in z\varphi(x, y) \Leftrightarrow \exists^{st} x \forall^{st} y \varphi(x, y)$ для всех φ, где φ — внутренняя формула с любыми параметрами (таким образом, то, что выполняется для всех стандартных конечных множеств, выполняется и для всех стандартных множеств), 3) $\forall^{st} x \exists^{st} y \forall^{st} z\, (z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$, где φ — любая формула с параметрами (тонкая связь стандартных и нестандартных множеств).

Перейдем к булевозначному анализу и рассмотрим в виде примера некоторые вопросы двойственности.

а). Далее везде $\mathbb{B}$ — произвольная фиксированная полная булева алгебра, а оценка $[\![\cdot]\!]_B$ — оценка в языке ZF со значениями в $\mathbb{B}$ и семейством параметров V^B (см. пример 1).

Пусть $\mathscr{X}$ — вещественное или комплексное банахово пространство (поле скаляров обозначим K). $\mathscr{X}^*$ — сопряженное банахово пространство над K, D — единичный шар (включающий границу) в $\mathscr{X}^*$. Операция $(\cdot)^\sim$ определена в теореме 24. Тогда $[\![\tilde{\mathscr{X}}$ — банахово пространство над $\tilde{K}]\!] = 1$. Обозначим $\mathscr{D}$ тот объект в V^B, для которого $[\![\mathscr{D}$ — единичный шар (включающий границу) в $(\tilde{\mathscr{X}})^*]\!] = 1$. Если $h \in D$ (т. е. $h\colon \mathscr{X} \to K$), то продолжим по равномерной непрерывности $\check{h}$ (где $[\![\check{h}\colon \check{\mathscr{X}} \to \check{K}$ функционал с нормой $\leqslant 1]\!] = 1$) на $\tilde{\mathscr{X}}$. Это продолжение обозначим $\tilde{h}$. (Точно так же продолжается любая равномерно непрерывная функция.) Положим $\underline{\psi}(h) = \tilde{h}$. Конечно, $\tilde{h} \in (\mathscr{D}^\wedge)$. Положим $\psi = \{\langle \check{h}, \psi(h)\rangle \mid h \in D\}_-$. Конечно, $[\![\underline{\psi}\colon \check{D} \to \mathscr{D}]\!] = 1$.

В D фиксируем равномерную структуру с предбазой фильтра окружений $\{\{\langle h_1, h_2\rangle \in D^2 \mid |h_1(x) - h_2(x)| < \varepsilon\} \mid x \in \mathscr{X},\ \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}\}$, которая, по определению, индуцирует в D топологию, называемую *слабо-двойственной*. Напомним, что это слабейшая топология в D, в которой все функции $h(x)\colon D \to K$ (с переменным h и любым фиксированным $x \in \mathscr{X}$) непрерывны. Эта топология интересна тем, что в ней шар D компактен, и, следовательно, к равномерному топологическому пространству D применима теорема 24. В частности, $\check{D}$ и $\tilde{D}$ — равномерные пространства (в V^B). В $\mathscr{D}$ точно так же определим равномерную структуру, индуцирующую в $\mathscr{D}$ топологию, которую по аналогии можно называть *глобально слабо-двойственной*. Она обладает упомянутыми свойствами слабо-двойственной топологии. Нетрудно проверить, что предбазой фильтра окружений этой топологии является $\{\{\langle h_1, h_2\rangle \in \mathscr{D}^2 \,\|\, h_1(x) - h_2(x)\,| < \varepsilon\} \mid x \in \tilde{\mathscr{X}},\ \varepsilon \in (\mathbb{Q}_{>0})^\vee\}$.

Лемма 6. *Выполняется* $[\![\underline{\psi}\colon \check{D} \to \mathscr{D}$ (*как и* $(\underline{\psi})^{-1}$) *равномерно непрерывная инъекция* (*в равномерных структурах слабо-двойственных топологий*) *и локальный изоморфизм* $]\!] = 1$ *и* $[\![$*образ* $\underline{\psi}$ *плотен в* $\mathscr{D}$ $]\!] = 1$.

Доказательство. Вычисление первой оценки несложно (заметим, что $(\underline{\psi})^{-1} = h \restriction \mathscr{X}$). Для вычисления второй оценки достаточно показать значимость утверждения: $\forall Y \in \mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(\tilde{\mathscr{X}})\ \forall h_1 \in \mathscr{D}\forall \varepsilon \in (\mathbb{Q}_{>0})^\vee\, \exists h_2 \in \check{D}\forall x \in Y\ (\,|\underline{\psi}(h_2)(x) - h_1(x)| < \varepsilon)$, где $\mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(Z)$ — множество всех конечных подмножеств в Z. Так как глобально истинно $\mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(\check{\mathscr{X}}) = (\mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(\mathscr{X}))^\vee$, то нужно проверить $\forall Y \in \mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(\mathscr{X})\ \forall h_1 \in \mathscr{D}^\wedge \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0} \bigvee \{\bigwedge_{x \in Y} [\![\,|(h_2(\check{x})) - h_1(\check{x})| < \check{\varepsilon}]\!] \mid h_2 \in D\} = 1$, пусть $Y = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Итак, проверим $\bigvee_{h_2} \bigwedge_{i=1}^{n} [\![\,|(h_2(\check{x}_i)) - h_1(\check{x}_i)| < \check{\varepsilon}]\!] = 1$. Достаточно рассмотреть случай, когда значимо $\|h_1\| < 1$.

Рассмотрим сначала случай, когда $Y = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — линейно независимая система в $\mathscr{X}$. Обозначим L линейное подпространство в $\mathscr{X}$, натянутое на Y. Тогда $[\![\check{L}$ натянуто на базис $\check{Y} = \{\check{x}_1, \ldots, \check{x}_n\}$ над $\check{K}$ в $\tilde{\mathscr{X}}]\!] = 1$. В $\check{L}$ будем подразумевать норму, индуцированную из $\tilde{\mathscr{X}}$. Сузим h_1 на $\check{L}$, получим h_1', при этом $\|h_1'\| < 1$. Обозначим $\lambda_1 = h_1'(\check{x}_1), \ldots, \lambda_n = h_1'(\check{x}_n)$, $\lambda = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n\rangle \in \check{K}^n$. Обозначим $\check{f} = \langle \check{f}_1, \ldots, \check{f}_n\rangle$ — двойственный базис к базису $\langle \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n\rangle$ в $\check{L}$ и g — изоформизм $(\check{K})^n$ и $(\check{L})^*$ вида $\mu \mapsto \mu_1 \check{f}_1 + \ldots + \mu_n \check{f}_n$, так как любые две нормы в конечномерном пространстве эквивалентны. Функция $g_1\colon (\check{K})^n \to \tilde{\mathbb{R}}$, $g_1(\mu) = \|\mu_1 \check{f}_1 + \ldots + \mu_n \check{f}_n\|$ непрерывна. Поэтому $[\![\exists \delta \in \check{\mathbb{Q}}_{>0} \forall \mu \in \check{K}^n\ (\,|\mu - \lambda| < \delta \Rightarrow g_1(\mu) < 1)]\!] = 1$, где $|\cdot|$ — обычная норма в $(\check{K})^n$ (например, $\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |\mu_i|$). Отсюда $[\![\exists \mu \in (\check{K})^n (|\mu - \lambda| < \check{\varepsilon} \wedge \|\mu_1 \check{f}_1 + \ldots + \mu_n \check{f}_n\| < 1]\!] = 1$, $\bigvee_{\mu_1 \in K} \ldots \bigvee_{\mu_n \in K} [\![\,|\check{\mu} - \lambda| < \check{\varepsilon} \wedge \|(\check{\mu}, \check{f})\| < 1]\!] = 1$. Рассуждаем с оценкой b_μ равной одному слагаемому, $b_\mu > 0$. Это μ из K^n определяет функционал $(\mu, f)\colon L \to K$. Тогда $[\![\,\|(\check{\mu}, \check{f})\| < 1]\!] \geqslant b_\mu$, т. е. $\|(\mu, f)\| \leqslant 1$. По теореме Хана — Банаха для поля K продолжим (μ, f) на $\mathscr{X}$ без увеличения нормы и получим искомый функционал h_2 на D. Далее, $b_\mu \leqslant \bigwedge_i [\![\,|\check{\mu}_i - \lambda_i| < \varepsilon]\!]$, где значимо $\check{\mu}_i = h_2(\check{x}_i)$ и $\lambda_i = h_1'(\check{x}_i) = h_1(\check{x}_i)$, так как $\check{x}_i \in \check{L}$. Суммируя по всем b_μ, получим то, что нужно.

Если Y — линейно зависимая система, то, выбирая ее максимально линейно независимую подсистему, применим предыдущее рассуждение с простыми оценками для векторов, не вошедших в базис.

По лемме 6 продолжим ψ на $\tilde{D}$, т. е. $[\![\psi: \tilde{D} \to \mathscr{D}]\!] = 1$. Для $p \in D^B$ положим $\psi^\wedge(p) = s$, где $[\![\psi(\bar{p}) = s]\!] = 1$ и $s \in \mathscr{D}^\wedge$. Итак, $\psi^\wedge: D^B \to \mathscr{D}^\wedge$. Если продолжение $\underline{\psi}$ рассматривать как график, то $\psi^\wedge$ получается как $(\psi)^\wedge$. Отсюда имеем следующую теорему.

Т е о р е м а 25а). *Отображение $\psi^\wedge$ — изоморфизм $C_1(X, D)$ и $\mathscr{D}^\wedge$, где X — стоуново пространство алгебры $\mathbb{B}$. (В духе теоремы* 9 *свойства $\mathscr{D}$ в V^B переносятся на $C_1(X, D)$).*

З а м е ч а н и е. 1) Из доказательства видно, что аналогичное утверждение имеет место для некоторых других полей в роли K, а также для других слабых топологий.

2) Когда в теореме 24 Y — некоторое пространство функций как, например, в теореме 25а), то f из $C_1(X, Y)$ принимает более наглядный вид в записи $f(p, x) \leftrightharpoons f(p)(x)$, где p пробегает $\mathscr{D}(f)$ — открытое Ω-плотное множество в X, а x пробегает $\mathscr{D}(f(p))$. Обычно такой класс функций «от двух переменных» хорошо описывается в обычных терминах. Таким образом, вопрос о функциях от двух или нескольких переменных может быть редуцирован к такому же вопросу в V^Ω для функций от меньшего числа переменных или от одной переменной (это имеет приложения, например, в комплексном анализе). В ситуации теоремы 25а) $C_1(X, D)$ совпадет с $D(X, \mathscr{X}, K)$ множеством всех непрерывных функций $f(p, x)$: $O_f \times \mathscr{X} \to K$, где O_f — плотное открытое в X множество и $\forall p\ (f(p, x)$ линейно и однородно, и $|f(p, x)| \leqslant \|x\|$), факторизованное как раньше.

б) Пусть A — банахова алгебра (с единицей e) над $\mathbb{C}$ и с непрерывной инволюцией $*$: $A \to A$, удовлетворяющей условию $h(x^*) = h(x)^-$, где $h \in D$ (см. ниже) и $^-$ — комплексное сопряжение (такая алгебра называется *самосопряженной*). Здесь D — множество всех комплексных гомоморфизмов A в $\mathbb{C}$ (кроме тождественно нулевого), т. е. $\varphi(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1\varphi(x) + \lambda_2\varphi(y)$, $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$. Отсюда вытекает $\varphi(e) = 1$ и φ непрерывно. Функцию $h(x)$ с переменной h, пробегающей D, и любым фиксированным $x \in A$ обозначим $\hat{x}$, т. е. $\hat{x}$: $D \to \mathbb{C}$. В дальнейшем понадобится свойство $\forall x \in A$ (x обратим в $A \Leftrightarrow \forall h \in D\ (h(x) \neq 0)$), вытекающее, например, из коммутативности алгебры A (см., например, У. Р у д и н, Функциональный анализ, с. 297). Поэтому для простоты будем считать A коммутативной алгеброй. Положим $f_{x_1, \ldots, x_n}(c_1, \ldots, c_n) = \sum\limits_{i=1}^{n}(c_i e - x_i)(c_i e - x_i)^*$: $\mathbb{C}^n \to A$ (с переменным $c = \langle c_1, \ldots, c_n\rangle$ и параметрами $Y = \{x_1, \ldots, x_n\}$); это — непрерывная функция. Ясно, что ($f_x(c)$) не обратим в $A) \Leftrightarrow \exists h \in \bigwedge (c_1 = h(x_1) \bigwedge \ldots \bigwedge c_n = h(x_n))$. Множество $G(A)$ всех обратимых элементов в A открыто, а множество $F(A)$ всех необратимых элементов в A замкнуто. Обозначим $S(A, x_1, \ldots, x_n) = f_x^{-1}(F(A))$, это — замкнутое множество в $\mathbb{C}^n$.

Множество D со слабейшей топологией в нем, при которой все функции $\{\hat{x} \mid x \in A\}$ непрерывны, является компактом и иногда называется *спектром алгебры* A. К нему применима теорема 24. Обозначим $\mathscr{D}$ тот объект в V^B, для которого $[\![\mathscr{D}$ — спектр банаховой алгебры $\tilde{A}]\!] = 1$. Заметим, что глобально истинно такое же описание алгебры $\tilde{A}$, какое было дано для алгебры A. Если $h \in D$, то продолжим $\check{h}$, где $[\![\check{h}$: $\check{A} \to \tilde{\mathbb{C}}$ — гомоморфизм$]\!] = 1$, по равномерной непрерывности на $\tilde{A}$. Это продолжение обозначим $\tilde{h}$. Конечно, $\tilde{h} \in \mathscr{D}^\wedge$. Положим $\psi(h)^\smile = \tilde{h}$ и $\underline{\psi}^\smile = ^\smile\{\langle\check{h}, \tilde{h}\rangle \mid h \in D\}$. Конечно,

$[\![\underline{\psi}\colon \check{D} \to \mathscr{D}]\!] = 1$. Наконец, положим $\psi^\wedge = (\underline{\psi})^\wedge$, где $\underline{\psi}$ понимается как график отображения ψ.

Лемма 7. *Если $\bar{A}$ — указанная выше банахова алгебра, то* $(G(A))^{\sim} = G(\tilde{A})$, $(F(A))^{\sim} = F(\tilde{A})$, $S(\tilde{A}, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n) = (S(A, x_1, \ldots, x_n))^{\sim} = (S(A, x_1, \ldots, x_n))^{\vee -}$, *где* $^{-}$ *означает замыкание, и* $\langle c_1, \ldots, c_n\rangle \in (S(A, x_1, \ldots, x_n))^{\vee} \Leftrightarrow \exists h \in \check{D}\ \ (c_1 = h(\check{x}_1) \wedge \ldots \wedge c_n = h(\check{x}_n))$.

Лемма 8. *Если A — указанная банахова алгебра, то глобально истинно $\underline{\psi}$ — равномерно непрерывная инъекция (как и обратное к $\underline{\psi}$ отображение), а образ $\underline{\psi}$ плотен в $\mathscr{D}$».*

Доказательство. Первое утверждение несложно. Проверим второе. Пусть $Y = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}_{>0}$, $h_1 \in \mathscr{D}^\wedge$. Нужно установить $\bigvee \{\bigwedge_{i=1}^{n} [\![\,| h_2(\check{x}_i) - h_1(\check{x}_i)\,| < \check{\varepsilon} \mid h_2 \in D\}]\!] = 1$. Обозначим $c_1 = h_1(\check{x}_1), \ldots, c_n = h_1(\check{x}_n)$, $c = \langle c_1, \ldots, c_n\rangle \in \tilde{\mathbb{C}}^n$. Тогда $c \in S(\tilde{A}, \check{x}_1, \ldots, \check{x}_n)$ (достаточно вычислить h_1 на $f_x(c)$). По лемме 7 существует такое $c' = \langle c_1', \ldots, c_n'\rangle \in S(A, x_1, \ldots, x_n)^\vee$, что $|c' - c| < \varepsilon$. Отсюда $\bigvee \{[\![c'_1 = \lambda_1^\vee]\!] \wedge \ldots \wedge [\![c_n' = \lambda_n^\vee]\!] \mid \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n\rangle \in S(A, x_1, \ldots, x_n)\} = 1$, слагаемое обозначим $b_{\lambda_1}, \ldots, {}_{\lambda_n}$. Существует $h_2 \in \Delta$, для которого $\lambda_1 = h_2(x_1), \ldots, \lambda_n = h_2(x_n)$. С оценкой $b_{\lambda_1, \ldots \lambda_n}$ имеем $|\check{\lambda}_i - c_i| < \check{\varepsilon}$, где $\lambda_i^\vee = \tilde{h}_2(\check{x}_i)$. Суммируем по всем $b_{\lambda_1, \ldots, \lambda_n}$.

Отсюда, продолжая $\underline{\psi}$ по равномерной непрерывности на $\tilde{D}$, получим следующую теорему.

Теорема 25б). *Если A — коммутативная самосопряженная банахова алгебра с непрерывной инволюцией, то $\psi^\wedge$ — изоморфизм $C_1(X, D)$ и $\mathscr{D}^\wedge$, где X — стоуново пространство алгебры $\mathbb{B}$. Как обычно, свойства $\mathscr{D}$ в V^B переносятся на $C_1(X, D)$.*

в) Пусть G — коммутативная локально компактная группа, она равномерно локально компактная. Поэтому применима теорема 24. Обозначим G^+ группу ее характеров, т. е. всех непрерывных гомоморфизмов группы G в окружность S (операция в G^+ определяется поточечно, а топология — базой топологии в единице, состоящей из всех $\mathcal{O}(c, \Delta) = \{\chi \in G^+ \mid \chi(c) \subseteq \Delta\}$, где c пробегает все компакты в G и Δ все окрестности единицы в S (см., например, Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, глава VI).

Глобально истинно, что $\tilde{G}$ одноименная с G группа. Если $\chi \in G^+$, то $[\![\check{\chi}\colon \check{G} \to \tilde{S}$ характер$]\!] = 1$; продолжим его по непрерывности на $\tilde{G}$; продолжение, как всегда, обозначим $\tilde{\chi}$. Конечно, $[\![\tilde{\chi} \in (\tilde{G})^+]\!] = 1$. Положим $\psi(\chi) = \tilde{\chi}$ и $\underline{\psi} = \{\langle \check{\chi}, \tilde{\chi}\rangle \mid \chi \in G^+\}_-$ и, наконец, $\psi^\wedge = (\underline{\psi})^\wedge$, где $\underline{\psi}$ понимается как график. Ясно, что $[\![\underline{\psi}\colon (G^+)^\vee \to (\tilde{G})^+$ мономорфизм$]\!] = 1$. Проверим, что $[\![\underline{\psi}$ непрерывен$]\!] = 1$: произвольный элемент базы топологии в единице в G задается компактом c' в $\check{G}$ и $\varepsilon \in (\mathbb{Q}_{>0})^\vee$. Существует компакт c в G, для которого $\check{c} \supseteq c$. Поэтому достаточно рассмотреть окрестность единицы в $(\tilde{G})^+$, определенную компактом $\check{c}$ и $\check{\varepsilon} > 0$. В G^+ выберем окрестность единицы вида $\mathcal{O} = \mathcal{O}(c, \varepsilon)$. Тогда $[\![\check{\mathcal{O}}$ — окрестность в $(G^+)^\vee$, $\underline{\psi}(\mathcal{O}) \subseteq \mathcal{O}(\check{c}, \check{\varepsilon})]\!] = 1$. Легко проверить, что $(\underline{\psi})^{-1}$ также непрерывно.

Продолжим $\underline{\psi}$ по непрерывности на $(G^+)^{\sim}$, получим мономорфизм, гомеоморфный с образом, $\underline{\psi}\colon (G^+)^{\sim} \to (\tilde{G})^+$.

Обозначим Γ образ $\underline{\psi}((G^+)^{\sim})$ в $(\tilde{G})^+$. Это Γ — локально-компактная подгруппа в $(\tilde{G})^+$. Определим изоморфизм i между $\tilde{G}$ и Γ^+ как $g \to \chi_g \to \chi_g \upharpoonright \Gamma$, где χ_g — характер на $(\tilde{G})^+$, соответствующий вычислению в точке g. Такое i — эпиморфизм, так как любой характер на Γ продолжается на $(\tilde{G})^+$ (при этом используется двойственность Понтрягина).

Чтобы такое i было мономорфизмом, достаточно проверить тривиальность ядра $\{g \in \tilde{G} \mid \forall \chi \in \Gamma\ (\chi(g) = \check{e})\} = \{g \in \tilde{G} \mid \forall \chi \in (G^+)^\vee\ (\underline{\psi}(\chi)(g) =$

$= \check{e})\}$, т. е. проверить $(\bigwedge \{[\![\tilde{\chi}(g) = \check{1}]\!] \mid \chi \in G^+\} = 1) \Rightarrow ([\![g = \check{e}]\!] = 1)$, $\forall \chi \in G^+ \ ([\![\tilde{\chi}(g) = \check{e}]\!] = 1) \Rightarrow [\![g = \check{e}]\!]$. Выполняется следующее соотношение $\check{1}(w) = g(\chi^{-1}(w))$, где w — произвольное борелевское множество на окружности S, а $\check{1}(\cdot)$ и $g(\cdot)$ — меры на S, соответствующие $\check{1}$ из $\tilde{S}$ и g из $\tilde{G}$ по формуле $g(w) \Leftrightarrow [f_g^{-1}(w)]$, где $[\cdot]$ — факторизация по тощим множествам. Рассмотрим в G слабейшую топологию, в которой все χ из G^+ непрерывны. Она отделима и мажорируется исходной топологией в G. Поэтому в любом компактном подпространстве пространства G они совпадают, а кроме того, на элементах новой топологии меры $\check{e}(\cdot)$ и $g(\cdot)$ на G совпадают. А потому они совпадают на замкнутых множествах в новой (слабой) топологии. Если O — открытое, относительно компактное в G множество, то существует открытое в слабой топологии множество u, для которого $O = \bar{O} \cap u$ и $\bar{u}$ замкнуто в слабой топологии. Поэтому $g(O) = g(\bar{O}) \wedge g(u) = \check{e}(\bar{O}) \wedge \check{e}(u) = \check{e}(O)$. Отсюда меры $g(\cdot)$ и $\check{e}(\cdot)$ совпадают, т. е. $[\![g = \check{e}]\!] = 1$.

Итак, i — алгебраический изоморфизм $\tilde{G}$ и Γ^+. Легко проверить, что i и гомеоморфизм. По двойственности Понтрягина имеется изоморфизм i_1: $\Gamma \leftrightarrow (\tilde{G})^+$. Положим $\varphi = i_1 \circ \underline{\psi}$: $(G^+)^\sim \to \Gamma \to (\tilde{G})^+$ и, как всегда, $\varphi^\wedge = \varphi^\wedge$, где φ в правой части понимается как график. Отсюда получим следующую теорему.

Т е о р е м а 25в). *Если G — коммутативная локально-компактная группа, то $\varphi^\wedge$ — изоморфизм $C_1(X, G^+)$ и $((\tilde{G})^+)^\wedge$. (В обычном смысле свойства $(\tilde{G})^+$ в V^B переносятся на $C_1(X, G^+)$.)*

Автор глубоко благодарен Е. А. Палютину, на семинаре которого рассказывалась бóльшая часть результатов этой работы, и К. И. Бейдару, который не раз консультировал автора по вопросам теории колец. Автор горячо благодарит Л. А. Бокутя, С. Д. Денисова, В. Г. Кановея, В. Я. Лина, Г. Е. Минца, Ю. И. Манина, Д. П. Скворцова, В. А. Успенского за помощь и поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] F o u r m a n M. P., S c o t t D. S. Sheaves and logic.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer.— 1979.— P. 302—401.— (Lecture Notes in Mathematics; V. 753).

[2] Й е х Т. Теория множеств и метод форсинга.— М.: Мир, 1973.

[3] Л ю б е ц к и й В. А. Некоторые применения теории топосов к изучению алгебраических систем // Д ж о н с о н П. Т. Теория топосов. — М.: Наука, 1986.— С. 376—433.

[4] Л ю б е ц к и й В. А. Интуиционистская теория числовых полей // Математические методы решения инженерных задач.— М.: МО, 1989.

[5] Н о в и к о в П. С. // О некоторых теоремах существования (1939) Избранные труды.— М.: Наука, 1979.— С. 127.

[6] Л ю б е ц к и й В. А. Интерпретация морфизмов алгебр Гейтинга в гейтингово-значном универсуме: Докл. на 8-ом конгрессе по логике, август 1987 // Реф. журн. ВИНИТИ.— 1988.— Т. 13, вып. 3.— С. 17.

[7] М а к и н т а е р А. Модельная полнота // Справочная книга по математической логике.— М.: Наука, 1982.— Гл. 4.— С. 141—182.

[8] M a c i n t y r e A. Model-completeness for sheaves of structures // Fund. Math.— 1973.— V. 81.— P. 73—89.

[9] G r a y s o n R. Heyting-valued models for intuitionistic set theory.— Berlin; Heidelberg; New York: Springer, 1979.— P. 402—414.— (Lecture Notes in Mathematics; V. 753).

[10] T a k e u t e G., T i t a n i S. Intuitionistic fuzzy logic and intuitionistic set theory // Journ. Symb. Logic.— 1984.— V. 49, № 3.— P. 851—866.

[11] Г о р д о н Е. И., Л ю б е ц к и й В. А. Булевозначные расширения равномерных структур. I.— М., 1980.— Деп. в ВИНИТИ, № 711—80.

[12] Любецкий В. А. Об одном вопросе Макинтаера // Математические методы решения инженерных задач — М.: МО, 1989.

[13] Любецкий В. А. О некоторых применениях гейтинговозначного анализа // Сборник работ конференции по компьютерной логике. Таллин АН ЭССР.— Ч. I.— 1988.— С. 58—75.

[14] Любецкий В. А. Булевозначные расширения структур // Математические методы решения инженерных задач.— М.: МО, 1979.— Вып. 6.— С. 67—81.

[15] Гордон Е. И., Любецкий В. А. Булевозначные расширения равномерных пространств. II.— М., 1981.— Деп. в ВИНИТИ, № 2640—81.

[16] Nelson E. Internal set theory: a new approach to non-standard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.— 1977.— V. 83.— P. 6.

[17] Расева Е., Сикорский Р. Математика метаматематики.— М.: Наука, 1972.

[18] Бейдар К. И., Михалев А. В. Ортогональная полнота и алгебраические системы // УМН.— 1985.— Т. 40, вып. 6.

[19] Гордон Е. И. Рационально полные полупервичные коммутативные кольца как поля в булевозначных моделях теории множеств.— М.: 1983. — Деп. в ВИНИТИ, № 3286—83.

[20] Takeuti G. C^*-algebras and Boolean valued analysis // Japan. J. Math.— 1983.— V. 9.— P. 207—245.

[21] Ozawa M. Boolean valued analysis approach to the trace problem of AW-algebras // J. London Math. Soc. 1986.— V. 33.— P. 347—354.

[22] Jech T. J. Abstract theory of abelian operator algebras: an application of forcing // Trans. Amer. Math. Soc.— 1985.— V. 289, № 1.

[23] Rose B. I. On the model theory of finite-dimensional algebras // Proc. London Math. Soc.—1980.— V. 40.— P. 21—39.

[24] Джекобсон Н. Строение колец.— М.: ИНОГИЗ, 1961.

[25] Пирс Р. Ассоциативные алгебры.— М.: Мир, 1986.

[26] Leron U., Vapne A. Polynomial identities of related rings // Israel J. Math.— 1970.— V. 8, № 2.— P. 127—137.

[27] Burgess W. D., Stephenson W. An analogue of the pierce sheat for noncommutative rings // Communications in algebra.—1978.— V. 6 (9).— P. 863—886.

[28] Кон П. Свободные кольца и их связи.— М.: Мир, 1975.

[29] Бокуть Л. А. Ассоциативные кольца.— Новосибирск: Изд-во Новосибирск. гос. ун-та.—1977.— Ч. 1.—1981.— Ч. 2.

[30] Любецкий В. А. Оценки и пучки / Ин-т проблем передачи информации АН СССР.— Препр.— М., 1988.—64 с.

[31] Звонкин А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН.—1984.— Т. 39, вып. 2 (236).— С. 77—127.

[32] Кановей В. Г. О корректности эйлерова метода разложения синуса в бесконечное произведение // УМН.—1988.— Т. 43, вып. 4 (262).— С. 57—81.

[33] Кановей В. Г. Нестандартное построение степенного ряда // Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ?— М.: Наука, 1987.— С. 121—127.

[34] Бейдар К. И., Михалев А. В. Полупервичные кольца с ограниченными индексами нильпотентных элементов // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.— 1988.— Вып. 13.— С. 237—249.

[35] Бейдар К. И., Михалев А. В. Строение невырожденных альтернативных алгебр // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.—1987.— Вып. 12.— С. 59—74.

[36] Кутателадзе С. С. Спуски и подъемы // ДАН СССР.—1983.— Т. 272, № 3 — С. 521—524.

[37] Кусраев А. Г. О некоторых категориях и функторах булевозначного анализа // ДАН СССР.—1983.— Т. 271, № 1.— С. 281—284.

[38] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Субдифференциалы в булевозначных моделях теории множеств // Сиб. мат. журн.—1983.— Т. 24, № 5.— С. 109—132.

[39] Гордон Е. И. Нестандартные конечномерные аналоги операторов в $L_2(\mathbb{R}^n)$ // Сиб. мат. журн.—1988.— Т. 29, № 2.— С. 45—59.

[40] Гордон Е. И. Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Е. Нельсона // Сиб. мат. журн.—1989.— Т. 30, № 1.
[41] Любецкий В. А., Гордон Е. И. Булевы расширения равномерных структур // Исследования по неклассическим логикам и формальным системам.— М.: Наука, 1983.— С. 81—153.
[42] Takeuti G., Titani S. Global Intuitionistic Analysis // Annals of Pure and Applied Logic.—1986.— V. 31.— P. 307—339.
[43] Takeuti G., Titani S. Globalization of intuitionistic set theory // Annals of Pure and Applied Logic.—1986.— V. 33.— P. 195—211.
[44] Любецкий В. А., Гордон Е. И. Вложение пучков в гейтинговозначный универсум.— М., 1982. — Деп. в ВИНИТИ, № 782—82.
[45] Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ?— М.: Наука, 1987.

Институт проблем передачи
информации АН СССР

Поступила в редакцию
12 декабря 1988 г.