1991 г. ноябрь — декабрь т. 46, вып. 6 (282)
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 510.6

НЕРАЗРЕШИМЫЕ ГИПОТЕЗЫ В ТЕОРИИ ВНУТРЕННИХ МНОЖЕСТВ ЭДВАРДА НЕЛЬСОНА

В.Г. Кановей

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие

Современная теория нестандартных, или инфинитезимальных, методов в математике восходит к исследованиям А. Робинсона (начало 60-х годов), убедительно продемонстрировавшего, что бесконечно малые и бесконечно большие величины как постоянные количества могут быть рассматриваемы на уровне полной математической строгости. Первоначальный подход в этой новой версии классического инфинитезимального исчисления был модельный или «конструктивный» (см. Робинсон [17, 34]). Большой трактат Линдстрема [28], книги [4, 12, 18, 30] и начальные главы из [1] представляют этот подход во всех деталях.

Универсальная конструкция — метод ультрапроизведений (о котором см. в [10]) — позволила получить нестандартные расширения многих математических структур, содержащие инфинитезимальные элементы соответствующей природы. Значительное сходство, если не идентичность «технологии» этих приложений дали основание ставить вопрос о поиске общих принципов, лежащих в основе нестандартного подхода,— другими словами, о его аксиоматизации.

Несколько вариантов такой аксиоматизации было предложено в 70-е годы. Это, в частности, системы Хрбачека [23, 24], Каваи [26, 27], Хенсона и Кейслера [22], «альтернативная теория множеств» чехословацких математиков [2]. Но наиболее удачной оказалась аксиоматика Нельсона — теория внутренних множеств **IST** [31, 32]. Присоединив к теории Цермело — Френкеля **ZFC** три достаточно простых в использовании и доступных для интуитивного восприятия дополнительных постулата, регулирующих взаимоотношения стандартных множеств с нестандартными, Нельсон получил весьма удобную аксиоматизацию, которая была сразу принята на вооружение многими специалистами в этой области.

В настоящее время теория **IST** стала признанной аксиоматической базой нестандартной математики. С нею связаны такие исследования, как статьи Ф. Дьенер и К. Строяна [20], Ф. и М. Дьенеров [21], Звонкина и Шубина [5], книги Роберта [33] и ван ден Берга [19] и ряд других работ, включая заметки автора настоящей статьи [8, 9]. Система **IST** рассматривается среди других вопросов нестандартного анализа в книгах Лутца и Гозе [30], Кусраева и Кутателадзе [12].

Непосредственным предметом рассмотрения в этих публикациях в связи с **IST** были прикладные аспекты, т. е. возможности **IST** служить в роли аксиоматического базиса нестандартной математики. В существенно меньшей степени затрагивались собственно логические проблемы. Между тем вопросы о границах доказуемого и о неразрешимости весьма важны для аксиоматических теорий (по крайней мере, теорий теоретико-множественного типа, где они традиционно признаются важнейшими; см., например, книгу [6]). Разумеется, **IST**, будучи консервативным расширением теории **ZFC**, наследует из **ZFC** неразрешимость континуум-гипотезы, гипотезы Суслина и массу других «неразрешимостей». Поэтому действительный интерес может вызвать поиск неразрешимых предложений принципиально иного рода — т. е. таких, неразрешимость которых обусловлена спецификой **IST**, и которые сами в известной мере раскрывают эту специфику.

Целью настоящей работы является доказательство неразрешимости в **IST** нескольких таких предложений, или гипотез, общий смысл которых заключается в распространении на внешние (т. е. включающие предикат стандартности) формулы тех аксиом и теорем **ZFC**, которые справедливы для внутренних (не включающих этого предиката) формул. В частности, мы доказываем, что принцип продолжения (extension principle), нередко используемый для обоснования нестандартных рассуждений, на самом деле не является теоремой в **IST**, если не сделать никаких разумных ограничений.

Для автора приятно указать на весьма ценные замечания, сделанные по поводу разных аспектов этого исследования В. А. Успенским, А. К. Звонкиным, В. А. Любецким, Ан. А. Мучником, Е. И. Гордоном, В. А. Молчановым, В. В. Крупским, В. Е. Шестопалом и другими, в особенности участниками семинаров по нестандартному анализу в Нижнем Новгороде и Саратове, состоявшихся в 1988—1991 гг. (см. публикации работ в [15, 16]) и членами московского семинара по нестандартному анализу, чья идейная, моральная и чисто научная поддержка позволила начать и завершить настоящую работу, и на поддержку Института новых технологий (Москва).

§ 1. Введение

1.1. Теория внутренних множеств. Язык теории **IST** содержит два предикатных символа: *принадлежность* $\in$ и предикат *стандартности* st (а также, естественно, равенство $=$). Формулы этого языка, или, кратко, st-$\in$-*формулы*, подразделяются на два типа: *внутренние* — значит, не содержащие предиката st (т. е. просто $\in$-формулы), и *внешние* — имеющие хотя бы одно вхождение st.

Часто используются следующие сокращения:

$\exists^{st} z \varphi(z)$ означает $\exists z\, [\mathrm{st}\, z\ \&\ \varphi(z)]$;
$\forall^{st} z \varphi(z)$ означает $\forall z\, [\mathrm{st}\, z \to \varphi(z)]$.

Понятно, что $\mathrm{st}\, x$ равносильно $\exists^{\mathrm{st}} z\ (z = x)$, следовательно, вообще можно ограничиться вхождениями предиката стандартности только через кванторы $\exists^{\mathrm{st}}$, $\forall^{\mathrm{st}}$. Кстати, эти кванторы принято называть *внешними*, в отличие от обычных (т. е. без надписи st) кванторов $\exists$, $\forall$, называемых *внутренними*. Подчеркнем, что определения «внешний», «внутренний» в данном контексте никак не связаны с положением квантора в записи формулы.

Сама теория внутренних множеств IST содержит все аксиомы **ZFC** (система Цермело — Френкеля с аксиомой выбора; см. [6]) вместе с тремя дополнительными постулатами: это принципы *идеализации* **I**, *стандартизации* **S** и *переноса* **T**, формулируемые следующим образом:

$$\mathbf{I}\colon\ \forall^{\mathrm{stfin}} A\ \exists x\ \forall a \in A\ \ \Phi(x,\ a) \leftrightarrow \exists x\ \forall^{\mathrm{st}} a\ \ \Phi(x,\ a)$$

для любой внутренней формулы Φ;

$$\mathbf{S}\colon\ \exists^{\mathrm{st}} Y\ \ \forall^{\mathrm{st}} x\,[x \in Y \leftrightarrow x \in X\ \&\ \Phi(x)]$$

для любой st-$\in$-формулы Φ и любого стандартного X;

$$\mathbf{T}\colon\ \ \exists x \Phi(x) \leftrightarrow \exists^{\mathrm{st}} x \Phi(x)$$

для любой внутренней Φ со стандартными параметрами.

Разумеется, каждый из этих принципов представляет собой не одну аксиому, а *схему* аксиом, каждое конкретное применение которой связано с определенным выбором *ядерной формулы* Φ.

Запись $\forall^{\mathrm{stfin}} A$ является сокращением для «для любого стандартного конечного A».

Несколько туманная фраза «со стандартными параметрами» в **T** означает, что свободные переменные формулы Φ, кроме явно указанной x, могут замещаться при интерпретации только *стандартными* множествами, когда **T** действует внутри некоторого универсума (см. ниже). Чисто синтаксически подразумевается запись $\forall^{\mathrm{st}} v_1 \ldots \forall^{\mathrm{st}} v_n$ перед эквивалентностью **T** (с взятием последней в скобки), где $v_1, \ldots, v_n$ — список всех свободных переменных Φ кроме x.

Естественно, ядерные формулы Φ в записях **I** и **S** также могут содержать свободные переменные сверх указанных явно x и a, однако здесь никаких ограничений на природу замещающих множеств нет. Кратко, Φ является формулой с *произвольными* параметрами в **I** и **S**. Вообще, *параметр* — это множество, замещающее свободную переменную.

Как видно, особенностью IST является то, что она ограничивается двумя типами множеств: *стандартные* и *внутренние*. Напротив, в системах Каваи, Хрбачека, Кейслера и Хенсона допускается третий тип — *внешние* множества. Можно сказать, что IST есть «внутренняя» аксиоматизация нестандартных математических структур, в то время как другие упомянутые теории представляют аксиоматику некоторого «внешнего» мира с нестандартной моделью в нем. Этот второй подход несколько усложняет логическую структуру теории, а также отчасти препятствует в достаточной мере естественным приложениям к конкретным математическим задачам. Возможно, именно поэтому «внешние» аксиоматизации гораздо менее, чем IST, популярны среди специалистов по нестандартным методам.

1.2. Универсум теории внутренних множеств. Теоретико-множественный универсум (т. е. система множеств, управляемых аксиомами рассматриваемой теории) часто обозначается одним из вариантов буквы V. Мы обозначим через $\mathbf{V}$ универсум множеств, где действуют аксиомы IST. Исторически множества из $\mathbf{V}$ называются *внутренними*. Итак,

$$\mathbf{V} = \text{все множества} = \text{все внутренние множества}.$$

При помощи предиката стандартности выделяется стандартная часть $\mathbf{V}$ — универсум стандартных множеств

$$\mathbb{S} = \{x \in \mathbf{V}\colon \operatorname{st} x\} = \{x \in \mathbf{V}\colon x \text{ стандартно}\}.$$

Нетрудно доказать (в **IST**), что $\mathbb{S}$ не является элементом $\mathbf{V}$, хотя, разумеется, $\mathbb{S} \subseteq \mathbf{V}$. Совокупности такого типа называются *внешними*; они рассматриваются в **IST** примерно на тех же основаниях, что и собственные классы в обычной теории множеств.

Все «индивидуальные» множества классической математики стандартны благодаря переносу. В частности, $\mathbb{N}$ (натуральные числа), $\mathbb{R}$ (вещественные числа) — стандартные элементы $\mathbf{V}$. Читатель, знакомый с исследованиями нестандартных суперструктур (в рамках упомянутого выше модельного подхода к нестандартному анализу), должен иметь в виду, что в **IST** множества типа $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и вообще все бесконечные стандартные множества содержат как стандартные, так и нестандартные элементы. Поэтому, скажем, $\mathbb{N}$ соответствует тому, что в нестандартных суперструктурах обозначается через $^*\mathbb{N}$, тогда как совокупность

$$^\sigma\mathbb{N} = \{n \in \mathbb{N}\colon \operatorname{st} n\} = \{\text{стандартные натуральные числа}\}$$

соответствует $\mathbb{N}$ в нестандартной суперструктуре. Все совокупности вида $^\sigma X$, где X — бесконечное стандартное множество, являются внешними в **IST**.

Конечность понимается в **IST** в обычном смысле, т. е. число элементов множества, о котором мы говорим, что оно *конечно*, должно быть равно некоторому натуральному n, не обязательно стандартному. В исследованиях суперструктур это свойство называется *гиперконечностью*.

1.3. Общий подход к проблемам. Подчеркнем, что все аксиомы **ZFC** входят в **IST**, а все теоремы **ZFC** являются теоремами и в **IST**, поскольку вторая теория расширяет первую. Здесь, однако, имеется один тонкий момент. Дело в том, что теория **ZFC** содержит две аксиомы (точнее, схемы аксиомы), а именно *выделение*

$$\mathbf{Sep}\colon\ \exists Y\ \forall x \in X\ [x \in Y \leftrightarrow x \in X \mathbin{\&} \Phi(x)],$$

и *подстановку*

$$\mathbf{Repl}\colon\ \forall x \in X\ \exists!\, y \Phi(x, y) \to \exists \tilde{y}\ \forall x \in X\ \Phi(x, \tilde{y}(x)),$$

где Φ — произвольная $\in$-формула, а X — любое множество. (Для дальнейшего условимся, что переменная со знаком $\tilde{}$ над ней всегда обозначает функцию, а записью терма, скажем, $\tilde{y}(x)$ подразумевается, что $\tilde{y}$ определена на x. Таким образом, в правой части **Repl** $\tilde{y}$ является функцией, определенной, по меньшей мере, на X.)

Подчеркнем, что **Sep** и **Repl** включаются в **IST** только в варианте, когда ядерная формула Φ — *внутренняя*, т. е. $\in$-формула.

Каков, однако, статус *внешних* вариантов этих аксиом в **IST**?

Анализу этого вопроса и посвящена настоящая работа. Точные формулировки главных результатов будут даны ниже в этом параграфе, после предварительных рассмотрений, необходимых для того, чтобы выделить варианты, действительно представляющие интерес, и избавиться от тривиальностей. С этой целью мы рассмотрим, помимо **Sep** и **Repl**, схемы аксиом (или, как они будут называться, ниже, *гипотезы*, ибо их статус в **IST** сразу неясен) *выбора* и *собирания*, а также теорему единственности.

1.4. Выделение. Итак, мы желаем определить «разумные» формы **Sep** для случая, когда Φ может быть внешней формулой. Прежде всего, следует отсечь те варианты, которые легко выводятся или опровергаются в **IST**. Заметим для этого, что вариант **Sep** с множеством

(1) $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ конечно (= стандартно)

и с произвольной ядерной st-$\in$-формулой Φ без труда выводится в **IST** при помощи теоремы внешней индукции 2.6.

С другой стороны, принцип **Sep** с множеством

(2) $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$ бесконечно велико (= нестандартно)

опровергается на формуле st x, взятой в качестве Φ, поскольку совокупность ${}^{\circ}\mathbb{N}$ всех стандартных натуральных чисел не является (внутренним) множеством в **IST**.

Существенная разница между двумя этими случаями заключается в разном наборе элементов множеств (1) и (2). Любое множество первого вида содержит только стандартные элементы, но не все стандартные натуральные числа ($n + 1 \notin X$), в то время как любое множество второго вида включает все стандартные натуральные числа вместе с некоторой частью нестандартных (т. е. меньшие либо равные n). Таким образом, действительный интерес может представлять «промежуточная» возможность — рассмотреть в качестве X совокупность всех *стандартных* натуральных n. Мы приходим к следующей формулировке желаемого свойства множества Y:

$$\forall^{\mathrm{st}} x\, [x \in Y \leftrightarrow x \in \mathbb{N} \,\&\, \Phi(x)].$$

Здесь будет вполне естественно рассмотреть вместо $\mathbb{N}$ любое стандартное множество X либо весь универсум **V**. В результате получаются следующие три формулировки выделения:

$$\begin{array}{llll}
\mathbf{Sep}_1: & (\mathrm{st}\, X) & \exists^{\mathrm{st}} Y & \forall^{\mathrm{st}} x\, [x \in Y \leftrightarrow x \in X \,\&\, \Phi(x)]; \\
\mathbf{Sep}_2: & (\mathrm{st}\, X) & \exists Y & \forall^{\mathrm{st}} x\, [x \in Y \leftrightarrow x \in X \,\&\, \Phi(x)]; \\
\mathbf{Sep}_3: & & \exists X & \forall^{\mathrm{st}} x\, [x \in Y \leftrightarrow \Phi(x)].
\end{array}$$

Мы пишем st X в скобках вместо квантора $\forall^{\mathrm{st}} X$.

Понятно, что $\mathbf{Sep}_1$ есть не что иное, как принцип стандартизации S, т. е. $\mathbf{Sep}_1$ и $\mathbf{Sep}_2$ — теоремы **IST** и их нет нужды отдельно рассматривать. В формулировке $\mathbf{Sep}_3$ невозможно требовать стандартность Y (возьмем $x = x$ в качестве Φ). Также невозможно распространить $\mathbf{Sep}_1$ на нестандартные множества X. Наконец, легко видеть, что $\mathbf{Sep}_2$ для нестандартных X равносильно $\mathbf{Sep}_3$. Итак, $\mathbf{Sep}_3$ — единственная нетривиальная форма выделения для внешних ядерных формул.

1.5. Подстановка. Та же идея, т. е. ограничение стандартными значениями переменных, приводит к следующим трем вариантам подстановки, которые все, в отличие от набора соответствующих форм выделения, не тривиализируются в **IST**:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{Repl}_1: & (\mathrm{st}\, X) & \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists!^{\mathrm{st}} y\, \Phi(x, y) \to \exists^{\mathrm{st}} \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X \Phi(x, \tilde{y}(x)); \\
\mathbf{Repl}_2: & (\mathrm{st}\, X) & \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists!^{\mathrm{st}} y\, \Phi(x, y) \to \\
& & \qquad \to \exists \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\, [\Phi(x, \tilde{y}(x)) \,\&\, \mathrm{st}\, \tilde{y}(x)]; \\
\mathbf{Repl}_3: & & \forall^{\mathrm{st}} x\ \exists!^{\mathrm{st}} y\, \Phi(x, y) \to \exists \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x\, [\Phi(x, \tilde{y}(x)) \,\&\, \mathrm{st}\, \tilde{y}(x)].
\end{array}$$

Обобщение на случай, когда переменной y разрешено принимать нестандартные значения, дает еще две формы:

$$\begin{array}{lll}
\mathbf{Repl}_4: & (\mathrm{st}\, X) & \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists! y\, \Phi(x, y) \to \exists \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \Phi(x, \tilde{y}(x)); \\
\mathbf{Repl}_5: & & \forall^{\mathrm{st}} x\ \exists! y\, \Phi(x, y) \to \exists \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x\, \Phi(x, \tilde{y}(x)).
\end{array}$$

Здесь Φ — произвольная st-$\in$-формула, внешняя либо внутренняя, X — произвольное стандартное множество, $\exists!^{\mathrm{st}} y$ означает:

«существует единственное стандартное y, такое, что ... (и возможно существование многих нестандартных y такого же вида)». В соответствии со сказанным выше, в правых частях всех пяти импликаций предполагается, что $\tilde{y}$ — функция, определенная по крайней мере на всех *стандартных* x в $\mathbf{Repl}_{3,5}$ и на всех *стандартных* $x \in X$ в $\mathbf{Repl}_{1,2,4}$. Но требование, чтобы $\tilde{y}$ была определена на *всех* $x \in X$, на самом деле не усилило бы $\mathbf{Repl}_{1,2,4}$. Наконец, заметим, что дополнительный член $\mathrm{st}\ \tilde{y}\ (x)$ не введен в $\mathbf{Repl}_1$ (где он был бы необходим по смыслу и по аналогии с $\mathbf{Repl}_{2,3}$) из-за того, что $\tilde{y}\ (x)$ стандартно вместе с x и $\tilde{y}$.

Простые рассуждения позволяют получить следующую схему взаимоотношений гипотез $\mathbf{Repl}_i$; $\to$ означает выводимость в **IST**:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{Repl}_1 \arrow[dr] & \\
\mathbf{Repl}_5 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbf{Repl}_4 \arrow[r] & \mathbf{Repl}_2 \\
& \mathbf{Repl}_3 \arrow[r, leftrightarrow] & \mathrm{Sep}_3
\end{tikzcd}$$

Гипотезы $\mathbf{Repl}_3$ и $\mathbf{Sep}_3$ эквивалентны в **IST** (несложное упражнение), что также отражено на схеме.

1.6. Выбор. В рамках **ZFC** схема выбора

$$\mathbf{Chc}\colon\ \forall x \in X\ \exists y\ \ \Phi\ (x,\ y) \to \exists \tilde{y}\ \ \forall x \in X\ \Phi\ (x,\ \tilde{y}\ (x))$$

сводится к аксиоме выбора **AC** через подстановку и выделение, однако для **IST** такая редукция для внешних Φ невозможна. Следовательно, имеет смысл рассмотреть аналоги всех пяти вариантов подстановки, полученные удалением требования единственности y в левой части:

$\mathbf{Chc}_1$: $(\mathrm{st}\ X)\ \ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \ \exists^{\mathrm{st}} y\ \Phi\ (x,\ y) \to \exists^{\mathrm{st}} \tilde{y}\ \ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \Phi\ (x,\ \tilde{y}\ (x))$;

$\mathbf{Chc}_2$: $(\mathrm{st}\ X)\ \ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \ \exists^{\mathrm{st}} y\ \Phi\ (x,\ y) \to$

$\to \exists \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ [\Phi\ (x,\ \tilde{y}\ (x))\ \&\ \mathrm{st}\ \tilde{y}\ (x)]$;

$\mathbf{Chc}_3$: $\forall^{\mathrm{st}} x\ \exists^{\mathrm{st}} y\ \Phi\ (x,\ y) \to \exists \tilde{y}\ \ \forall^{\mathrm{st}} x\ [\Phi\ (x,\ \tilde{y}\ (x))\ \&\ \mathrm{st}\ \tilde{y}\ (x)]$;

$\mathbf{Chc}_4$: $(\mathrm{st}\ X)\ \ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \ \exists y\ \Phi\ (x,\ y) \to \exists \tilde{y}\ \ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \Phi\ (x,\ \tilde{y}\ (x))$;

$\mathbf{Chc}_5$: $\forall^{\mathrm{st}} x\ \exists y\ \Phi\ (x,\ y) \to \exists \tilde{y}\ \ \forall^{\mathrm{st}} x\ \Phi\ (x,\ \tilde{y}\ (x))$.

Понятно, что $\mathbf{Chc}_i \to \mathbf{Repl}_i$ для $i = 1, 2, 3, 4, 5$ в **IST**, причем для $i = 1$ здесь имеет место эквивалентность (см. теорему 2.7 ниже). Между собой гипотезы выбора связаны той же схемой, которая приведена выше для вариантов подстановки, т. е.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{Chc}_1 \arrow[dr] & \\
\mathbf{Chc}_5 \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbf{Chc}_4 \arrow[r] & \mathbf{Chc}_2 \\
& \mathbf{Chc}_3 &
\end{tikzcd}$$

1.7. Подстановка и выбор в ограниченной области. Будет весьма естественно, если мы, ограничивая в формулировках $\mathbf{Chc}_i$ и $\mathbf{Repl}_i$, $i = 1, 2, 4$, область изменения x некоторым стандартным множеством X, введем аналогичное ограничение и для переменной y. Символические обозначения полученных вариантов будут отличаться от первоначальных буквой **B** (т. е. bounded). Например,

$$\mathbf{BChc}_1\colon\ (\mathrm{st}\, X,\ Y)\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists^{\mathrm{st}} y \in Y\ \Phi(x,\ y) \to$$
$$\to \exists^{\mathrm{st}} \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ [\Phi(x,\ \tilde{y}(x))\ \&\ \tilde{y}(x) \in Y],$$

причем правую часть импликации можно без изменения содержания записать в виде $\exists^{\mathrm{st}} \tilde{y}\colon X \to Y\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \Phi(x,\ \tilde{y}(x))$. Нельсон [32] доказал $\mathbf{BChc}_1$ в **IST** (см. теорему 2.3 ниже), и поэтому нет нужды рассматривать $\mathbf{BChc}_i$ и $\mathbf{BRepl}_i$, $i = 1,\ 2$, в плане интересующих нас вопросов. Остается значение индекса $i = 4$, т. е.

$$\mathbf{BChc}_4\colon\ (\mathrm{st}\, X,\ Y)\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists y \in Y\ \Phi(x,\ y) \to$$
$$\to \exists \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ [\Phi(x,\ \tilde{y}(x))\ \&\ \tilde{y}(x) \in Y];$$

и $\mathbf{BRepl}_4$ с выражением $\exists! y \in Y$ вместо $\exists y \in Y$ в левой части. Понятно, что $\mathbf{BChc}_i$ и $\mathbf{BRepl}_i$ суть следствия $\mathbf{Chc}_i$ и $\mathbf{Repl}_i$ соответственно при любом значении индекса $i = 1,\ 2,\ 4$.

Отметим, что гипотеза $\mathbf{BChc}_4$ иногда встречается под названием *принцип продолжения* (extension principle), см. [20, 30]; утверждение, родственное $\mathbf{BChc}_4$, названо в [32] *теоремой насыщенности* (т. е. saturation). Наконец, отметим, что $\mathbf{BRepl}_1$ может быть использована в роли формулировки принципа стандартизации, см. [32].

1.8. Гипотеза собирания. Этот принцип, формулируемый нами в виде

$$\mathbf{Coll}\colon\ \forall X\ \exists Y\ \forall x \in X\ [\exists y\ \Phi(x,\ y) \to \exists y \in Y\ \Phi(x,\ y)]$$

(имеются другие эквивалентные формулировки, см. [10 14]; мы взяли наиболее удобную в использовании), легко выводится в **ZFC** для $\in$-формул Φ при помощи подстановки и выделения. Собирание редко рассматривается в **ZFC** как самостоятельный постулат, однако играет заметную роль в других системах, в частности в теории допустимых множеств [14] и в теории классов Келли — Морса [11, 25].

Собственно, для **ZFC** собирание просто равносильно подстановке (в присутствии выделения), однако, как будет показано ниже, в **IST** (с разрешением внешних формул) равносильность теряется.

Теперь мы желаем «стандартизировать» некоторую часть (или все) из переменных X, Y, x, y в формулировке **Coll** подобно тому, как это было сделано выше для **Sep** и **Repl**. Однако ожидаемого богатства вариантов здесь не получается. Действительно, **Coll** — теорема **IST** для всех st-$\in$-формул (теорема 4 ниже в этом параграфе). Следовательно, более слабые варианты нет нужды рассматривать. В эту категорию попадает, в частности, любой вариант **Coll** с $\exists Y$ и, по крайней мере, с одним из остальных трех кванторов в виде $\forall^{\mathrm{st}} X$, $\forall^{\mathrm{st}} x$, $\exists^{\mathrm{st}} y$.

Далее, вариант $\forall X\ \exists^{\mathrm{st}} Y$ не имеет смысла (опровергается на формуле $x = y$, ибо в **IST** доказуемо существование множества, не накрываемого никаким стандартным). Так что остается $\forall^{\mathrm{st}} X\ \exists^{\mathrm{st}} Y$.

В рамках этого последнего варианта субварианты с $\exists y$ становятся ложными в **IST** на формуле $\forall^{\mathrm{st}} z\ (y \notin z)$ в качестве $\Phi(x,\ y)$. Субвариант $\forall^{\mathrm{st}} x\ \exists^{\mathrm{st}} y$, т. е.

$$\mathbf{Coll}_1\colon\ \forall^{\mathrm{st}} X\ \exists^{\mathrm{st}} Y\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ [\exists^{\mathrm{st}} y\ \Phi(x,\ y) \to \exists^{\mathrm{st}} y \in Y\ \Phi(x,\ y)]$$

также не представляет самостоятельного интереса, ибо можно доказать (теорема 2.7 ниже), что он равносилен $\mathbf{Repl}_1$ и $\mathbf{Chc}_1$ в **IST**.

Остается субвариант $\forall x\ \exists^{\mathrm{st}} y$ варианта $\forall^{\mathrm{st}} X\ \exists^{\mathrm{st}} Y$, т. е.

$$\mathbf{Coll}_2\colon\ \forall^{\mathrm{st}} X\ \exists^{\mathrm{st}} Y\ \forall x \in X\ [\exists^{\mathrm{st}} y\ \Phi(x,\ y) \to \exists^{\mathrm{st}} y \in Y\ \Phi(x,\ y)].$$

Эту гипотезу также, впрочем, можно опровергнуть. Именно возьмем конечное (нестандартное) множество H, такое, что $\mathbb{S} \subseteq H$ (теорема 2.9 ниже), отображение h: $\mathbb{N}$ на H и формулу

$$x \in \mathbb{N} \mathbin{\&} [(\mathrm{st}\, h(x) \mathbin{\&} y = h(x)) \text{ или } (\neg\, \mathrm{st}\, h(x) \mathbin{\&} y = 0)]$$

в качестве $\Phi(x, y)$. $\mathbf{Coll}_2$ нарушается при $X = \mathbb{N}$.

Видно, однако, что ключевую роль в этом рассуждении играет заведомо нестандартное множество H. Поэтому представляет интерес рассмотреть более узкую, чем $\mathbf{Coll}_2$, гипотезу $\mathbf{Coll}_2$ (st Φ), содержащую ограничение, чтобы все параметры Φ были стандартны.

1.9. Свойство единственности. Это гипотеза несколько другого рода, чем рассмотренные выше. *Свойство единственности* для класса $\mathbb{K}$ формулируется следующим образом: любое множество, определимое посредством формулы (определенного типа) с параметрами из $\mathbb{K}$, принадлежит $\mathbb{K}$. Для **IST** особенно интересен рассмотренный Нельсоном [31] случай, когда $\mathbb{K} = \mathbb{S}$ — класс всех стандартных множеств. Для него гипотеза единственности точно формулируется так:

$$\mathbf{Uniq}\colon\ (\mathrm{st}\,\Phi)\ \exists! x\, \Phi(x) \to \forall x\, [\Phi(x) \to \mathrm{st}\, x].$$

Таким образом, постулируется, что любое множество, определимое при помощи st-$\in$-формулы со стандартными параметрами, само стандартно.

Понятно, что для внутренних формул Φ гипотеза **Uniq** есть очевидное следствие принципа переноса. Именно внешние ядерные формулы Φ составляют истинную трудность. Уместно отметить, что сам перенос **T** не распространяется на внешние формулы.

1.10. Комментарий. Итак, после проведенного предварительного отсеивания, сформирован следующий список гипотез, статус которых в теории внутренних множеств **IST** неясен:

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathbf{Sep}_3,\ \ \mathbf{Repl}_i \text{ и } \mathbf{Chc}_i,\ \ i = 1, 2, 3, 4, 5,\ \ \mathbf{BRepl}_4,\ \ \mathbf{BChc}_4, \\ \mathbf{Coll},\ \ \mathbf{Coll}_1,\ \ \mathbf{Coll}_2(\mathrm{st}\,\Phi),\ \ \mathbf{Uniq}. \end{cases}$$

Таким образом, главный вопрос, который мы собираемся рассматривать, заключается в следующем: каковы взаимоотношения этих гипотез с аксиомами **IST**?

Только три ответа возможны для каждой из гипотез. Именно:

а) Рассматриваемая гипотеза доказуема в **IST** для всех (внутренних и внешних) ядерных формул, т. е., так сказать, *истинна* в рамках **IST**. Из гипотез (3) только **Coll** относится к этому случаю.

б) Рассматриваемая гипотеза опровергается в **IST** для какой-либо ядерной формулы, т. е. она *ложна* в **IST**. На самом деле к этому случаю не относится ни одна из гипотез.

в) Случай *неразрешимости*, т. е. ни а), ни б). Таким образом, во-первых, гипотеза (для всех Φ) совместна с **IST** (или, другими словами, невозможно ее *опровергнуть* ни для какой ядерной формулы), и, во-вторых, отрицание некоторого примера гипотезы (т. е. для определенной конкретной формулы Φ) также совместно с **IST** (другими словами, этот пример — и всю гипотезу — невозможно *доказать*). В целом именно таково окажется положение с гипотезами из списка (3) за исключением **Coll**, о чем уже сказано и, возможно, **Uniq**, где ситуацию до конца прояснить не удалось.

Для третьего (главного) случая имеет смысл провести более тонкое исследование сложности возможной опровергающей формулы. Именно речь идет о том, чтобы выделить разумный класс «простых» формул, для которых данная гипотеза имеет положительное решение в **IST**, и одновременно подобрать немного более сложную ядерную формулу, генерирующую неразрешимый пример. Разумеется, предварительно должна быть построена иерархия формул, в рамках которой можно говорить о сравнении их в смысле простоты и сложности.

Теперь мы переходим к формулировкам основных теорем. Начинаем с двух теорем непротиворечивости (п. 1.11) и теоремы независимости (п. 1.12); одновременно отмечена (п. 1.11) особенность некоторых гипотез, препятствующая доказательству их совместности с **IST** в рамках предположения о непротиворечивости **ZFC**. Затем рассматривается гипотеза собирания и связанные с ней результаты об определимости истинности (п. 1.13), исследуется иерархия внешних формул и влияние положения ядерных формул в этой иерархии на статус гипотез (см. пп. 1.14, 1.15). Наконец, мы вводим теорию ограниченных множеств **BST** — модификацию **IST**, допускающую только такие множества, которые являются элементами стандартных множеств (п. 1.16); в этой теории все гипотезы из списка (3) получают определенное решение, т. е. попадают в число истинных либо ложных — а) или б).

1.11. Непротиворечивость. Через Cons T условимся обозначать обычное предложение, говорящее, что теория T непротиворечива. Пусть **ZFCI** — теория, полученная добавлением к **ZFC** гипотезы существования строго недостижимого кардинала [6].

Теорема 1А [Cons **ZFCI**]. *Соединение всех гипотез из списка* (3) *из* 1.10 *не противоречит аксиомам* **IST**.

Теорема 1Б [Cons **ZFC**]. *Соединение гипотез* $\mathbf{Sep}_3$, $\mathbf{Repl}_i$ *и* $\mathbf{Chc}_i$, $i = 2, 3, 4, 5$ (*но не* 1!), $\mathbf{BRepl}_4$, $\mathbf{BChc}_4$, **Uniq** *не противоречит аксиомам* **IST**.

Теорема 1А доказана методом внутренней модели: мы устанавливаем, что в **IST**, если $\varkappa$ — строго недостижимый кардинал, то уровень $\mathbf{V}_\varkappa$ иерархии множеств по фон Нейману (см. § 2) образует модель для теоремы 1А. Таким же примерно способом, но с дополнительными элементами логического анализа (чтобы не выйти за рамки **ZFC**) доказывается и теорема 1Б.

Возможно ли доказать теорему 1Б, предполагая только непротиворечивость **ZFC**? К сожалению, ответ здесь отрицательный из-за «трансцендентной» над **ZFC** силы исключенных гипотез

$$(4)\qquad \mathbf{Repl}_1,\ \mathbf{Chc}_1,\ \mathbf{Coll}_1,\ \mathbf{Coll}_2\ (\mathrm{st}\ \Phi)$$

(первые три из них эквивалентны в **IST**). Эффект, который мы имеем в виду, раскрывается следующей теоремой.

Теорема 2. *Пусть* **H** — *любая гипотеза из списка* (4). *Тогда* **H** $\to$ $\to$ Cons **ZFC** *в* **IST**.

Таким образом, по второй теореме Гёделя о неполноте, присоединение к **IST** любой из гипотез (4) дает теорию, неравнонепротиворечивую с **ZFC** (сама же **IST** равнонепротиворечива **ZFC**, как установлено в [31]). На самом деле, гипотезы (4) играют роль как бы аксиом бесконечности по отношению к универсуму $\mathbb{S}$ стандартных множеств, а потому теорема 2, в принципе, достаточно естественна.

Возможно, однако, что гипотеза недостижимого кардинала избыточно сильна для теоремы 1А.

Проблема 1. Верна ли теорема 1А, если предполагается только непротиворечивость непредикативной теории классов Келли — Морса **KMC** [11, 25]? Будет ли **IST** + (4) равнонепротиворечива с **KMC**?

Можно показать, что **KMC** интерпретируема в **IST** + $\mathbf{Repl}_1$ + $\mathbf{Sep}_3$. В известной автору интерпретации $\mathbf{Sep}_3$ обеспечивает свертку (формирование классов), а $\mathbf{Repl}_1$ гарантирует подстановку.

Проблема 2. Показать, что гипотезы $\mathbf{Chc}_1$, $\mathbf{Chc}_5$, $\mathbf{Coll}_2$ (st Φ), **Uniq** попарно независимы над **IST**.

Понятно, что четыре перечисленные гипотезы (и только они) являются максимальными по силе в списке (3).

Проблема 3. Показать, что $\mathbf{Chc}_i$ недоказуема в $\mathbf{IST} + \mathbf{Repl}_i$ при $i = 2, 3, 4, 5$ (это не имеет места для $i = 1$, см. теорему 2.7 ниже).

1.12. Независимость. Это слово означает недоказуемость, т. е. непротиворечивость отрицания.

Теорема 3 (Cons **ZFC**). *Все гипотезы из списка* (3), *кроме, возможно,* **Uniq**, *независимы от* **IST**.

Проблема 4. Доказать (или опровергнуть?) независимость **Uniq**.

Отдельно подчеркнем результат теоремы 3 в отношении «принципа продолжения» $\mathbf{BChc}_4$, поскольку это важное техническое средство систематически используется в приложениях нестандартных методов (см., например, [20, 29]). Теорема 3 показывает, что в рамках **IST** такое использование без необходимых оговорок и ограничений на тип ядерной формулы Φ, вообще говоря, некорректно. Впрочем, известные случаи конкретного использования принципа продолжения, по-видимому, касаются лишь случая, когда ядерная формула является ext-ограниченной (см. ниже п. 1.15), а в этом частном случае $\mathbf{BChc}_4$ (как и более сильная $\mathbf{Chc}_4$) уже являются теоремами **IST** (фактически это установлено Нельсоном в [32]).

Конструкция модели **IST** для доказательства теоремы 3 производится в **ZFC** (точнее, в некотором консервативном расширении **ZFC**, не относящемся к типу нестандартных) и в целом следует методу адекватных ультрапределов Нельсона [31], однако имеет существенное отличие: ультрастепень приходится составлять не из всех, а только из определимых функций, отображающих индексное множество в исходную модель. Последняя также выбирается особым образом.

Теорема 3, как и теоремы 1А и 1Б, допускает доказательство через построение внутренней модели в **IST**, однако нам не удалось найти доказательство такого вида, которое было бы существенно более простым, чем прямое построение модели в **ZFC**.

1.13. Собирание и определимость истинности. Принципиальное отличие гипотезы собирания **Coll** от вариантов выделения, подстановки и выбора заключается в ее доказуемости.

Теорема 4 [**IST**]. Coll *выполнена для всех внутренних и внешних ядерных формул.*

Приведем достаточно интересное следствие.

Следствие [**IST**]. *Не существует* st-$\in$-*формулы* $\tau(x)$ *с единственной свободной переменной* x, *такой, что*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\, [\Phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \tau(\ulcorner\Phi(x_1, \ldots, x_n)\urcorner)]$$

есть теорема **IST** *для любой внутренней формулы* Φ.

Другими словами, истинность внутренних формул (всех сразу) не может быть выражена в рамках теории **IST**. Через $\ulcorner\Phi\urcorner$ обозначается конечная последовательность (кодированных) логических знаков и множеств (параметров), составляющих запись формулы Φ.

На самом деле, в этой теореме существенную роль играет возможность использовать *нестандартные* множества x_i в качестве параметров формулы Φ. Ограничившись стандартными параметрами, мы получаем результат противоположного направления.

Теорема 5 [IST]. *Существует (внешняя) формула* $\tau(x)$, *такая, что для любой внутренней* $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ *имеет место (в* IST):

$$\forall^{st} x_1 \ldots \forall^{st} x_n \; [\Phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \tau(\ulcorner \Phi(x_1, \ldots, x_n) \urcorner)].$$

Таким образом, истинность внутренних формул со *стандартными* параметрами выразима в **IST**.

Теорема 5 используется в доказательстве теоремы 3. Одновременно она проливает некоторый свет на вопрос о том, какие модели **ZFC** могут расширяться до моделей **IST**. Именно если M — модель **ZFC** и одновременно стандартная часть модели $^*M$ теории **IST**, то множество

$$T_M = \{\ulcorner \Phi \urcorner : \Phi \text{ есть } \in\text{-предложение без параметров, истинное в } M\}$$

должно принадлежать M согласно теореме 5 и стандартизации **S**. Таким образом, «$T_M \in M$» — необходимое условие для того, чтобы M можно было расширить до модели **IST** (где M была бы стандартной частью). Отметим, что «быть моделью вида $\mathbf{V}_\theta$ со строго недостижимым θ» — достаточное условие.

Проблема 5. Указать разумное необходимое и достаточное условие возможности расширения до модели **IST**. Мы предполагаем, что таким условием могло бы служить следующее: M является универсумом множеств некоторой (стандартной) модели теории классов Келли — Морса **KMC** (или, быть может, какой-то части **KMC**).

1.14. «Тонкие» результаты. В теоремах типа теоремы 3 обычно представляет интерес задача поиска наиболее простых ядерных формул, дающих невыводимый пример той или иной гипотезы. Но что следует взять в качестве меры простоты или сложности формул? В принципе, здесь возможны, вероятно, различные подходы к учету числа кванторов и способов их взаиморасположения, важно только, чтобы конструкция иерархии разумным образом согласовывалась с аксиоматикой **IST**. Выбранное нами определение иерархии предполагает преимущественный учет *внешних* кванторов ($\exists^{st}$, $\forall^{st}$)

Прежде всего, выделяется класс формул вида

$$\mathbf{Q}_1^{st} x_1 \mathbf{Q}_2^{st} x_2 \ldots \mathbf{Q}_n^{st} x_n \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \; \Psi \text{ — внутренняя},$$

которые мы условимся называть ext-*предваренными* (каждое $\mathbf{Q}_i$ есть один из кванторов $\exists$, $\forall$). Этот класс расщепляется в иерархию классов $\Sigma_n^{st}, \Pi_n^{st}$, определяемых следующим традиционным способом:

$$(\Sigma_n^{st}) \; \exists^{st} x_1 \; \forall^{st} x_2 \; \exists^{st} x_3 \ldots \forall \, (\exists)^{st} x_n \; \Psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

$$(\Pi_n^{st}) \; \forall^{st} x_1 \; \exists^{st} x_2 \; \forall^{st} x_3 \ldots \exists \, (\forall)^{st} x_n \Psi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

где Ψ — внутренняя формула. (Обозначения Σ_n^{st}, Π_n^{st} взяты нами из книги ван ден Берга [19].)

Простейшими формулами, не относящимися к ext-предваренным, являются формулы классов $\forall\Sigma_2^{st}$ и $\exists\Pi_2^{st}$, т. е. имеющие вид

$$\forall x \exists^{st} y \; \forall^{st} z \; \Psi \text{ и } \exists x \; \forall^{st} y \; \exists^{st} z \; \Psi$$

соответственно (как и выше, Ψ — внутренняя формула).

Эти элементы иерархии вполне достаточны для того, чтобы сформулировать пару теорем, исследующих поставленный выше вопрос для ядерных формул со стандартными параметрами.

Теорема 6 [IST]. (а) *Гипотезы*

$$\mathbf{Sep}_3, \mathbf{Repl}_{1,2,3,4,5}, \mathbf{Chc}_{1,2}, \mathbf{Coll}_1, \mathbf{Coll}_2\,(\mathrm{st}\,\Phi), \mathbf{BRepl}_4, \mathbf{BChc}_4,$$

а также **Uniq**, *верны для всех* ext-*предваренных ядерных формул со стандартными параметрами:*

(б) $\mathbf{Chc}_4$ *верна для* Σ_2^{st}*-формул со стандартными параметрами;*

(в) $\mathbf{Chc}_5$ *верна для* Π_1^{st}*-формул (с любыми параметрами).*

(Для $\mathbf{Chc}_4$ в этой серии разумного результата нет.)

Теорема 7 [Cons ZFC]. (а) *Любая гипотеза из списка*

$$\mathbf{Sep}_3, \mathbf{Repl}_{1,2,3,4,5}, \mathbf{Chc}_{1,2,3}, \mathbf{Coll}_1, \mathbf{Coll}_2\,(\mathrm{st}\,\Phi)$$

недоказуема в **IST** *для некоторой ядерной формулы класса* $\exists\Pi_2^{\mathrm{st}}$ *(разумеется, своей для каждой из гипотез) без параметров, а также и для некоторой ядерной формулы класса* $\forall\Sigma_2^{\mathrm{st}}$ *без параметров.*

(б) $\mathbf{Chc}_4$ *и* $\mathbf{Chc}_5$ *не доказуемы в* **IST** *для подходящих ядерных формул класса* Π_2^{st} *без параметров.*

Теоремы 6 и 7 оставляют существенную неопределенность в отношении гипотез $\mathbf{Chc}_{3,5}$. Именно если принять, что теорема 6 дает наилучший возможный результат, то самый простой невыводимый пример $\mathbf{Chc}_3$ должен был бы иметь *внутреннюю* ядерную формулу, а самый простой невыводимый пример $\mathbf{Chc}_5$ — ядерную формулу *класса* Σ_1^{st}, обе без параметров, что, конечно, сильнее, чем соответствующая часть теоремы 7.

Проблема 6. Установить, что $\mathbf{Chc}_3$ не доказуема в **IST** для некоторой внутренней ядерной формулы. Установить, что $\mathbf{Chc}_5$ не доказуема для некоторой ядерной формулы класса Σ_1^{st} (легко видеть, что на самом деле второй результат следовал бы из первого).

Нетрудно понять, что стандартная часть модели **IST**, где $\mathbf{Chc}_3$ нарушается на какой-то внутренней формуле, должна быть достаточно специфической моделью **ZFC** — например, она не допускает определимого полного упорядочения универсума.

Понятно, что теорема 7 является более точной формой теоремы 3, если оставить в стороне гипотезы $\mathbf{BRepl}_4$ и $\mathbf{BChc}_4$ подстановки и выбора с ограниченной областью изменения переменной y. Для этих двух гипотез справедлива отдельная теорема.

Теорема 8 [Cons ZFC]. *Гипотеза* $\mathbf{BRepl}_4$ *не доказуема в* **IST** *для подходящих ядерных формул классов* $\exists\Pi_2^{\mathrm{st}}$ *и* $\forall\Sigma_2^{\mathrm{st}}$. *Гипотеза* $\mathbf{BChc}_4$ *не доказуема в* **IST** *для некоторой формулы класса* Π_2^{st}.

Отметим, что известные нам недоказуемые в **IST** примеры $\mathbf{BRepl}_4$ и $\mathbf{BChc}_4$ заведомо имеют нестандартный параметр в составе ядерной формулы (см. конец § 9).

Проблема 7. Установить невыводимость $\mathbf{BRepl}_4$ и $\mathbf{BChc}_4$ для беспараметрических ядерных формул.

Проблема 8. Существует ли st-$\in$-формула $\Phi(k, n)$ без параметров, такая, что с **IST** совместно утверждение: Φ определяет взаимно однозначное соответствие между стандартными $k \in \mathbb{N}$ и некоторой конфинальной частью $\mathbb{N}$. Наличие такой формулы означало бы возможность весьма сильного нарушения $\mathbf{BRepl}_4$.

Еще один открытый вопрос связан со свойством единственности (проблема 3 выше). Следующая теорема дает частичный ответ.

Теорема 9. *Если* st-$\in$-*формула* $\Phi(x)$ *со стандартными параметрами такова, что существует единственное* x, *удовлетворяющее* $\Phi(x)$, *то это единственное* x *является элементом стандартного множества.*

(В **IST** доказуемо, что существуют множества, не являющиеся элементами стандартных — например, такое множество H, что $\mathbb{S} \subseteq H$.)

Уместно отметить, что Нельсон [31] доказал справедливость **Uniq** для всех Σ_2^{st}-формул и $\mathbf{Chc}_4$ для Σ_2^{st}-формул некоторого специального вида (именно наружный квантор $\exists^{\mathrm{st}}$ должен быть ограничен стандартным множеством).

Проблема 9. Изучить ядерные формулы с нестандартными параметрами.

По меньшей мере одно утверждение теоремы 7 теряет силу, если допускаются нестандартные параметры: $\mathbf{Repl}_1$ не доказуемо в **IST** для некоторой *внутренней* формулы с нестандартными параметрами.

1.15. Иерархия. Теорема иерархии для данной Σ/Π-иерархии формул утверждает, что любой класс иерархии содержит формулу, не эквивалентную (в определенном смысле) никакой формуле «смежного» класса того же уровня. В нашем случае вопрос ставится так: найти Σ_n^{st}-формулу, не эквивалентную в **IST** никакой Π_n^{st}-формуле.

Случай $n = 1$ не содержит никаких проблем: формула st x (а она может быть записана в Σ_1^{st}-виде: $\exists^{\mathrm{st}} z\ (z = x)$) не эквивалентна в **IST** никакой Π_1^{st}-формуле. Случай $n = 2$ рассматривается следующей теоремой.

Теорема 10. *Следующая* Σ_2^{st}-*формула*: $\exists^{\mathrm{st}} a\ \forall^{\mathrm{st}} b\ (\langle a, b\rangle \in X)$ (*со свободной переменной* X) *не эквивалентна в* **IST** *никакой* Π_2^{st}-*формуле.*

Автору не удалось получить какие-либо результаты в этом направлении для уровней $n \geqslant 3$.

Проблема 10. Доказать теорему иерархии для всех $n \geqslant 3$.

Проблема 11. Определить разумную иерархию всех st-$\in$-формул, не ограничивающуюся ext-предваренными формулами.

Вопросы, связанные с иерархией, существенно упрощаются для таких st-$\in$-формул, которые содержат предикат стандартности только через внешние кванторы вида $\exists^{\mathrm{st}} z \in Z$, $\forall^{\mathrm{st}} z \in Z$, где Z — стандартное множество (свое для каждого квантора). Условимся называть такие формулы ext-*ограниченными*, а кванторы указанного вида — *ограниченными* внешними кванторами.

Нельсон показал [31, 32], что любая ext-ограниченная формула эквивалентна в **IST** некоторой ext-ограниченной Σ_2^{st}-формуле,— следовательно, и некоторой ext-ограниченной Π_2^{st}-формуле. Тем самым, иерархия ext-ограниченных формул весьма проста и включает лишь четыре уровня: внутренние, Σ_1^{st}, Π_1^{st} и те, которые являются одновременно Σ_2^{st} и Π_2^{st} (с точностью до эквивалентности в **IST**). Теорема 10 показывает, что не ext-ограниченные формулы присоединяют еще по меньшей мере один уровень.

В силу сказанного, значительная часть теоремы 6 автоматически переносится на ext-ограниченные формулы независимо от числа и расположения внешних (а также и внутренних) кванторов. В то же время для таких формул имеются результаты, не следующие прямо из теоремы 6: в частности, $\mathbf{Chc}_4$ имеет место в **IST** для всех ext-ограниченных ядерных формул (теорема насыщенности Нельсона [32]).

В то же время можно сделать так, чтобы каждая формула стала как бы ext-ограниченной, построив нечто вроде теоретико-типовой структуры над парой **ZFC**/**IST**. Эта теория — назовем ее супер-**IST** — организуется так, что любое множество попадает в определенный уровень n, $n \in \mathbb{N}$. Уровень 0 — это обычный универсум **IST** (со стандартными и нестандартными множествами), и для любого n всякая внутренняя совокупность множеств уровня n становится множеством уровня $n+1$. Таким образом, совокупность V_n всех множеств уровня n является множеством уровня $n+1$, стандартным благодаря переносу. Наконец, каждая переменная также ограничена определенным уровнем, т. е. каждый квантор ограничен соответствующим стандартным множеством вида V_n. Детали см. в статье [32].

Разумеется, супер-**IST** значительно сильнее, чем сама **IST**.

1.16. Теория ограниченных множеств. Теоремы 1 и 3 показывают, что теория **IST** весьма далека от того, чтобы быть полной по отношению к рассматриваемым гипотезам. Мы считаем, что причина этой неполноты заключена в неопределенности поведения «больших» нестандартных множеств (вроде множества H, такого, что $\mathbb{S} \subseteq H$), а точнее, в недостаточной регулировке их поведения аксиоматикой **IST**.

Для обоснования этого положения рассмотрим *теорию ограниченных множеств* **BST** — вариант **IST**, прямо запрещающий существование «больших» множеств через специальную *аксиому ограниченности*

$$\mathbf{B}\colon\ \forall x\ \exists^{\mathrm{st}} X\ (x \in X).$$

Помимо **B**, в **BST** включаются все аксиомы **ZFC**, перенос **T** и стандартизация **S**, а также ослабленная, чтобы не получить противоречия с **B**, *ограниченная идеализация*

$$\mathbf{BI}\colon (\mathrm{st}\ A_0,\ \mathrm{int}\ \Phi)\qquad \forall^{\mathrm{stfin}} A \subseteq A_0\ \exists x\ \forall a \in A\ \Phi(x, a) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \exists x\ \forall^{\mathrm{st}} a \in A_0\ \Phi(x, a)$$

(A_0 — стандартное множество, Φ — внутренняя формула).

Теория **BST** имеет внутреннюю модель в **IST**. Скажем, что множество x является *ограниченным*, если x — элемент некоторого стандартного множества X. Определим *класс ограниченных множеств*

$$\mathbb{B} = \{x \in \mathbf{V}\colon x \text{ ограничено}\} = \{x \in \mathbf{V}\colon \exists^{\mathrm{st}} X\ (x \in X)\}.$$

Понятно, что $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B} \subseteq \mathbf{V}$; на самом деле, оба включения являются строгими в **IST**.

Теорема 11 [**IST**]. *Класс* $\mathbb{B}$ *является моделью* **BST**.

Таким образом, теории **ZFC**, **IST**, **BST** равнонепротиворечивы.

Разумеется, «глобальные» формы изучаемых нами гипотез, т. е. $\mathbf{Sep}_3$, $\mathbf{Repl}_{3,5}$, $\mathbf{Chc}_{3,5}$ не имеют смысла в **BST** — они тривиально ложны, ибо в **BST** невозможно множество, которое содержало бы все стандартные множества. А «локальные» гипотезы решаются положительно.

Теорема 12 [**BST**]. *Следующие гипотезы*:

$$\mathbf{Repl}_{1,2,4},\ \mathbf{Chc}_{1,2,4},\ \mathbf{Coll},\ \mathbf{Coll}_1,\ \mathbf{Coll}_2\ (\mathrm{st}\ \Phi),\ \mathbf{Uniq}$$

верны для всех внутренних и внешних ядерных формул.

Естественно, к этому списку можно добавить и «y-ограниченные» формы $\mathbf{BRepl}_{1,2,4}$, $\mathbf{BChc}_{1,2,4}$, каждая из которых и в **BST** есть следствие соответствующей гипотезы $\mathbf{Repl}_i$, $\mathbf{Chc}_i$.

Весьма важный момент и принципиальное отличие от **IST** заключается в том, что теория ограниченных множеств как бы тривиализирует иерархию st-$\in$-формул.

Теорема 13 [**BST**]. *Для любой* st-$\in$-*формулы* $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ *со свободными переменными* $x_1, \ldots, x_n$ *и без параметров найдется* Σ_2^{st}-*формула*

$\sigma(x_1, \ldots, x_n)$ *такого же типа, такая, что*

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n \quad [\Phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \sigma(x_1, \ldots, x_n)]$$

доказуемо в **BST**.

Теоремы 11, 13 и частично 12 содержатся в статье автора [9].

Ограниченные множества в некоторых отношениях похожи на стандартные: например, теорема 5 верна и для стандартных параметров.

Проблема 12. Доказать теорему 6 для ядерных формул указанных классов, но с ограниченными параметрами.

Проблема 13. Указать «разумную» гипотезу типа рассмотренных выше, неразрешимую в **IST**.

1.17. Организация изложения. Итак, главной целью настоящей статьи является доказательство теорем 1А,Б — 13.

Во втором параграфе представлено несколько результатов, в той или иной форме известных из работ Нельсона [31, 32]. Чтобы избежать ненужного дублирования, связанного с использованием этих теорем в **IST** и в **BST** (а эти теории не сводятся одна к другой), мы показываем, что известные доказательства нужных нам фактов могут быть проведены в более слабой, чем **IST** и **BST**, «базовой» теории **BIST**.

Далее, в § 3, мы даем доказательство ключевой технической теоремы, позволяющей в некоторых случаях ограничивать стандартными множествами область действия внешних кванторов. В качестве первого ее приложения доказывается теорема 6.

Второе приложение теоремы ограничения внешних кванторов § 3 — это доказательство теорем 1А и 1Б в § 4, осуществляемое через посредство внутренней модели. Третье приложение, т. е. теорема 12, содержится в § 5, куда также помещены доказательства теорем 11 и 13, касающихся теории ограниченных множеств.

Следующий § 6 представляет доказательство теоремы 10 (теорема иерархии для второго уровня иерархии ext-предваренных формул).

Исследования, по возможности определяющие истинность внутренних формул с доказательством теоремы 5 и теоремы 2 в качестве приложения, помещены в § 7.

Главным результатом § 8 является теорема 4 о том, что **Coll** — теорема **IST**. Попутно мы доказываем теорему 9 и следствие, упомянутое выше, в п. 1.13.

Теорема 3 о независимости и ее более точные формы — теоремы 7 и 8 — доказываются в § 9.

Наконец, в последнем § 10 мы пытаемся объяснить, как идея «экстернализации» могла бы привести к постановке новых и (как надеется автор) интересных проблем.

§ 2. Базовая теория

Особенность и сила постулатов, положенных Нельсоном в основу **IST**, заключается в том, что они не связаны конкретно с аксиоматикой **ZFC** или какой-либо иной «стандартной» системы. Напротив, их действие может апплицироваться на любую аксиоматическую теорию по крайней мере теоретико-множественного характера. Тем не менее теория, избранная в качестве основы, должна быть достаточно богатой для того, чтобы возможности нестандартных методов могли быть проявлены в полной мере.

Система **BIST** (базовая теория внутренних множеств), которая рассматривается в этом параграфе, как раз достаточно богата для вывода наиболее полезных (для целей настоящей статьи) теорем «классики» нестандартного анализа и в то же время носит достаточно общий характер для того, чтобы ее теоремы сохраняли силу для (не сводящихся одна к другой) теорий **IST** и **BST**. Мы относим к **BIST**:

1) все аксиомы **ZFC**;

2) перенос **T** и стандартизацию **S** в их обычном виде (см. п. 1.1);

3) ограниченную идеализацию **BI** из п. 1.16.

Все нижеследующие теоремы этого параграфа доказываются в **BIST** (кроме дополнительных утверждений в теоремах 2.9—2.12, где отдельно предполагается полная идеализация). Этим обеспечена возможность их использования как для **IST**, так и для **BST**.

Необходимо отметить, что все результаты (кроме, быть может, теоремы 2.7) так или иначе известны из работ Нельсона [31, 32] и неоднократно повторялись в статьях других авторов. Однако необходимость учета доказательных средств, простота выкладок и естественное желание сделать изложение внутренне замкнутым заставили автора представить эти простые доказательства вместо того, чтобы давать формальные ссылки.

Теоремы сгруппированы с точки зрения того, какой из дополнительных постулатов **BIST** конкретно используется. Начнем с переноса.

2.1. Теорема (теорема единственности) [**BIST**]. *Пусть* $\Phi(x)$ — *внутренняя формула со стандартными параметрами, причем существует единственное* x, *удовлетворяющее* $\Phi(x)$. *Тогда это* x *стандартно.*

Доказательство. Применяем перенос к формуле $\Phi(x)$. $\square$

В теории моделей принято определение: модель M называется *элементарным расширением* своей подмодели M' (а последняя — *элементарной подмоделью* M), когда любое предложение данного языка с параметрами из M', истинное в M', истинно и в M. Поэтому смысл следующей теоремы — в том, что универсум внутренних множеств $\mathbf{V}$ есть элементарное расширение класса $\mathbb{S}$ стандартных множеств относительно внутренних формул.

2.2. Теорема [**BIST**]. *Пусть* Φ — *замкнутое предложение со стандартными параметрами, а* Φ^{st} *получено из* Φ *заменой всех кванторов* $\exists$, $\forall$, *на* $\exists^{\mathrm{st}}$, $\forall^{\mathrm{st}}$ *соответственно. Тогда* $\Phi \leftrightarrow \Phi^{\mathrm{st}}$.

Доказательство. Следует действовать индукцией по построению Φ из элементарных формул с использованием **T** для шага $\exists$. $\square$

Теперь обратимся к некоторым следствиям стандартизации.

2.3. Теорема [**BIST**]. *Пусть* X, Y — *стандартные множества, а* $\Phi(x, y)$ — *произвольная* st-$\in$-*формула. Тогда*

$$\forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists^{\mathrm{st}} y \in Y\ \Phi(x, y) \leftrightarrow \exists^{\mathrm{st}} \tilde{y}: X \to Y\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \Phi(x, \tilde{y}(x)).$$

Доказательство. Понятно, что доказываемое утвер дение есть не что иное, как $\mathbf{BChc}_1$. Импликация $\leftarrow$ очевидна: если x и $\tilde{y}$ стандартны, то $\tilde{y}(x)$ также стандартно по теореме 1.1. Для импликации $\to$ принцип **S** приносит стандартное множество $W \subseteq X \times Y$, такое, что

$$\forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \forall^{\mathrm{st}} y \in Y\ [\langle x, y\rangle \in W \leftrightarrow \Phi(x, y)].$$

Тогда $\forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists^{\mathrm{st}} y \in Y\ [\langle x, y\rangle \in W]$, коль скоро верна левая часть искомой эквивалентности. Следовательно, по переносу, выполнено $\forall x \in X\ \exists y \in Y\ [\langle x, y\rangle \in W]$, и аксиома выбора дает функцию $\tilde{y}: X \to Y$, удовлетворяющую $\langle x, \tilde{y}(x)\rangle \in W$ для всех $x \in X$. Снова из-за переноса функцию $\tilde{y}$ можно считать стандартной — и это обеспечивает выполнение правой части. $\square$

Весьма важное следствие теоремы 2.3 заключается в возможности преобразовывать ext-ограниченные формулы к Σ_2^{st}-виду. Напомним, что ext-

ограниченными называются формулы, каждый внешний (т. е. $\exists^{\mathrm{st}}$ или $\forall^{\mathrm{st}}$) квантор которых имеет вид $\exists^{\mathrm{st}} z \in Z$ или $\forall^{\mathrm{st}} z \in Z$, где Z — стандартное (свое для каждого вхождения квантора) множество, и нет никаких других вхождений st.

2.4. Теорема **[BIST]**. *Ко всякой* ext-*ограниченной формуле* $\Phi(\mathrm{x})$ *со стандартными параметрами найдется* ext-*ограниченная* Σ_2^{st}-*формула* $\Psi(\mathrm{x})$ *с тем же набором свободных переменных* $\mathrm{x} = x_1, \ldots, x_n$ *и также со стандартными параметрами, эквивалентная* $\Phi(\mathrm{x})$ *в том смысле, что* $\forall x_1 \ldots \forall x_n\ [\Phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \Psi(x_1, \ldots, x_n)]$.

Точнее, утверждается следующее. Пусть $\Phi(\mathrm{x})$ есть произвольная st-$\in$-формула без параметров; $\mathrm{x} = x_1, \ldots, x_n$ — список ее свободных переменных. Занумеруем все внешние кванторы этой формулы: $\mathrm{Q}_1^{\mathrm{st}} z_1 \ldots \mathrm{Q}_k^{\mathrm{st}} z_k$ (среди переменных z_i могут встретиться совпадающие). Через $\Phi'(\mathrm{x}, Z_1, \ldots, Z_k)$ обозначим формулу, полученную из Φ заменой каждого квантора $\mathrm{Q}_i^{\mathrm{st}} z_i$ на $\mathrm{Q}_i^{\mathrm{st}} z_i \in Z_i$. Существует внутренняя формула $\varphi(\mathrm{x}, a, b)$ без параметров, такая, что в **BIST** доказуемо

$$\forall^{\mathrm{st}} Z_1 \ldots \forall^{\mathrm{st}} Z_k\ \exists^{\mathrm{st}} A\ \exists^{\mathrm{st}} B\ \forall \mathrm{x}\ [\Phi'(\mathrm{x}, Z_1, \ldots, Z_k) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \exists^{\mathrm{st}} a \in A\ \forall^{\mathrm{st}} b \in B\ \varphi(\mathrm{x}, a, b)].$$

Понятно, что столь громоздкие формулировки неудобны, и поэтому мы предпочли сформулировать теорему 2.4 в более компактном виде, благо способ уточнения очевиден и однозначен. Сказанное относится также и к родственной теореме 13 Введения (см. ниже § 5).

Доказательство. Рассуждаем индукцией по построению Φ из внутренних формул (для которых результат ясен) при помощи знаков $\neg$ и & и кванторов $\exists$ и $\exists^{\mathrm{st}}$ (через которые известным образом выражаются остальные связки и квантор общности).

Индуктивный шаг & не требует рассмотрения ввиду очевидности.

Индуктивный шаг $\neg$. Требуется построить ext-ограниченную Σ_2^{st}-формулу $\Psi(\mathrm{x})$, эквивалентную Π_2^{st}-формуле

$$\forall^{\mathrm{st}} a \in A\ \exists^{\mathrm{st}} b \in B\ \varphi(\mathrm{x}, a, b) \text{ (φ внутренняя, A и B стандартны),}$$

взятой в качестве $\Phi(\mathrm{x})$. Согласно теореме 2.3 подойдет следующая формула:

$$\exists^{\mathrm{st}} f \in F\quad \forall^{\mathrm{st}} a \in A\ \varphi(\mathrm{x}, a, f(a)),$$

где $F = {}^A B = \{f\colon A \to B\}$ стандартно по теореме 2.1.

Индуктивный шаг $\exists^{\mathrm{st}}$ элементарен: два рядом стоящих квантора $\exists^{\mathrm{st}}$ заменяются одним через функцию пары.

Наконец, шаг $\exists$. Требуется построить ext-ограниченную Σ_2^{st}-формулу $\Psi(\mathrm{x})$, эквивалентную формуле

$$\exists y\ \exists^{\mathrm{st}} a \in A\ \forall^{\mathrm{st}} b \in B\ \varphi(\mathrm{x}, y, a, b)$$

(φ внутренняя, A и B стандартны). Подойдет формула

$$\exists^{\mathrm{st}} a \in A\ \forall^{\mathrm{st}} B' \in P\ \exists y\ \forall b \in B'\ \varphi(\mathrm{x}, y, a, b),$$

где $P = \{B'\colon B' \subseteq B \text{ конечно}\}$ стандартно вместе с B по теореме 1.1, а эквивалентность обеспечивается идеализацией **BI**. $\square$

2.5. Теорема (трансфинитная индукция) **[BIST]**. *Пусть* $\Phi(\alpha)$ — *произвольная* st-$\in$-*формула, причем существуют стандартные ординалы* α, *удовлетворяющие* $\Phi(\alpha)$. *Тогда среди таких стандартных ординалов* α *имеется наименьший.*

Доказательство. Разумеется, для внутренних формул со стандартными параметрами результат обеспечен переносом и теоремами **ZFC**. В общем случае, пусть α_0 — какой-то стандартный ординал, для которого верно $\Phi(\alpha_0)$. Стандартизация **S** приносит стандартное множество ординалов A, для которого выполнено следующее:

$$\forall^{\mathrm{st}}\alpha \leqslant \alpha_0\ [\alpha \in A \leftrightarrow \Phi(\alpha)],$$

причем A непусто, так как $\alpha_0 \in A$. Наименьший ординал α из A стандартен по теореме 2.1 и, следовательно, удовлетворяет $\Phi(\alpha)$. □

2.6. Следствие (теорема внешней индукции) [**BIST**]. *Пусть* $\varphi(n)$ *произвольная* st-$\in$-*формула, причем*

$$\varphi(0)\ \&\ \forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\,[\varphi(n) \to \varphi(n+1)].$$

Тогда $\varphi(n)$ *выполнено для всех стандартных натуральных* n.

Доказательство. Применим теорему 2.5 к формуле $\exists k \leqslant n\ \neg\,\varphi(k)$. □

2.7. Теорема [**BIST**]. $\mathbf{Repl}_1 \leftrightarrow \mathbf{Chc}_1 \leftrightarrow \mathbf{Coll}_1$.

Доказательство. Напомним определения:

$$\mathbf{Repl}_1\colon\ (\mathrm{st}\,X)\ \ \forall^{\mathrm{st}}x \in X\ \ \exists!^{\mathrm{st}}y\ \Phi(x, y) \to \exists^{\mathrm{st}}\tilde{y}\ \ \forall^{\mathrm{st}}x \in X\ \ \Phi(x, \tilde{y}(x));$$

$$\mathbf{Chc}_1\colon\ (\mathrm{st}\,X)\ \ \forall^{\mathrm{st}}x \in X\ \ \exists^{\mathrm{st}}y\ \Phi(x, y) \to \exists^{\mathrm{st}}\tilde{y}\ \ \forall^{\mathrm{st}}x \in X\ \ \Phi(x, \tilde{y}(x));$$

$$\mathbf{Coll}_1\colon\ \qquad \forall^{\mathrm{st}}X\ \exists^{\mathrm{st}}Y\ \forall^{\mathrm{st}}x \in X\ [\exists^{\mathrm{st}}y\ \Phi(x, y) \to \exists^{\mathrm{st}}y \in Y\ \ \Phi(x, y)].$$

Понятно, что $\mathbf{Chc}_1 \to \mathbf{Repl}_1$. Вывод $\mathbf{Coll}_1 \to \mathbf{Chc}_1$ также элементарен: чтобы получить $\mathbf{Chc}_1$ для некоторой формулы Φ и стандартного множества X, используем $\mathbf{Coll}_1$ для ограничения области изменения переменной y некоторым стандартным множеством, а затем используем теорему 2.3.

Наконец, докажем, что $\mathbf{Repl}_1$ влечет $\mathbf{Coll}_1$. Прежде всего, подстановка **ZFC** позволяет использовать иерархию фон Неймана, классы $\mathbf{V}_\alpha$ которой конструируются индукцией по $\alpha \in \mathrm{Ord}$ (Ord — класс всех ординалов). Напомним, что

$$\mathbf{V}_0 = \varnothing,\ \mathbf{V}_{\alpha+1} = \mathscr{P}(\mathbf{V}_\alpha) = \{X\colon X \subseteq \mathbf{V}\},\ \mathbf{V}_\lambda = \textstyle\bigcup_{\alpha<\lambda}\mathbf{V}_\alpha$$

для предельных λ; см. Йех [6]. При этом для любого множества y существует наименьший ординал $\alpha = \alpha(y)$, такой, что $y \in \mathbf{V}_{\alpha(y)}$; по теореме 2.1 из стандартности y следует стандартность $\alpha(y)$.

Пусть теперь X стандартно, а $\Phi(x, y)$ — произвольная st-$\in$-формула. Для $x \in X$ через γ_x обозначим наименьший из ординалов вида $\alpha(y)$, где y стандартно и удовлетворяет $\Phi(x, y)$ — если такие y есть, а иначе просто $\gamma_x = 0$. (Теорема 2.5 делает определение корректным.) Равенство $\gamma = \gamma_x$ может быть выражено st-$\in$-формулой, применяя $\mathbf{Repl}_1$ к которой, мы находим стандартную функцию f, такую, что $\gamma_x = f(x)$ для любого стандартного $x \in X$. Множество

$$Y = \textstyle\bigcup_{x\in X,\, f(x)\in \mathrm{Ord}}\mathbf{V}_{f(x)}$$

стандартно по теореме 2.1 и обеспечивает $\mathbf{Coll}_1$ для формулы Φ. □

2.8. Теорема [**BIST**]. *Если* X — *стандартное конечное множество, то все элементы и все подмножества* X *стандартны.*

Доказательство. Число n элементов множества X — стандартное согласно теореме 2.1. Теперь применяем теорему 2.6 к формуле

$$\forall^{\mathrm{st}}X\ [X \text{ имеет} \leqslant n \text{ элементов} \to \forall x \in X\ (\mathrm{st}\,x)\ \&\ \forall Y \subseteq X\ (\mathrm{st}\,Y)].\ \square$$

Теперь несколько теорем, опирающихся на идеализацию. Каждая из них дана в двух вариантах, из которых первый использует, как и выше, только аксиомы **BIST**, а второй, более сильный, доказывается в предположении, что плюс к **BIST** имеет место полная идеализация **I** (это подчеркивается записью full **I** в скобках).

2.9. Теорема [**BIST**]. *Если X — стандартное множество, то найдется такое конечное множество H, что ${}^{\sigma}X \subseteq H$.*

(full **I**) *Существует конечное H, такое, что $\mathbb{S} \subseteq H$.*

Напомним, что $\mathbb{S}$ — класс всех стандартных множеств, и ${}^{\sigma}X = X \cap \cap \mathbb{S}$ — (внешняя) совокупность всех стандартных элементов X.

Доказательство. Левая часть эквивалентности

$$\forall^{\mathrm{stfin}} X' \subseteq X \ \exists^{\mathrm{fin}} H \ \forall x \in X' \ (x \in H) \leftrightarrow \exists^{\mathrm{fin}} H \ \forall^{\mathrm{st}} x \in X \ (x \in H)$$

(т. е. **BI** для формулы «$x \in H$ & H конечно») выполнена — следовательно, истинна и правая, откуда имеем искомое множество H. Модификация для полной идеализации очевидна. $\square$

Следующая теорема Нельсона переносит идеализацию с внутренних формул Φ (с какими она входит в **IST** и в **BST**) на более широкий класс формул; иногда это бывает полезно.

2.10. Теорема [**BIST**]. *Идеализация* **BI** *выполнена для любой* ext-*ограниченной* Π_1^{st}-*формулы* Φ.

(full **I**) *Идеализация* **I** *выполнена для любой* Π_1^{st}-*формулы* Φ.

Доказательство (full **I** вариант). Требуется доказать, что

$$\forall^{\mathrm{stfin}} A \ \exists x \ \forall a \in A \ \forall^{\mathrm{st}} z \ \varphi(x, a, z) \leftrightarrow \exists x \ \forall^{\mathrm{st}} a \ \forall^{\mathrm{st}} z \ \varphi(x, a, z)$$

для любой внутренней φ. Импликация $\leftarrow$ покрывается теоремой 2.8. Для вывода обратной импликации меняем местами кванторы по a и z и при помощи **I** для блока $\exists x \ \forall^{\mathrm{st}} z$ выводим из левой части:

$$\forall^{\mathrm{stfin}} A \ \forall^{\mathrm{stfin}} Z \ \exists x \ \forall a \in A \ \forall z \in Z \ \varphi(x, a, z),$$

а затем $\forall^{\mathrm{stfin}} W \ \exists x \ \forall w \in W \ \psi(x, w)$, где $\psi(x, w)$ — внутренняя формула $\exists a \ \exists z \ [w = \langle a, z\rangle \ \& \ \varphi(x, a, z)]$. Следовательно, мы имеем $\exists x \ \forall^{\mathrm{st}} w \ \psi(x, w)$ (применена идеализация). А это соотношение легко превращается в правую часть искомой эквивалентности.

Следующие две теоремы уже непосредственно касаются наших задач — единственность и выбор.

2.11. Теорема (теорема единственности) [**BIST**]. *Предположим, что* $\Phi(x)$ *является* ext-*ограниченной* Σ_2^{st}-*формулой со стандартными параметрами, и существует единственное* x, *удовлетворяющее* $\Phi(x)$. *Тогда это единственное* x *стандартно.*

(full **I**) *То же для* Σ_2^{st}-*формул общего вида.*

Доказательство. Пусть, таким образом, B стандартно и Φ есть формула $\exists^{\mathrm{st}} a \ \forall^{\mathrm{st}} b \in B \ \varphi(x, a, b)$, где φ — внутренняя формула (ограничение стандартным множеством области изменения переменной a не обязательно). Найдется стандартное a, такое, что наше x будет единственным, для которого справедливо $\exists^{\mathrm{st}} a \ \forall^{\mathrm{st}} b \in B \ \varphi(x, a, b)$. Тогда

$$\forall \xi \ [\forall^{\mathrm{st}} b \in B \ \varphi(\xi, a, b) \to \xi = x],$$

т. е.

$$\forall \xi \ \exists^{\mathrm{st}} b \in B \ [\xi = x \text{ или } \neg \varphi(\xi, a, b)].$$

Используя BI, находим стандартное конечное множество $B' \subseteq B$, такое, что $\forall \xi \ [\forall b \in B' \ \varphi(\xi, a, b) \to \xi = x]$. Однако B' содержит лишь стандартные элементы согласно теореме 2.8. Следовательно, x — единственное множество, удовлетворяющее внутренней и со стандартными параметрами формуле $\forall b \in B'$ $\varphi(\xi, a, b)$. Остается применить теорему 2.1. □

2.12. Теорема (теорема насыщенности) [BIST]. *Гипотеза* Chc_4 *выполнена для всех* ext-*ограниченных* Σ_2^{st}-*формул* Φ, *а гипотеза* Chc_5 — *для всех* ext-*ограниченных* Π_1^{st}-*формул* Φ.

(full I) *Гипотеза* Chc_4 *выполнена для всех* Σ_2^{st}-*формул с* ext-*ограниченным квантором* $\exists^{\mathrm{st}}$, *а гипотеза* Chc_5 — *для всех* Π_1^{st}-*формул.*

Доказательство. Начнем с вывода гипотезы

$$\mathrm{Chc}_5\colon \forall^{\mathrm{st}} x\ \exists y\ \Phi(x, y) \to \exists \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x\ \Phi(x, \tilde{y}(x)),$$

где Φ есть Π_1^{st}-формула $\forall^{\mathrm{st}} b \in B\ \varphi(x, y, b)$ (или, в варианте full I, $\forall^{\mathrm{st}} b\ \varphi(x, y, b)$). Левая часть импликации принимает вид

$$\forall^{\mathrm{st}} x\ \exists y\ \forall^{\mathrm{st}} b \in B\ \varphi(x, y, b)),$$

откуда следует $\forall^{\mathrm{stfin}} X\ \forall x \in X\ \exists y\ \forall^{\mathrm{st}} b \in B\ \varphi(x, y, b))$ (использована теорема 2.8). Теперь ключевой момент. Если множество X стандартно и конечно, то индукцией по числу элементов X, опираясь на теорему 2.6, нетрудно доказать, что

$$\forall x \in X\ \exists y\ \psi(x, y) \to \exists \tilde{y}\ \forall x \in X\ \psi(x, \tilde{y}(x))$$

для любой st-$\in$-формулы ψ. Таким образом, мы имеем

$$\forall^{\mathrm{stfin}} X\ \exists \tilde{y}\ \forall x \in X\ [\forall^{\mathrm{st}} b \in B\ \varphi(x, \tilde{y}(x), b))].$$

Применяя BI к Π_1^{st}-формуле [...] (теорема 2.10), находим

$$\exists \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x\ \forall^{\mathrm{st}} b \in B\ \varphi(x, \tilde{y}(x), b),$$

т. е. правую часть искомой импликации.

Теперь результат для Σ_2^{st}-формул и гипотезы

$$\mathrm{Chc}_4\colon \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists y\ \Phi(x, y) \to \exists \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \Phi(x, \tilde{y}(x)),$$

где $\Phi(x, y)$ есть формула $\exists^{\mathrm{st}} a \in A\ \varphi(x, y, a)$, X и A стандартны, а φ есть ext-ограниченная Π_1^{st}-формула (или Π_1^{st}-формула общего вида в варианте full I). Поменяв местами кванторы по a и y в левой части Chc_4, получаем при помощи теоремы 2.3 стандартную функцию $\tilde{a}\colon X \to A$, позволяющую преобразовать левую часть к виду

$$\forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists y\ \varphi(x, y, \tilde{a}(x)).$$

По уже доказанному для Chc_5 и Π_1^{st}-формул, имеем $\forall^{\mathrm{st}} x \in X \varphi(x, \tilde{y}(x), \tilde{a}(x))$ для подходящей функции $\tilde{y}$. Однако $\tilde{a}(x)$ стандартного для любого стандартного x из-за стандартности $\tilde{a}$. Это и дает правую часть Chc_4. □

§ 3. Теорема ограничения внешних кванторов

Теорема, о которой идет речь, играет ключевую роль в доказательствах ряда теорем, сформулированных во Введении, давая возможность в определенных ситуациях ограничивать внешние кванторы стандартными множествами и, следовательно, превращать ext-предваренные формулы в ext-ограниченные, а затем в Σ_2^{st}-формулы по теореме 2.4. Это позволит значительно расширить область действия теорем 2.11, 2.12.

Сначала несколько определений. Положим

$$\mathcal{P}^n(X) = \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\ldots \mathcal{P}(X) \ldots))) \ (n \text{ раз } \mathcal{P});\ \mathcal{P}(X) = \{Y\colon Y \subseteq X\}.$$

Если $\theta = \operatorname{card} X$ (мощность X), то пусть $\exp^n \theta$ — мощность множества $\mathscr{P}^n(X)$. В частности, $\exp^0\theta = \theta$ и $\exp^1\theta = 2^\theta$.

Напомним, что *ограниченными* называются (в **IST**) множества, являющиеся элементами стандартных. *Порядком* ограниченного множества x назовем наименьший (стандартный) кардинал θ, такой, что x принадлежит некоторому стандартному множеству мощности θ.

3.1. Теорема [**BIST**]. *Пусть* $\varphi(x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n)$ — *внутренняя формула со свободными переменными* $x_1, \ldots, x_m, z_1, \ldots, z_n$ *и любыми ограниченными параметрами, а* $Q_1, \ldots, Q_n$ — *строка кванторов* $\exists, \forall$ *Тогда для любого стандартного* X *найдутся стандартные множества* $Z_0, \ldots, Z_n$, *обладающие тем свойством, что для любого* k, $0 \leqslant k < n$, *любого набора стандартных* $z_1 \in Z_1, \ldots, z_k \in Z_k$ *и любого набора (не обязательно стандартных)* $x_1, \ldots, x_m \in X$ *будет*

$$Q^{\mathrm{st}}_{k+1}z_{k+1} \ldots Q^{\mathrm{st}}_n z_n \varphi(z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_m) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow Q^{\mathrm{st}}_{k+1}z_{k+1} \in Z_{k+1} \ldots Q^{\mathrm{st}}_n z_n \in Z_n \varphi(z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \ldots, z_n, x_1, \ldots, x_m).$$

Если дополнительно задан стандартный бесконечный кардинал θ *и известно, что* $\operatorname{card} X \leqslant \theta$ *и каждый параметр* φ — *либо стандартное множество, либо ограниченное порядка* $\leqslant \theta$, *то можно дополнительно потребовать, чтобы все* Z_i *имели мощность не выше* $\lambda = \exp^n\theta$.

Доказательство. Условимся писать $\mathbf{x}$ вместо $x_1, \ldots, x_m$; таким образом, $\mathbf{x} \in X^m$. Пусть $\theta = \operatorname{card} X$. Можно предполагать, что формула φ вовсе не содержит нестандартных параметров, ибо если это не так, то заменим каждый нестандартный (а тогда ограниченный порядка $\leqslant \theta$) параметр свободной переменной, присоединим эти новые переменные к списку $\mathbf{x}$, а вновь возникшие стандартные множества мощности $\leqslant \theta$ — к X.

В этом предположении, приступая к построению множеств Z_k мощности $\leqslant \lambda$, сначала индукцией по $k = n, n-1, \ldots, 2, 1$ каждому набору значений $z_1, \ldots, z_k$ сопоставим множество $Y[z_1, \ldots, z_k]$ следующим образом:

$$Y[z_1, \ldots, z_k] = \{\mathbf{x} \in X^m\colon \varphi(z_1, \ldots, z_k, \mathbf{x})\} \text{ при } k = n;$$
$$Y[z_1, \ldots, z_k] = \{Y[z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}]\colon z_{k+1} \text{ любое}\} \text{ при } k < n$$

(определение корректно, ибо $Y[z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}] \in \mathscr{P}^{n-k}(X^m)$, каково бы ни было z_{k+1}). Естественно, при $k = 0$ полагаем

$$Y[\ ] = \{Y[z_1]\colon z_1 \text{ любое}\}.$$

Утверждение 1. *Имеется набор стандартных множеств* $Z_1, \ldots, Z_n$, *каждое мощности* $\leqslant \lambda$, *для которого выполнено следующее*:

(5) *для любого* k, $0 \leqslant k < n$, *и любых* $z_1 \in Z_1, \ldots, z_k \in Z_k$

$$\forall z'_{k+1}\ \exists z_{k+1} \in Z_{k+1}\ (Y[z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}] = Y[z_1, \ldots, z_k, z'_{k+1}]).$$

Построение множеств Z_k производится индукцией по k.

Построение Z_1. Понятно, что $Y[\ ]$ имеет мощность $\leqslant \lambda$ (поскольку $Y[\ ] \subseteq \mathscr{P}^n(X^m)$). Для $Y \in Y[\ ]$ через α_Y обозначим наименьший ординал α, такой, что $Y = Y[z_1]$ для некоторого $z_1 \in \mathbf{V}_\alpha$. Подстановка **ZFC** дает функцию $\tilde{\alpha}\colon Y[\ ] \to \mathrm{Ord}$, такую, что $\alpha_Y = \tilde{\alpha}(Y)$ для любого $Y \in Y[\ ]$. А аксиома выбора **ZFC** гарантирует существование функции $\zeta\colon Y[\ ] \to \mathbf{V}$, такой, что $\zeta(Y) \in \mathbf{V}_{\tilde{\alpha}(Y)}$ и $Y = Y[\zeta(Y)]$ для всех $Y \in Y[\ ]$. Остается взять $Z_1 = \{\zeta(Y)\colon Y \in Y[\ ]\}$.

Построение Z_{k+1} (при условии, что множества Z_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, все мощности $\leqslant \lambda$, уже построены). Множество

$$W = \{\langle z_1, \ldots, z_k, Y[z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}]\rangle : z_1 \in Z_1 \& \ldots \& z_k \in Z_k \& z_{k+1} \text{ любое}\}$$

включено в $Z_1 \times \ldots \times Z_k \times \mathcal{P}^{n-k}(X^m)$ и имеет, следовательно, мощность $\leqslant \lambda$. Как и выше, существует функция ζ: $W \to \mathbf{V}$, такая, что

$$Y[z_1, \ldots, z_k, \zeta(z_1, \ldots, z_k, Y)] = Y$$

при любом выборе $Y \in Y[z_1, \ldots, z_k]$ и $z_i \in Z_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Теперь положим $Z_{k+1} = \{\zeta(z_1, \ldots, z_k, Y) : \langle z_1, \ldots, z_k, Y\rangle \in W\}$.

Легко проверить, что требование (5) выполнено при таком построении, однако как можно обеспечить стандартность множеств Z_k? Дело в том, что условие (5) можно выразить внутренней формулой со стандартными параметрами, ибо такова же (см. предположение в начале доказательства) формула φ — основа построения. Следовательно, по переносу, если существуют множества Z_k мощности $\leqslant \lambda$ каждое, обеспечивающие (5), то они могут быть взяты стандартными. Этим доказательство утверждения 1 закончено.

По той же причине, связанной с переносом, мы вправе придать (при стандартных Z_k) требованию (5) следующий вид:

(5^{st}) *для любого* k, $0 \leqslant k < n$, *если все множества* $z_1 \in Z_1, \ldots, z_k \in Z_k$ *стандартны, то*

$$\forall^{st} z'_{k+1} \exists^{st} z_{k+1} \in Z_{k+1} (Y[z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}] = Y[z_1, \ldots, z_k, z'_{k+1}]).$$

Непосредственно приступая к доказательству эквивалентности теоремы 3.1 для построенных множеств Z_k, обозначим левую и правую части этой эквивалентности соответственно через

$$\mathcal{L}_k(z_1, \ldots, z_k, \mathbf{x}) \quad \text{и} \quad \mathcal{R}_k(z_1, \ldots, z_k, \mathbf{x})$$

и рассмотрим вспомогательную формулу

$$\mathrm{Q}^{st}_{k+1} Y_{k+1} \in Y_k \mathrm{Q}^{st}_{k+2} Y_{k+2} \in Y_{k+1} \ldots \mathrm{Q}^{st}_n Y_n \in Y_{n-1} (\mathbf{x} \in Y_n),$$

которую обозначим через $\Psi_k(Y_k, \mathbf{x})$.

Утверждение 2. *Если все* $z_i \in Z_i$ *стандартны и* $\mathbf{x} \in X^m$, *то*

$$\mathcal{L}_k(z_1, \ldots, z_k, \mathbf{x}) \leftrightarrow \mathcal{R}_k(z_1, \ldots, z_k, \mathbf{x}) \leftrightarrow \Psi_n(Y[z_1, \ldots, z_n], \mathbf{x}).$$

Доказательство производится индукцией по k (от k к 1).

Начало индукции: $k = n$. Здесь все ясно, ибо кванторов нет и

$$\mathcal{L}_n(z_1, \ldots, z_n, \mathbf{x}) \leftrightarrow \mathcal{R}_n(z_1, \ldots, z_n, \mathbf{x}) \leftrightarrow \varphi(z_1, \ldots, z_n, \mathbf{x}) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \mathbf{x} \in Y[z_1, \ldots, z_n] \leftrightarrow \Psi_n(Y[z_1, \ldots, z_n], \mathbf{x}).$$

Переход от значения $k+1$ к значению k; $1 \leqslant k < n$. Предположим, что Q^{st}_{k+1} есть $\exists^{st}$ и обозначим $Y_k = Y[z_1, \ldots, z_k]$.

Импликация $\mathcal{L}_k \to \Psi_k$. Пусть стандартное z_{k+1} таково, что выполнено $\mathcal{L}_{k+1}(z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \mathbf{x})$. Тогда по индуктивному предположению для множества $Y_{k+1} = Y[z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}]$ выполнено $\Psi_{k+1}(Y_{k+1}, \mathbf{x})$. Однако $Y_{k+1} \in Y_k$ и Y_{k+1} стандартно, ибо $z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}$ стандартны. Следовательно, справедливо $\Psi_k(Y_k, \mathbf{x})$.

Импликация $\Psi_k \to \mathcal{R}_k$. Пусть $\Psi_{k+1}(Y_{k+1}, \mathbf{x})$ имеет место для некоторого стандартного $Y_{k+1} \in Y_k$. По определению Y_k и благодаря переносу **T** найдется *стандартное* значение z_{k+1}, такое, что $Y_{k+1} = Y[z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}]$. Более того, такое стандартное z_{k+1} можно выбрать среди элементов Z_{k+1} в соответствии с (5^{st}). По индуктивному предположению имеем $\mathscr{R}_{k+1}(z_1, \ldots, z_k, z_{k+1}, \mathrm{x})$. Тогда выполнено и $\mathscr{R}_k(z_1, \ldots, z_k, \mathrm{x})$, поскольку $z_{k+1} \in Z_{k+1}$.

Импликация $\mathscr{R}_k \to \mathscr{L}_k$ очевидна.

Случай, когда Q^{st}_{k+1} есть $\forall^{st}$, рассматривается при помощи «обхода» в обратном направлении.

Этим доказательство теоремы 3.1 закончено. $\square$

3.2. Следствие **[BIST]**. *Пусть X — стандартное множество, $\Phi(x, y)$ является* ext-*предваренной формулой с ограниченными параметрами. Найдется стандартное множество Y, такое, что*

$$\forall x \in X \ [\exists^{st} y\, \Phi(x, y) \to \exists^{st} y \in Y\, \Phi(x, y)].$$

Если дополнительно известно, что Φ имеет не более чем $n - 1$ внешних кванторов, card $X \leqslant \theta$, θ *— стандартный кардинал и каждый параметр Φ — стандартное множество либо ограниченное порядка $\leqslant \theta$, то дополнительно можно потребовать, чтобы* card $Y \leqslant \lambda = \exp^n \theta$.

Доказательство. Итак, пусть Φ имеет вид

$$\mathrm{Q}_2^{st} z_2 \mathrm{Q}_3^{st} z_3 \ldots \mathrm{Q}_n^{st} z_n \ \varphi(y, z_1, z_2, \ldots, z_n, x),$$

где φ — внутренняя, а каждый Q_i^{st} есть $\exists^{st}$ или $\forall^{st}$. Обозначив переменную y через z_1 и полагая $\mathrm{Q}_1^{st} = \exists^{st}$, применим теорему для $k = 0$ (ограничивая все кванторы), а затем, в обратном направлении, для $k = 1$ (снимая ограничения со всех кванторов кроме Q_1^{st}). В результате получится искомое множество $Y = Z_1$. $\square$

3.3. Доказательство теоремы 6. (а) Результат для $\mathbf{Coll}_2$ (st Φ) немедленно дается следствием 3.2. Отсюда следует $\mathbf{Coll}_1$, коль скоро теорема 6 разрешает ядерные формулы лишь со стандартными параметрами. Далее, используя теорему 2.7, имеем $\mathbf{Chc}_1$ и $\mathbf{Repl}_1$, а следовательно, $\mathbf{Chc}_2$ и $\mathbf{Repl}_2$. Наконец, $\mathbf{Repl}_3$ и $\mathbf{Repl}_4$ следуют из $\mathbf{Repl}_5$, а $\mathbf{BRepl}_4$ — из $\mathbf{BChc}_4$. Таким образом, остается проверить $\mathbf{Uniq}$, $\mathbf{Repl}_5$ и $\mathbf{BChc}_4$.

Для доказательства теоремы единственности $\mathbf{Uniq}$, пусть $\Phi(x)$ — ext-предваренная формула со стандартными параметрами, причем имеется единственное x, удовлетворяющее $\Phi(x)$; требуется доказать стандартность этого x. Согласно теореме 9 (которая будет доказана в § 8, но, разумеется, без ссылок на теорему 6), x — ограниченное множество, т. е. $x \in X$ для подходящего стандартного X. Теорема 3.1 позволяет ограничить все кванторы Φ стандартными множествами. Следовательно, согласно теореме 2.4, можно предположить, что Φ является Σ_2^{st}-формулой. Теперь результат дается теоремой 2.11.

Далее, для ext-предваренной Φ со стандартными параметрами проверяем выполнение гипотезы

$$\mathbf{Repl}_5\colon \ \forall^{st} x \ \exists! y \ \Phi(x, y) \to \exists \tilde{y} \ \forall^{st} x \ \Phi(x, \tilde{y}(x)).$$

Из уже доказанного $\mathbf{Uniq}$ следует, что для стандартного x единственное y, удовлетворяющее $\Phi(x, y)$, само стандартно. Следовательно, левая часть $\mathbf{Repl}_5$ дает $\forall^{st} x \ \exists!^{st} y \ \Phi(x, y)$. Обозначим через Ψ (внутреннюю) формулу, полученную из Φ удалением надписи st из всех кванторов, где она есть. Тогда $\Phi(x, y) \leftrightarrow \Psi(x, y)$ для всех стандартных x, y по переносу и из-за ext-предваренности Φ. Теперь мы выводим последовательно из левой части $\mathbf{Repl}_5$:

$$(6) \qquad \forall^{st} x \ \exists!^{st} y \ \Psi(x, y); \ \forall^{st} x \ \exists! y \ \Psi(x, y); \ \forall x \ \exists! y \ \Psi(x, y).$$

Следовательно, взяв множество H, такое, что $\mathbb{S} \subseteq H$ (теорема 2.9), мы можем гарантировать существование определенной на H функции $\tilde{y}$, для которой будет выполнено $\Psi(x, \tilde{y}(x))$ при любом стандартном x. Сравнивая второе и третье утверждения из (6), можно заключить, что $\tilde{y}(x)$ стандартно для каждого стандартного x, а потому можно вернуться обратно к Φ и получить правую часть $\mathbf{Repl}_5$.

Наконец, рассмотрим

$$\mathbf{BChc}_4\colon\ (\mathrm{st}\, X,\ Y)\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists y \in Y\ \Phi(x,\ y) \to \\ \to \exists \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ [\Phi(x,\ \tilde{y}(x))\ \&\ \tilde{y}(x) \in Y].$$

Здесь Φ — ext-предваренная формула со стандартными параметрами. Поэтому, применяя теоремы 3.1 и 2.4 (с учетом того, что области изменения переменных x и y ограничены стандартными множествами), мы можем преобразовать Φ к Σ_2^{st}-виду, а затем воспользоваться 2.12.

(б) Требуется доказать, что выполняется

$$\mathbf{Chc}_4\colon\ (\mathrm{st}\, X)\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists y\ \Phi(x,\ y) \to \exists \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \Phi(x, \tilde{y}(x)),$$

где Φ есть формула $\exists^{\mathrm{st}} a\ \forall^{\mathrm{st}} b\ \varphi(x,\ y,\ a,\ b)$, φ внутренняя со стандартными параметрами. Меняя местами переменные y и a в левой части и используя идеализацию, мы преобразуем левую часть к виду

$$\forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists^{\mathrm{st}} a\ [\forall^{\mathrm{stfin}} B\ \exists y\ \forall b \in B\ \varphi(x,\ y,\ a,\ b)].$$

Однако в квадратных скобках стоит ext-предваренная формула. В этой ситуации следствие 3.2 приносит стандартное множество A, такое, что

$$\forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists^{\mathrm{st}} a \in A\ [\forall^{\mathrm{stfin}} B\ \exists y\ \forall b \in B\ \varphi(x,\ y,\ a,\ b)].$$

Следовательно, $\forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists y\ \exists^{\mathrm{st}} a \in A\ \forall^{\mathrm{st}} b\ \varphi(x,\ y,\ a,\ b)$. Это означает, что переменная a «поймана» в стандартное множество A. Ссылка на теорему 2.12 (full **I**) завершает доказательство.

(в) Эта часть теоремы 6 уже доказана (теорема 2.12). □

§ 4. Непротиворечивость гипотез

Этот параграф содержит доказательство теорем 1А и 1Б из § 1. Мы опираемся на следующую теорему, которая приносит внутренние модели **IST** с требуемыми свойствами.

4.1. Т е о р е м а [**IST**]. *Пусть $\varkappa$ — стандартный бесконечный кардинал, такой, что $\mathbf{V}_\varkappa$ является моделью* **ZFC**. *Тогда $\mathbf{V}_\varkappa$ — модель* **IST**, *где выполнены гипотезы*

$$\mathbf{Sep}_3,\ \mathbf{Repl}_{2,3,4,5},\ \mathbf{Chc}_{2,3,4,5},\ \mathbf{BRepl}_4,\ \mathbf{BChc}_4,\ \mathbf{Uniq}.$$

Если дополнительно известно, что $\varkappa$ — строго недостижимый кардинал, то $\mathbf{Repl}_1$, $\mathbf{Chc}_1$, $\mathbf{Coll}_1$, $\mathbf{Coll}_2$ $(\mathrm{st}\,\Phi)$ *также справедливы в* $\mathbf{V}_\varkappa$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим $V = \mathbf{V}_\varkappa$. Формулу Φ назовем *V-ограниченной*, если все кванторы Φ (внешние и внутренние) ограничены множеством V. Понятно, что любая такая формула автоматически будет ext-ограниченной, что позволяет воспользоваться результатами 2.11 и 2.12 через посредство теоремы 2.4. С другой стороны, любой факт, касающийся истинности внутри V, выражается V-ограниченной формулой. На этом и основано доказательство теоремы.

Для проверки переноса в V, т. е. импликации

$$\exists x \in V\ \Phi(x) \to \exists^{\mathrm{st}} x \in V\ \Phi(x)$$

для внутренней V-ограниченной формулы Φ со стандартными параметрами (естественно, нас интересуют здесь только параметры из V, однако результат сохраняет силу для любых стандартных параметров) достаточно воспользоваться переносом **IST** применительно к формуле $\Phi(x) \,\&\, x \in V$.

Точно таким же образом производится вывод **S** и **I** в V, и мы опускаем эти простые рассуждения.

Что же касается дополнительных гипотез, то достаточно будет ограничиться выводом **Uniq**, $\mathbf{Chc}_5$, $\mathbf{Chc}_1$, $\mathbf{Coll}_2$ (st Φ) в V; остальные следуют из этих четырех (в частности, благодаря теореме 2.7).

1. **Uniq**. Для произвольной V-ограниченной формулы Φ со стандартными параметрами требуется доказать такое соотношение:

$$\exists! x \in V\, \Phi(x) \to \forall x \in V\, [\Phi(x) \to \mathrm{st}\, x].$$

Формула Φ автоматически является ext-ограниченной со стандартными параметрами, и поэтому, благодаря теореме 2.4, можно считать, что Φ есть Σ_2^{st}-формула. Далее используем теорему 2.11.

2. Доказывается следующее:

$$\mathbf{Chc}_5\colon\ \forall^{\mathrm{st}} x \in V\ \exists y \in V\, \Phi(x, y) \to \exists \tilde{y} \in V\ \forall^{\mathrm{st}} x \in V\, \Phi(x, \tilde{y}(x)),$$

где Φ — произвольная V-ограниченная st-$\in$-формула. Снова согласно теоремам 2.4 и 2.12 найдется функция $\tilde{y}$, для которой выполнено

$$\forall^{\mathrm{st}} x \in V\, [\tilde{y}(x) \in V \,\&\, \Phi(x, \tilde{y}(x))]. \tag{7}$$

Однако требуется еще, чтобы было $\tilde{y} \in V$. Чтобы обеспечить это дополнительное условие, пусть H — конечное множество, содержащее все стандартные элементы V (теорема 2.9). Положим

$$D = H \cap V \cap \mathrm{dom}\, \tilde{y};\quad E = \{x \in D\colon\ \tilde{y}(x) \in V\};\quad \tilde{f} = \tilde{y} \restriction E.$$

Понятно, что $\tilde{f}$ — функция с конечной областью определения $E \subseteq V$ и значениями из V, т. е. $\tilde{f} \in V$. А свойство (7) переходит с $\tilde{y}$ на f.

3. Предполагая строгую недостижимость $\varkappa$, докажем в V

$$\mathbf{Chc}_1\colon\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists^{\mathrm{st}} y \in V\, \Phi(x, y) \to \exists^{\mathrm{st}} \tilde{y} \in V\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\, \Phi(x, \tilde{y}(x)),$$

где $X \in V$ стандартно, а Φ — произвольная st-$\in$-формула. Найдется функция $\tilde{y}\colon X \to V$, такая, что $\forall^{\mathrm{st}} x \in X\, \Phi(x, \tilde{y}(x))$ (по теореме 2.3). Но $\tilde{y} \in V$ из-за строгой недостижимости $\varkappa$.

4. Докажем $\mathbf{Coll}_2$ (st Φ) в V для V-ограниченной st-$\in$-формулы $\Phi(x, y)$ со стандартными параметрами, снова предполагая недостижимость $\varkappa$. Пусть $X \in V$ стандартно. По теореме 2.4, найдется Σ_2^{st}-формула $\Psi(x, y)$ со стандартными параметрами, эквивалентным формуле $\Phi(x, y) \,\&\, y \in V$. Следствие 3.2 приносит стандартное множество $Y \subseteq V$ мощности $\leqslant \exp^3 \theta$, где θ — мощность X (очевидно, $\theta < \varkappa$) и

$$\forall x \in X\quad [\exists^{\mathrm{st}} y \in V\, \Phi(x, y) \to \exists^{\mathrm{st}} y \in Y \cap V\, \Phi(x, y)].$$

Однако $\exp^3 \theta < \varkappa$ благодаря недостижимости $\varkappa$, откуда $Y \in V$.

Этим доказательство теорем 4.1 и 1А закончено. $\square$

4.2. Доказательство непротиворечивости гипотез. Доказанная теорема немедленно дает теорему 1А, поскольку теории **ZFC** и **IST** остаются равнонепротиворечивыми после добавления гипотезы существования строго недостижимого кардинала.

Что касается теоремы 1Б, то для нее ситуация несколько сложнее, так как гипотеза существования кардинала $\varkappa$, такого, что $\mathrm{V}_\varkappa$ — модель **ZFC**, выходит за рамки **ZFC** и **IST** (в частности, она много сильнее, чем Cons **ZFC**). Рассмотрим, однако, теорию $\mathbf{IST}_\varkappa$, полученную присоединением к языку **IST** дополнительной константы $\varkappa$, а к аксиоматике **IST** — аксиомы «$\varkappa$ — стандартный кардинал» и набора аксиом вида «**A** истинно в $\mathbf{V}_\varkappa$», где **A** — аксиома **ZFC**. Нетрудно проверить, что теория $\mathbf{IST}_\varkappa$ равнонепротиворечива **IST** (и является консервативным расширением последней), и в то же время достаточно сильна, чтобы доказать в ней, что любая наперед заданная аксиома **IST** или гипотеза из числа выделенных в формулировке теоремы 4.1 в отдельную строку истинна в $\mathbf{V}_\varkappa$. Это доказательство (в $\mathbf{IST}_\varkappa$) практически повторяет доказательство теоремы 4.1, и мы его опустим. $\square$

§ 5. Теория ограниченных множеств

Этот параграф содержит доказательство теорем 11, 12, 13 из Введения, связанных с теорией внутренних множеств **BST**. Напомним, что в нее входят все аксиомы **ZFC**, а также перенос **T**, стандартизация **S**, идеализация в ослабленной форме

$$\mathbf{BI}\colon\ (\mathrm{st}\,A_0,\ \mathrm{int}\,\Phi)\ \forall^{\mathrm{stfin}} A \subseteq A_0\ \ \exists x\ \forall a \in A\ \ \Phi(x, a) \leftrightarrow \exists x\ \forall^{\mathrm{st}} a \in A_0\ \ \Phi(x, a)$$

(A_0 стандартно, Φ — внутренняя формула), и аксиома ограниченности **B**: $\forall x\ \exists^{\mathrm{st}} X\ (x \in X)$. Напомним также, что *ограниченными* называются множества, являющиеся элементами стандартных множеств. Обозначим через $\mathbb{B}$ класс ограниченных множеств, а через bd формулу ограниченности; таким образом, $x \in \mathbb{B} \leftrightarrow \mathrm{bd}\, x \leftrightarrow \exists^{\mathrm{st}} X\ (x \in X)$.

Понятно, что все стандартные множества являются ограниченными (ибо если x стандартно, то и $\{x\}$ также стандартно). Итак, $\mathbb{S} \subseteq \mathbb{B} \subseteq \mathbf{V}$. Оба включения здесь — строгие в **IST**. Действительно, во-первых, любое нестандартное натуральное число принадлежит $\mathbb{B}$, но не $\mathbb{S}$, а, во-вторых, даваемое теоремой 2.9 множество H такое, что $\mathbb{S} \subseteq H$, не является ограниченным.

Иногда бывает полезно использовать тот факт, что ограниченные множества — это подмножества стандартных и только они, поскольку

$$x \in X \leftrightarrow x \subseteq \bigcup X \quad \text{и} \quad x \subseteq Y \leftrightarrow x \in \mathscr{P}(Y),$$

где множества $\bigcup X$ и $\mathscr{P}(Y)$ стандартны вместе с X и Y.

Итак, теория **BST** содержит дополнительную по сравнению с **IST** аксиому, постулирующую ограниченность каждого множества, а потому несовместную с аксиомами **IST** — конкретно, с идеализацией **I**, из-за чего последняя и ослаблена в **BST** до **BI**. Это ослабление не сказывается, однако, на возможностях теории в роли аксиоматического базиса исследований конкретных математических структур, ибо область любой такой структуры (если не говорить о структурах типа универсума всех множеств) всегда ограничена некоторым стандартным (стандартность в этой ситуации следует из переноса) множеством — и поэтому любое применение идеализации в приложениях может быть редуцировано к виду **BI**. (Кроме, конечно, «патологических» примеров типа даваемых теоремой 2.9.) Таким образом, теории **BST** и **IST** в целом вполне равносильны в этом «прикладном» качестве, однако вторая, как мы увидим, значительно более удобна в работе с фундаментальными теоретико-множественными задачами.

Чтобы закончить это отступление, отметим, что аксиома ограниченности иногда фактически фигурирует как определение при построении нестандартных суперструктур, когда внутренние множества определяются как раз как элементы стандартных, см. [28].

5.1. Доказательство теоремы 11. Для любой st-$\in$-формулы φ, через φ^{bd} обозначим формулу, полученную из φ заменой каждого внутреннего (в смысле 1.1) квантора $\exists$ или $\forall$ на $\exists^{\mathrm{bd}}$ или $\forall^{\mathrm{bd}}$ соответственно с очевидным пониманием этих новых кванторов, аналогичным пониманию $\exists^{\mathrm{st}}$ или $\forall^{\mathrm{st}}$. Понятно, что истинность в $\mathbb{B}$ формулы φ с параметрами из $\mathbb{B}$ равносильна истинности φ^{bd} в универсуме всех (внутренних) множеств.

Таким образом, утверждается следующее: если **A** — аксиома **BST**, то $\mathbf{A}^{\mathrm{bd}}$ является теоремой **IST**. Это строгая синтаксическая формулировка теоремы 11.

Рассмотрение аксиом **BST** начнем с переноса. Требуется доказать $\exists^{\mathrm{bd}}x\Phi^{\mathrm{bd}}(x) \to \exists^{\mathrm{st}}x\Phi^{\mathrm{bd}}(x)$ для любой внутренней Φ со стандартными параметрами. Разумеется, здесь нельзя сразу апеллировать к переносу **IST**, ибо Φ^{bd} — не внутренняя формула. Однако справедлива

5.2. Лемма. *$\Psi \leftrightarrow \Psi^{\mathrm{bd}}$ для любой внутренней формулы Ψ со стандартными параметрами.*

Доказательство. Как обычно в подобных случаях, доказательство проводится индукцией по построению Ψ из элементарных формул (для которых лемма очевидна), причем достаточно рассмотреть шаг $\exists$ и доказать $\exists z\psi(z) \to \exists^{\mathrm{bd}}z\psi(z)$ для произвольной внутренней формулы ψ со ограниченными параметрами.

Можно считать, что ψ содержит лишь одно ограниченное множество p_0, в качестве параметра; пусть стандартное P таково, что $p_0 \in P$. Искомая импликация принимает вид

$$\exists z\psi(z, p_0) \to \exists^{\mathrm{bd}}z\psi(z, p_0),$$

где $\psi(z, p)$ — внутренняя беспараметрическая формула со свободными переменными z и p.

Согласно теореме собирания **ZFC** (см. 1.7), найдется множество Z, обладающее тем свойством, что

$$\forall p \in P\,[\exists z\psi(z, p) \to \exists z \in Z\psi(z, p)],$$

причем благодаря переносу **IST** множество Z может быть выбрано стандартным. Полагая $z = z_0$, получаем искомый результат. $\square$

Доказанная лемма позволяет автоматически вывести перенос в $\mathbb{B}$ из переноса **IST**. Этим проверка переноса в $\mathbb{B}$ закончена. Одновременно мы заключаем, что в $\mathbb{B}$ выполнена любая аксиома **ZFC** (возьмем аксиому в качестве Ψ в лемме). Стандартизация в $\mathbb{B}$ обеспечивается стандартизацией в $\mathbb{V}$, а аксиома ограниченности очевидна. Остается проверить идеализацию в форме

$$\mathbf{BI}\colon\ \forall^{\mathrm{stfin}}A \subseteq A_0\ \exists^{\mathrm{bd}}x\ \forall a \in A\ \Phi(x, a) \leftrightarrow \exists^{\mathrm{bd}}x\ \forall^{\mathrm{st}}a \in A_0\ \Phi(x, a),$$

где A_0 стандартно, а Φ — внутренняя формула с ограниченными параметрами; знак релятивизации bd убран от Φ в соответствии с леммой.

«Варьируя», аналогично доказательству леммы, ограниченные параметры формулы Φ в тех стандартных множествах, которым они принадлежат, а также произвольное $A \subseteq A_0$, можно доказать существование стандартного множества X, такого, что

$$\forall A \subseteq A_0\ [\exists x\ \forall a \in A\ \Phi(x, a) \to \exists x \in X\ \forall a \in A\ \Phi(x, a)].$$

Одновременно можно потребовать, чтобы если правая часть **BI** выполнена, то X содержит элемент x, удовлетворяющий $\forall^{\mathrm{st}}a \in A_0\ \Phi(x, a)$.

Теперь используется следующая эквивалентность:

$$\forall^{\mathrm{stfin}} A \subseteq A_0\ \exists x \in X\ \forall a \in A\ \Phi(x, a) \leftrightarrow \exists x \in X\ \forall^{\mathrm{st}} a \in A_0\ \Phi^{\neg}_{*}(x, a)$$

(т. е. **I** для формулы $a \in A_0 \to \Phi(x, a) \,\&\, x \in X$). Ясно, что ее левая часть эквивалентна левой части **BI**, равно как и правая часть эквивалентна правой части **BI** по выбору X. $\square$

Выяснив отчасти взаимоотношения теорий **IST** и **BST**, перейдем к доказательству теорем 12 и 13 из § 1.

5.3. Доказательство теоремы 13. Таким образом, имея st-$\in$-формулу $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ без параметров и со свободными переменными $x_1, x_2, \ldots, x_n$, требуется построить также беспараметрическую Σ_2^{st}-формулу $\Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, такую, что

$$\forall x_1\ \forall x_2 \ldots \forall x_n\ [\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leftrightarrow \Psi(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$$

(доказуемо в **BST**). Доказательство производится индукцией по построению Φ из элементарных формул. Как и выше при доказательстве теоремы 2.4, можно ограничиться рассмотрением индуктивных шагов $\neg$ и $\exists$. Условимся писать $\mathbf{x}$ вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Индуктивный шаг $\neg$. Требуется построить Σ_2^{st}-формулу $\Psi(\mathbf{x})$, эквивалентную в **BST** формуле $\forall^{\mathrm{st}} a\ \exists^{\mathrm{st}} b\ \varphi(\mathbf{x}, a, b)$ с внутренней φ, которая взята в качестве $\Phi(\mathbf{x})$. Если X — стандартное множество, то по теореме 3.1 существует пара стандартных множеств A, B, таких, что

$$(8)\qquad \forall \mathbf{x} \in X^n\ [\Phi(\mathbf{x}) \leftrightarrow \forall^{\mathrm{st}} a \in A\ \exists^{\mathrm{st}} b \in B\ \varphi(\mathbf{x}, a, b)].$$

Более того, доказательство теоремы 3.1 обеспечивает внутреннюю формулу $\chi(X, A, B)$ — она выражает требование (5) из § 3 и в данном случае не имеет параметров, ибо φ не имеет параметров — для которой выполнены следующие два соотношения:

а) $\forall^{\mathrm{st}} X\ \exists^{\mathrm{st}} A\ \exists^{\mathrm{st}} B\ \chi(X, A, B)$ и

б) $\forall^{\mathrm{st}} X\ \forall^{\mathrm{st}} A\ \forall^{\mathrm{st}} B\ [\chi(X, A, B) \to$ справедливо (8)].

По аксиоме **B** для любого кортежа $\mathbf{x}$ (из n элементов) найдется стандартное X, такое, что $\mathbf{x} \in X^n$. Следовательно,

$$\Phi(\mathbf{x}) \leftrightarrow \exists^{\mathrm{st}} X\ \exists^{\mathrm{st}} A\ \exists^{\mathrm{st}} B\ [\mathbf{x} \in X^n \,\&\, \chi(X, A, B) \,\&$$
$$\&\ \forall^{\mathrm{st}} a \in A\ \exists^{\mathrm{st}} b \in B\ \varphi(\mathbf{x}, a, b)].$$

Заменив вторую строку на $\exists^{\mathrm{st}} \tilde{b} \in {}^{A}B\ \forall^{\mathrm{st}} a \in A\ \varphi(\mathbf{x}, a, \tilde{b}(a))$ (на основании теоремы 2.4) и проведя некоторые простые преобразования (в частности, «свертку» четырех переменных X, A, B, $\tilde{b}$ в одну переменную при помощи функции упорядоченной четверки), мы получим искомую формулу Ψ.

Индуктивный шаг $\exists$. Нам необходима Σ_2^{st}-формула, эквивалентная взятой в качестве $\Phi(\mathbf{x})$ формуле $\exists u\ \exists^{\mathrm{st}} a\ \forall^{\mathrm{st}} b\ \varphi(\mathbf{x}, u, a, b)$ с внутренней φ. По аксиоме ограниченности имеем

$$\Phi(\mathbf{x}) \leftrightarrow \exists^{\mathrm{st}} X\ [\mathbf{x} \in X^n \,\&\, \exists u \in X\ \exists^{\mathrm{st}} a \in X\ \forall^{\mathrm{st}} b\ \varphi(\mathbf{x}, u, a, b)].$$

Поэтому аналогично рассмотрениям для шага $\neg$ (ссылка на теорему 3.1), для некоторой внутренней формулы $\chi(X, B)$ будет выполнено

$$\Phi(\mathbf{x}) \leftrightarrow \exists^{\mathrm{st}} X\ \exists^{\mathrm{st}} B\ [\mathbf{x} \in X^n \,\&\, \chi(X, B) \,\&$$
$$\&\ \exists^{\mathrm{st}} a \in X\ \exists u \in X\ \forall^{\mathrm{st}} b \in B\ \varphi(\mathbf{x}, u, a, b)].$$

Остается применить идеализацию **BI** к группе кванторов $\exists u\ \forall^{\mathrm{st}} b$, и мы получим после простых преобразований искомую формулу Ψ. $\square$

Механизм использования доказанной теоремы 13 для исследования других вопросов в **BST** понятен: если мы желаем доказать что-либо для произвольной st-$\in$-формулы, то можно ограничиться рассмотрением только формул типа Σ_2^{st}. Примеры дает следующий пункт.

5.4. Доказательство теоремы 12. Достаточно доказать (в **IST**) гипотезы **Coll**, $\mathbf{Chc}_1$, $\mathbf{Chc}_4$ и **Uniq**; остальные из них следуют.

Uniq. Рассмотрим st-$\in$-формулу $\Phi(x)$ со стандартными параметрами и единственной свободной переменной x. Предполагаем, что $\exists! x \Phi(x)$. По теореме 13 можно считать, что Φ есть Σ_2^{st}-формула. Теперь используем теорему 2.11.

Coll. Для произвольной st-$\in$-формулы $\Phi(x, y)$ со свободными переменными x, y докажем в **BST**, что, каково бы ни было X, найдется множество Y, для которого выполнено

$$\forall x \in X\ [\exists y\ \Phi(x, y) \to \exists y \in Y\ \Phi(x, y)].$$

По аксиоме ограниченности можно считать, что X стандартно.

Через $\Psi(x, z)$ обозначим формулу $\mathrm{st}\, z\ \&\ \exists y \in z\ \Phi(x, y)$. По теореме 13 она эквивалентна некоторой Σ_2^{st}-формуле, все параметры которой автоматически являются внутренними множествами, коль скоро мы рассуждаем в рамках **BST**. Следовательно, согласно 3.2, найдется стандартное Z, такое, что

$$\forall x \in X\ [\exists z\ \Psi(x, z) \to \exists z \in Z\ \Psi(x, z)].$$

Остается определить $Y = \bigcup Z$.

$\mathbf{Chc}_1$. Чтобы доказать эту гипотезу для стандартного X и некоторой st-$\in$-формулы $\Phi(x, y)$, применим **Coll** к формуле $\mathrm{st}\, y\ \&\ \Phi(x, y)$, получая стандартное множество Y, для которого выполнено

$$\forall x \in X\ [\exists^{\mathrm{st}} y\ \Phi(x, y) \to \exists^{\mathrm{st}} y \in Y\ \Phi(x, y)].$$

Теперь результат дается теоремой 2.3.

Наконец, докажем в **BST** гипотезу

$$\mathbf{Chc}_4\colon\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists y\ \Phi(x, y) \to \exists \tilde{y}\ \forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \Phi(x, \tilde{y}(x)),$$

где X — произвольное стандартное множество. Как и выше, можно предполагать, что Φ есть Σ_2^{st}-формула $\exists^{\mathrm{st}} a\ \forall^{\mathrm{st}} b\ \varphi(x, y, a, b)$ с внутренней φ. Согласно уже доказанной **Coll**, найдется стандартное множество Y, такое, что левая часть $\mathbf{Chc}_4$ будет равносильна формуле $\forall^{\mathrm{st}} x \in X\ \exists y \in Y\ \Phi(x, y)$. Теорема 3.1 приносит пару стандартных множеств A, B, таких, что

$$\Phi(x, y) \leftrightarrow \exists^{\mathrm{st}} a \in A\ \forall^{\mathrm{st}} b \in B\ \varphi(x, y, a, b)$$

всякий раз, когда $x \in X$, $y \in Y$. Остается применить теорему 2.12, получая искомую функцию $\tilde{y}$. □

§ 6. Теорема иерархии

Этот короткий параграф содержит доказательство теоремы 10. Мы докажем эту теорему в двух вариантах, первый из которых относится только к случаю стандартных параметров, второй же допускает и нестандартные, хотя дает для них менее сильное утверждение, чем первый. Итак, пусть $\Phi(X)$ есть формула $\exists^{\mathrm{st}} a\ \forall^{\mathrm{st}} b\ (\langle a, b\rangle \in X)$ из формулировки теоремы 10.

6.1. Теорема. *Пусть* $\Psi(X, p_1, \ldots, p_n)$ *является* Π_2^{st}-*формулой без параметров и со свободными переменными* X, $p_1, \ldots, p_n$. *Тогда*:

(а) [IST] $\forall^{st} p_1 \ldots \forall^{st} p_n \neg \forall X\ [\Phi(X) \leftrightarrow \Psi(X, p_1, \ldots, p_n)]$;
(б) [IST + $\mathbf{Repl}_3$] $\forall p_1 \ldots \forall p_n \neg \forall X\ [\Phi(X) \leftrightarrow \Psi(X, p_1, \ldots, p_n)]$.

Учитывая совместность $\mathbf{Repl}_3$ с IST по теореме 1А, утверждением (б) гарантируется, что в IST невозможно вывести

$$\exists p_1 \ldots \exists p_n\ \forall X\ [\Phi(X) \leftrightarrow \Psi(X, p_1, \ldots, p_n)]$$

ни для какой Π_2^{st}-формулы Ψ (если, разумеется, IST непротиворечива). Поэтому из (б) следует, что Φ не является доказуемо эквивалентной в IST никакой Π_2^{st}-формуле с любыми параметрами, в то время как (а) утверждает, что Φ доказуемо неэквивалентна любой Π_2^{st}-формуле со стандартными параметрами. Автору не удалось общее усиление этих двух утверждений,

Отметим, что гипотеза $\mathbf{Repl}_3$ может быть заменена на $\mathbf{Sep}_3$ в формулировке (б), ибо эти две гипотезы, как легко видеть, равносильны в IST.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для простоты предположим, что список переменных $p_1, \ldots, p_n$ содержит лишь одну переменную p; тогда $\Psi(X, p)$ есть $\forall^{st} u\ \exists^{st} v\ \psi(X, u, v, p)$ с внутренней ψ. Фиксируем p и предполагаем, что для всех X выполнено $\Phi(X) \to \Psi(X, p)$, т. е.

$$\forall X\ [\exists^{st} a\ \forall^{st} b\ (\langle a, b\rangle \in X) \to \forall^{st} u\ \exists^{st} v\ \psi(X, u, v, p)].$$

Преобразовав к виду

$$\forall^{st} a\ \forall^{st} u\ \forall X\ \exists^{st} b\ \exists^{st} v\ [\langle a, b\rangle \in X \to \psi(X, u, v, p)]$$

и применив идеализацию, находим

$$\forall^{st} a\ \forall^{st} u\ \exists^{stfin} B\ \exists^{stfin} V\ \forall X\ [\forall b \in B\ (\langle a, b\rangle \in X) \to \to \exists v \in V\ \psi(X, u, v, p)].$$

Это соотношение будет удобно несколько ослабить, взяв $a = u$ и приняв во внимание то, что для любого стандартного B найдется стандартный (по переносу) ординал α, удовлетворяющий $B \subseteq \mathbf{V}_\alpha$:

$$(9)\quad \forall^{st} u\ \exists^{st} \alpha \in \mathrm{Ord}\ \exists^{stfin} V\ \forall X\ [\forall b \in \mathbf{V}_\alpha\ (\langle u, b\rangle \in X) \to \to \exists v \in V\ \psi(X, u, v, p)].$$

Дальнейший ход доказательства требует отдельного рассмотрения случаев стандартного и нестандартного значений параметра p.

6.2. Случай стандартного параметра. Итак, пусть p стандартно. Через $\varphi(u, \alpha, V)$ обозначим формулу

$$\forall X\ [\forall b \in \mathbf{V}_\alpha\ (\langle u, b\rangle \in X) \to \exists v \in V\ \psi(X, u, v, p)].$$

Соотношение (9) принимает вид $\forall^{st} u\ \exists^{st} \alpha \in \mathrm{Ord}\ \exists^{stfin} V\ \varphi(u, \alpha, V)$.

Для любого u через $\alpha(u)$ обозначим наименьший ординал α, такой, что выполнено $\exists^{fin} V\ \varphi(u, \alpha, V)$, если такие α существуют, а иначе просто $\alpha(u) = 0$. Для стандартного u ординал $\alpha(u)$ и множество $B(u) = \mathbf{V}_{\alpha(u)}$ стандартны по теореме 2.1, ибо определение $\alpha(u)$ организовано через внутреннюю формулу. Теперь доказывается

$$(10)\quad \forall^{st} u\ \forall X\ [\forall b \in B(u)\ (\langle u, b\rangle \in X) \to \exists^{st} v\ \psi(X, u, v, p)].$$

Действительно, пусть u стандартно, а множество X' таково, что $\langle u, b\rangle \in X'$ для всех $b \in B(u)$. Однако для ординала $\alpha = \alpha(u)$ по построению и благодаря переносу **T** найдется *стандартное* конечное V, для которого выполнено $\varphi(u, \alpha, V)$, т. е.

$$\forall X\ [\forall b \in B(u)\ (\langle u, b\rangle \in X) \to \exists v \in V\ \psi(X, u, v, p)].$$

Взяв здесь $X = X'$, мы получаем $\exists v \in V\ \psi(X, u, v, p)]$, и далее $\exists^{\mathrm{st}} v$ $\psi(X, u, v, p)]$ согласно 2.8 (все элементы стандартного конечного множества стандартны). Доказательство (10) закончено.

Теперь воспользуемся множеством H, содержащим все стандартные множества (теорема 2.9) и определим

$$X = \{\langle u, b\rangle:\ u \in H \,\&\, b \in B(u)\}.$$

Понятно, что $\langle u, B(u)\rangle \notin X$ для всех стандартных u, а так как $B(u)$ стандартно при стандартных u, то мы имеем $\neg\Phi(X)$.

С другой стороны, если u стандартно, то по определению X будет $\forall b \in B(u)$ $(\langle u, b\rangle \in X)$, откуда $\exists^{\mathrm{st}} v\ \psi(X, u, v, p)$ согласно (10). Это означает, что выполнено $\Psi(X, p)$ (ибо стандартное u здесь может быть любым). Итак, найдено множество X, удовлетворяющее $\Psi(X, p)$, но не удовлетворяющее $\Phi(X)$.

Этим закончено доказательство утверждения (а) теоремы.

6.3. Случай нестандартного параметра. Рассуждения, предложенные для случая стандартного параметра p, здесь не проходят до конца: возможная нестандартность p мешает заключить, что $\alpha(u)$ и $B(u)$ стандартны при стандартном u, и затем обеспечить существование стандартного V с требуемым свойством. Но мы обойдем эту трудность при помощи дополнительного предположения $\mathbf{Repl}_3$.

Возвращаясь к соотношению (9), применим идеализацию в обратном направлении и только к переменной v. Получается следующее:

$$\forall^{\mathrm{st}} u\ \exists^{\mathrm{st}} \alpha\ \forall X\ [\forall b \in \mathrm{V}_\alpha\ (\langle u, b\rangle \in X) \to \exists^{\mathrm{st}} v\ \psi(X, u, v, p)].$$

Выражение справа от $\exists^{\mathrm{st}}\alpha$ обозначим через $\varphi(u, \alpha)$; таким образом, последнее соотношение принимает вид $\exists^{\mathrm{st}} u\ \exists^{\mathrm{st}} \alpha\ \varphi(u, \alpha)$.

Здесь мы хотели бы применить $\mathbf{Repl}_3$, однако этому препятствует отсутствие единственности в кванторе по α. К счастью, теорема трансфинитной индукции 2.5 позволяет получить желаемую единственность для новой формулы $\varphi'(u, \alpha)$, которая говорит, что α есть наименьший стандартный ординал, удовлетворяющий $\varphi(u, \alpha)$, т. е.

$$\varphi(u, \alpha) \,\&\, \mathrm{st}\,\alpha \,\&\, \forall^{\mathrm{st}} \alpha' < \alpha\ \neg\ \varphi(u, \alpha').$$

Итак, мы имеем $\forall^{\mathrm{st}} u\ \exists!^{\mathrm{st}} \alpha \varphi'(u, \alpha)$ и $\varphi'(u, \alpha) \to \varphi(u, \alpha)$ для всех стандартных u, α. Теперь уже можно применить $\mathbf{Repl}_3$, получая функцию F, такую, что при любом стандартном u значение $F(u)$ определено, стандартно и удовлетворяет $\varphi'(u, F(u))$ — а тогда и $\varphi(u, F(u))$ согласно сказанному выше.

Множество $B(u) = \mathrm{V}_{F(u)}$ также стандартно при стандартном u, т. е. мы снова можем доказывать соотношение (10) и тем же способом, что и в 6.2, завершать доказательство. □

Проблема 14. Доказать утверждение (б) в **IST.**

Если искать аналоги изложенному доказательству в классических теоремах иерархии, то можно говорить о каком-то сходстве с доказательством, скажем, существования множества $\mathbb{F}_\sigma$, не являющегося множеством $\mathbb{G}_\delta$, из топологических соображений, но не с известным во многих вариантах рассуждением с универсальным множеством. Последнее автору не удалось провести для иерархии классов Σ_n^{st}, Π_n^{st}, хотя формула, претендующая на решение проблемы иерархии для уровня n ($n \geqslant 1$ произвольно) очевидна:

Проблема 15. Доказать, что формула

$$\exists^{st} a_1\ \forall^{st} a_2\ \exists^{st} a_3\ \forall^{st} a_4\ \ldots\ \exists\ (\forall)^{st} a_n\ [\langle a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n\rangle \in X]$$

не эквивалентна в **IST** никакой Π_n^{st}-формуле.

§ 7. Определение истинности внутренних формул

Целью этого параграфа является доказательство теоремы 5, утверждающей возможность определения истинности внутренних формул со стандартными параметрами. В качестве следствия мы получим также и теорему 2, демонстрирующую особый статус гипотез $\mathbf{Repl}_1$, $\mathbf{Chc}_1$, $\mathbf{Coll}_1$, $\mathbf{Coll}_2$ (st Φ) среди других гипотез.

7.1. Кодировка языка. Чтобы доказать теорему 5, мы используем хорошо известное техническое средство — кодировку $\in$-языка при помощи конечных последовательностей символов, соответствующих знакам логики и множествам, используемым в качестве параметров.

Будем предполагать для простоты, что $\in$-формулы записываются только при помощи знаков $\neg$, &, $\exists$, $\in$, $=$, скобок, переменных v и v_i, $i \in \mathbb{N}$, и, наконец, параметров — т. е. множеств, замещающих свободные переменные. Известно, что остальные логические связки могут быть выражены через $\neg$, &, $\exists$.

Трансляцией $\in$-формулы φ назовем строку $\ulcorner\varphi\urcorner$, полученную из φ заменой:

знаков $\neg$, &, $\exists$, $\in$, $=$, (и) — числами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6;
каждой переменной v_i — числом $8 + i$, а v — числом 7;
каждого параметра p $(p \in \mathbf{V})$ — множеством-парой $\langle 0, p\rangle$.

Таким образом, $\ulcorner\varphi\urcorner$ становится кортежем множеств специального вида. Все такие кортежи образуют совокупность

$$\mathrm{Form} = \{\ulcorner\varphi\urcorner\colon \varphi \text{ — (правильно построенная) } \in\text{-формула}\},$$

в которой для любого X выделяется часть,

$$\mathrm{Form}_X = \{\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathrm{Form}\colon \text{все параметры } \varphi \text{ принадлежат } X\}.$$

Скажем, что формула ψ *подчинена* формуле φ, если ψ — подформула φ, некоторые(возможно, все или ни одной) свободные переменные которой замещены параметрами. В частности, сама φ подчинена φ. Положим

$$\mathrm{Form}\,[\varphi] = \{\ulcorner\psi\urcorner\colon \psi \text{ подчинена } \varphi\};\ \mathrm{Form}_X\,[\varphi] = \mathrm{Form}_X \cap \mathrm{Form}\,[\varphi].$$

Например, $\ulcorner\varphi(p)\urcorner \in \mathrm{Form}_X\,[\exists v \varphi(v)]$, если $p \in X$.

Наконец, выделим трансляции замкнутых формул, полагая

$$\mathrm{CForm} = \{\ulcorner\varphi\urcorner \in \mathrm{Form}\colon \varphi \text{ — замкнутая формула}\},$$

и аналогично CForm_X, $\mathrm{CForm}\,[\varphi]$, $\mathrm{CForm}_X\,[\varphi]$.

Уместно заметить, что трансляция $\ulcorner\varphi\urcorner$ стандартна (как конечная строка) в том и только в том случае, когда φ имеет только стандартные параметры, а число логических знаков (натуральное) также стандартно.

Теперь ключевое определение. Через $\mathrm{Sat}\,(T)$ обозначим конъюнкцию следующих пяти формул в st-$\in$-языке:

1) $T \subseteq \mathrm{CForm}$ (T состоит из трансляций замкнутых формул);
2) $\forall^{st} p\ \forall^{st} q\ [(\ulcorner p = q\urcorner \in T \leftrightarrow p = q)\ \&\ (\ulcorner p \in q\urcorner \in T \leftrightarrow p \in q)]$;
3) $\forall^{st}\ulcorner\varphi\urcorner\ \forall^{st}\ulcorner\psi\urcorner\ [\ulcorner\varphi\ \&\ \psi\urcorner \in T \leftrightarrow (\ulcorner\varphi\urcorner \in T\ \&\ \ulcorner\psi\urcorner \in T)]$;

4) $\forall^{\mathrm{st}}\ulcorner\varphi\urcorner \in T\ \forall^{\mathrm{st}}\ulcorner\psi\urcorner \in \mathrm{CForm}[\varphi]\ (\ulcorner\neg\psi\urcorner \in T \leftrightarrow \ulcorner\psi\urcorner \notin T)$;
5) $\forall^{\mathrm{st}}\ulcorner\varphi(v)\urcorner\ [\ulcorner\exists v\ \varphi(v)\urcorner \in T \leftrightarrow \exists^{\mathrm{st}}p\ (\ulcorner\varphi(p)\urcorner \in T)]$.

Таким образом, множество T, удовлетворяющее $\mathrm{Sat}(T)$, имеет структуру, приспособленную для определения посредством T истинности внутри универсума стандартных множеств $\mathbb{S}$. Именно справедлива

7.2. Лемма **[IST]**. *Для того чтобы данная замкнутая $\in$-формула φ со стандартными параметрами была истинна в $\mathbb{S}$ (или, что равносильно благодаря переносу, в универсуме* $\mathbf{V}$ *всех множеств), необходимо и достаточно выполнения любого из следующих двух эквивалентных условий*:

$$\exists T\ [\mathrm{Sat}(T)\ \&\ \ulcorner\varphi\urcorner \in T];\quad \forall T\ [\mathrm{Sat}(T) \to \ulcorner\neg\varphi\urcorner \notin T].$$

Точнее, утверждается, что, какова бы ни была $\in$-формула $\varphi(\mathbf{v})$ с набором свободных переменных $\mathbf{v} = v_1, \ldots, v_n$, в **IST** справедливо

$$\forall^{\mathrm{st}}x_1 \ldots \forall^{\mathrm{st}}x_n\ [\varphi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \exists T\ [\mathrm{Sat}(T)\ \&\ \ulcorner\varphi(x_1, \ldots, x_n)\urcorner \in T] \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \forall T\ [\mathrm{Sat}(T) \to \ulcorner\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)\urcorner \notin T].$$

В этом смысле следует понимать и доказательство леммы.

Доказательство. Докажем два вспомогательных утверждения, из которых немедленно следует лемма.

Факт 1. Для любой замкнутой $\in$-формулы φ со стандартными параметрами найдется множество T, удовлетворяющее $\mathrm{Sat}(T)$ и содержащее хотя бы одну из трансляций $\ulcorner\varphi\urcorner$, $\ulcorner\neg\varphi\urcorner$.

Доказательство. Заменим все параметры формулы φ свободными переменными, и пусть $\varphi(v_1, \ldots, v_n)$ — полученная формула, и

$$\varphi(v_{i_1}, \ldots, v_{i_{n(i)}}),\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ i_k \in \mathbb{N},$$

— список всех ее подформул (включая ее саму). Взяв множество H, содержащее все стандартные множества (теорема 2.9), определим

$$T_i = \{\ulcorner\varphi_i(x_1, \ldots, x_{n(i)})\urcorner : x_1, \ldots, x_{n(i)} \in H\ \&\ \varphi_i(x_1, \ldots, x_{n(i)})\} \cup$$
$$\cup \{\ulcorner\neg\varphi_i(x_1, \ldots, x_{n(i)})\urcorner : x_1, \ldots, x_{n(i)} \in H\ \&\ \neg\varphi_i(x_1, \ldots, x_{n(i)})\}.$$

Множество $T = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant m} T_i$ — искомое. $\square$

Факт 2. Для любой замкнутой $\in$-формулы φ со стандартными параметрами, если $\ulcorner\varphi\urcorner \in T$ и $\mathrm{Sat}(T)$ выполнено, то φ истинна в $\mathbb{S}$ и в $\mathbf{V}$.

Доказательство. Используем индукцию по числу знаков в строке $\ulcorner\varphi\urcorner$. Начало индукции (т. е. формулы $x \in y$ и $x = y$ для стандартных x и y) обеспечивается формулой 2) в составе Sat, а индуктивные шаги — формулами 3), 4), 5). Единственно нетривиален здесь шаг $\neg$, который мы рассмотрим отдельно. Итак, пусть $\ulcorner\neg\varphi\urcorner \in T$ и требуется доказать, что φ ложна. Сразу отметим, что $\ulcorner\varphi\urcorner \notin T$ из-за 4).

Случай 1: φ — элементарная формула $x \in y$ или $x = y$ со стандартными x, y. Согласно 2), имеем $x \notin y$ (или, соответственно, $x \neq y$), ибо $\ulcorner\varphi\urcorner \notin T$, т. е. φ действительно ложна.

Случай 2: φ есть $\psi\ \&\ \chi$. Одна из трансляций $\ulcorner\psi\urcorner$, $\ulcorner\chi\urcorner$ не принадлежит T в силу 3) — пусть, скажем, $\ulcorner\psi\urcorner \notin T$. Тогда $\ulcorner\neg\psi\urcorner \in T$ вследствие 4). Тем самым, $\neg\psi$ истинна по индуктивному предположению. Следовательно, ψ ложна.

Случай 3: φ есть $\neg\psi$. Тогда $\ulcorner\psi\urcorner \in T$ вследствие 4), поскольку $\ulcorner\varphi\urcorner = \ulcorner\neg\psi\urcorner \notin T$. Следовательно, ψ истинна по индуктивному предположению, а тогда φ ложна.

Случай 4: φ есть $\exists v\, \psi(v)$. Требуется доказать, что $\psi(x)$ ложна, если x стандартно. Имеем $\ulcorner\psi(x)\urcorner \notin T$ согласно 5) (так как $\ulcorner\varphi\urcorner \notin T$). Тем самым, $\ulcorner\neg\psi(x)\urcorner \in T$ в силу 4), т. е. по индуктивному предположению $\psi(x)$ ложно. $\square$

Этим доказательство леммы 7.2 и теоремы 5 закончено. $\square$

7.3. Доказательство теоремы 2. Будет достаточно доказать, что Cons **ZFC** следует (в **IST**) из $\mathbf{Coll}_1$ (st Φ) (т. е. $\mathbf{Coll}_1$ для ядерных формул со стандартными параметрами).

Если $\varphi(v_1, \ldots, v_m)$ — беспараметрическая $\in$-формула, то в **ZFC** можно вывести следующее: существует ординал $\varkappa$, такой, что $\mathbf{V}_\varkappa$ является элементарной подмоделью универсума $\mathbf{V}$ относительно φ, т. е.

$$\forall p_1 \in \mathbf{V}_\varkappa \ldots \forall p_m \in \mathbf{V}\ [\varphi(p_1, \ldots, p_m) \leftrightarrow \varphi^\varkappa(p_1, \ldots, p_m)],$$

где через $\varphi^\varkappa$ обозначена релятивизация φ к $\mathbf{V}_\varkappa$ (все кванторы φ ограничиваются множеством $\mathbf{V}_\varkappa$). При этом благодаря переносу ординал $\varkappa$ может быть выбран стандартным в **IST**.

Теперь зафиксируем какую-нибудь естественную нумерацию $\langle\varphi_k\colon k \in \mathbb{N}\rangle$ всех замкнутых $\in$-формул и определим st-$\in$-формулу $\Phi(k, \varkappa)$, которая говорит, что k — стандартное натуральное число, а $\varkappa$ — наименьший (стандартный) ординал, такой, что $\mathbf{V}_\varkappa$ есть элементарная подмодель $\mathbf{V}$ по отношению ко всем формулам φ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Точное определение Φ выглядит так:

$$k \in \mathbb{N}\ \&\ \varkappa \in \mathrm{Ord}\ \&\ \mathrm{st}\, k\ \&\ \mathrm{st}\, \varkappa\ \&\ \exists T\ [\mathrm{Sat}\,(T)\ \&\ T \text{ содержит трансляцию}$$
$$\ulcorner\varkappa \textit{ является наименьшим ординалом, таким, что } \mathbf{V}_\varkappa \textit{ есть элементарная подмодель } \mathbf{V} \textit{ относительно всех формул } \varphi_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k\urcorner].$$

Лемма 7.2 обеспечивает соответствие между этим точным определением и указанным выше неформальным смыслом Φ. Другими словами, имеет место

$$\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\ \exists!^{\mathrm{st}} \varkappa \in \mathrm{Ord}\ \Phi(k, \varkappa).$$

В этой ситуации благодаря $\mathbf{Coll}_1$ (st Φ) существует стандартная функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathrm{Ord}$, такая, что $\Phi(k, f(k))$ выполнено для всех стандартных k. Определим $\lambda = \sup_{k\in\mathbb{N}} f(k)$ и докажем, что множество $\mathbf{V}_\lambda$ образует модель **ZFC**.

Этот факт можно доказывать в $\mathbb{S}$ согласно переносу. Следовательно, вновь переходя в $\mathbf{V}$, мы видим, что достаточно проверить истинность в $\mathbf{V}_\lambda$ любой стандартной (в том смысле, что трансляция $\ulcorner\mathbf{A}\urcorner$ стандартна) аксиомы $\mathbf{A}$ теории **ZFC**.

Пусть стандартное k таково, что $\mathbf{A}$ и все ее подформулы содержатся в списке φ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Тогда для любого стандартного $n \geqslant k$ множество $\mathbf{V}_{f(n)}$ по выбору f будет элементарной подмоделью $\mathbf{V}$ относительно $\mathbf{A}$ и всех подформул $\mathbf{A}$. Отсюда нетрудно вывести, что и $\mathbf{V}_\lambda$ будет элементарной подмоделью $\mathbf{V}$ относительно $\mathbf{A}$. Следовательно, $\mathbf{A}$ истинно в $\mathbf{V}_\lambda$. Этим доказательство теоремы 2 закончено. $\square$

§ 8. Гипотеза собирания в IST

Теорема собирания **Coll** может быть доказана в **IST** без каких-либо ограничений на природу ядерной формулы (в отличие от гипотез подстановки и выбора, для которых такое доказательство невозможно согласно теореме 3). Доказательство **Coll** в **IST** (т. е. теорема 4) составляет главное содержание данного параграфа. В качестве приложений мы получим сформулированное в п. 1.13 следствие, а также теорему 9 из § 1.

8.1. Начало доказательства. Будем доказывать **Coll** для формулы

$$Q_2 x_2 Q_3 x_3 \ldots Q_n x_n \ \varphi(x, y, x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

обозначаемой ниже через $\Phi(x, y)$, предполагая, что φ — бескванторная формула (с любыми параметрами), а кванторы Q_i могут иметь любой из четырех видов: $\exists$, $\forall$, $\exists^{\mathrm{st}}$, $\forall^{\mathrm{st}}$ (независимо один от другого).

Зафиксировав X, докажем существование множества Y, такого, что

$$\forall x \in X \ [\exists y \ \Phi(x, y) \to \exists y \in Y \ \Phi(x, y)].$$

Для удобства дальнейших выкладок, заменим переменные x, y на x_0, x_1 и положим $Q_1 = \exists$ (что соответствует формуле $\exists y \ \Phi(x, y)$).

Ход рассуждений напоминает отчасти доказательство теоремы 3.1, однако наличие двух типов кванторов (внешние и внутренние) заставило усложнить конструкцию.

Зафиксируем кардинал θ; его роль будет уточнена ниже.

Ключевое построение. Для каждого $k \leqslant n$ мы определяем множество C_k и для каждого кортежа $x_0, \ldots, x_k$ (из любых множеств) — значение $F(x_0, \ldots, x_k) \in C_k$. При этом F окажется внутренним отображением (т. е. равенство $c = F(x_0, \ldots, x_k)$ может быть выражено внутренней формулой) в любой «арности» k. Отметим, что построение зависит от выбора θ, что, однако, пока не будет формально отражено в записи.

Определение производится индукцией по $k = n, n-1, \ldots, 1, 0$.

Начало индукции: $k = n$. Положим $C_n = \{0, 1\}$ и

$$F(x_0, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \varphi(x_0, \ldots, x_n) \text{ истинно}, \\ 0, & \text{если } \varphi(x_0, \ldots, x_n) \text{ ложно}. \end{cases}$$

Индуктивный шаг. Предположим, что $k < n$, уже построено множество C_{k+1} и посредством внутреннего F определено значение $F(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}) \in C_{k+1}$ для любого кортежа $x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}$.

Случай 1: Q_{k+1} есть $\exists^{\mathrm{st}}$ или $\forall^{\mathrm{st}}$. Положим

$$C_k = V_\theta \times C_{k+1} = \{\langle x, c\rangle : x \in V_\theta \ \& \ c \in C_{k+1}\},$$

и

$$F(x_0, \ldots, x_k) = \{\langle x_{k+1}, c\rangle : x_{k+1} \in V_\theta \ \& \ c = F(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1})\}$$

для всех $x_0, \ldots, x_k$. Таким образом,

$$F(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}) = c \leftrightarrow \langle x_{k+1}, c\rangle \in F(x_0, \ldots, x_k)$$

всякий раз, когда $x_{k+1} \in V_\theta$. Эта последняя эквивалентность может быть записана в виде равенства

$$F(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}) = F(x_0, \ldots, x_k)(x_{k+1}),$$

снова если $x_{k+1} \in V_\theta$.

Случай 2: Q_{k+1} есть $\exists$ или $\forall$. В частности, к этому случаю относится значение $k = 0$, ибо Q_1 есть $\exists$. Положим $C_k = \mathscr{P}(C_{k+1})$ и

$$F(x_0, \ldots, x_k) = \{F(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}) : x_{k+1} \in V_\theta\}$$

для любого кортежа $x_0, \ldots, x_k$. Здесь важно отметить, что коль скоро F предполагается внутренним отображением в «арности» $k+1$, а все значения $F(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1})$ принадлежат C_{k+1}, то аксиома выделения **ZFC** гарантирует корректность определения $F(x_0, \ldots, x_k)$ (как внутреннего множества, принадлежащего C_k) несмотря на то, что аргумент x_{k+1} пробегает весь универсум.

По этой же причине F остается внутренним в «арности» k.

8.2. Лемма. *Пусть множества* $x_0, \ldots, x_k$ *и* $x'_0, \ldots, x'_k$ *таковы, что* $F(x_0, \ldots, x_k) = F(x'_0, \ldots, x'_k)$. *Если* Q_{k+1} — *внешний квантор, то для любого* $x_{k+1} \in V_\theta$ *выполнено*

$$F(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}) = F(x'_0, \ldots, x'_k, x_{k+1}).$$

Если же Q_{k+1} — *внутренний квантор, то для любого* x_{k+1} *найдется* x'_{k+1}, *такое, что*

$$F(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}) = F(x'_0, \ldots, x'_k, x'_{k+1}).$$

Доказательство. Случай внутреннего квантора ясен. Если же Q_{k+1} — внешний квантор, то по определению

$$F(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}) = F(x_0, \ldots, x_k)(x_{k+1}) = F(x'_0, \ldots, x'_k)(x_{k+1}) = \\ = F(x'_0, \ldots, x'_k, x_{k+1}). \ \square$$

Перед формулировкой еще одной вспомогательной леммы необходимо сказать несколько слов об ограниченных и неограниченных ординалах. По определению, множество *x ограничено*, когда $x \in X$ для некоторого стандартного X, и *неограничено*, когда такого X нет. Это определение применимо и к случаю, когда $x = \theta$ — ординал, однако здесь можно пользоваться эквивалентными и более удобными формулировками неограниченности:

$$\theta \in \mathrm{Ord} \text{ неограниченный } \leftrightarrow \forall^{st}\alpha \in \mathrm{Ord}\,(\alpha < \theta) \leftrightarrow \forall^{st}x\,(x \in V_\theta)$$

(элементарное доказательство оставляется читателю).

8.3. Лемма. *Предположим, что фиксированный выше ординал* θ — *неограниченный. Пусть также* $k \leqslant n$ *и значения аргументов* x_i, x'_i, $i \leqslant k$, *выбраны так, что* $F(x_0, \ldots, x_k) = F(x'_0, \ldots, x'_k)$. *Тогда*

$$Q_{k+1}x_{k+1} \ldots Q_n x_n\ \varphi(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) \leftrightarrow \\ \leftrightarrow Q_{k+1}x'_{k+1} \ldots Q_n x'_n\ \varphi(x'_0, \ldots, x'_k, x'_{k+1}, \ldots, x'_n).$$

Доказательство. Используем индукцию по $k = n, n-1, \ldots, 1, 0$. Случай $k = n$ — начало индукции — элементарен по определению F (строка кванторов пропадает).

Теперь индуктивный шаг — доказательство теоремы для некоторого значения k, $k < n$, в предположении, что для $k+1$ искомый результат уже получен. Рассмотрим случай, когда Q_{k+1} есть квантор $\exists$ или $\exists^{st}$ (квантор общности рассматривается аналогично).

Итак, пусть существует x_{k+1}, такое, что выполнено

$$Q_{k+2}x_{k+2} \ldots Q_n x_n\ \varphi(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n),$$

причем если Q_{k+1} есть $\exists^{st}$, то x_{k+1} стандартно (и тогда $x_{k+1} \in V_\theta$ вследствие неограниченности θ). По лемме 8.2, имеем

$$F(x_0, \ldots, x_k, x_{k+1}) = F(x'_0, \ldots, x'_k, x'_{k+1})$$

для подходящего x'_{k+1}, причем если Q_{k+1} есть $\exists^{st}$, то $x_{k+1} = x'_{k+1}$ стандартно. Тогда по индуктивному предположению выполнено

$$Q_{k+2}x'_{k+2} \ldots Q_n x'_n\ \varphi(x'_0, \ldots, x'_k, x'_{k+1}, x'_{k+2}, \ldots, x'_n),$$

откуда и следует правая часть эквивалентности леммы. $\square$

Продолжая доказательство теоремы 9, восстановим обозначения переменных x, y вместо x_0 и x_1 и, взяв $k = 1$ в лемме 8.3, получим

8.4. Следствие. *При неограниченном* θ, *если* $F(x, y) = F(x', y')$, *то справедлива эквивалентность* $\Phi(x, y) \leftrightarrow \Phi(x', y')$.

Теперь, до конца доказательства теоремы 4, предполагаем, что фиксированный выше ординал θ — неограниченный; существование (в **IST**) неограниченных ординалов следует из теоремы 2.9. Поскольку формула $c = F(x, y)$ — внутренняя, мы вправе применить собирание **ZFC**, получая множество Y, для которого будет справедливо

$$(11)\quad \forall c \in C_1\ \forall x \in X\ [\exists y\ (c = F(x, y)) \to \exists y \in Y\ (c = F(x, y))].$$

(Напомним: множество X фиксировано с начала 8.1.) Однако $F(x, y) \in C_1$ для любой пары множеств x, y. Это означает, что предложение (11) может быть переписано так:

$$\forall x \in X\ \forall y\ \exists y' \in Y\ [F(x, y) = F(x, y')].$$

Отсюда, согласно следствию 8.4, немедленно находим

$$\forall x \in X\ \forall y\ \exists y' \in Y\ [\Phi(x, y) \leftrightarrow \Phi(x, y')].$$

Этим доказательство теоремы 4 § 1 заканчивается. $\square$

8.5. **Комментарий.** Фактически в ходе доказательства теоремы 4 установлено нечто большее, чем прямо утверждается теоремой. Именно, ко всякой st-$\in$-формуле $\Phi(x, y)$ существует внутренняя формула $\Phi^*(\theta, X, \lambda)$, обладающая такими двумя свойствами:

а) $\forall \theta \in \mathrm{Ord}\ \forall X\ \exists! \lambda \in \mathrm{Ord}\ \Phi^*(\theta, X, \lambda)$ и

б) если θ — неограниченный ординал, а множество X и ординал λ таковы, что выполнено $\Phi^*(\theta, X, \lambda)$, то

$$\forall x \in X\ [\exists y\ \Phi(x, y) \to \exists y \in V_\lambda\ \Phi(x, y)].$$

Вот формула, о которой идет речь:

θ *и* λ — *ординалы и* λ — *наименьший ординал, такой,*
что множество $Y = V_\lambda$ *удовлетворяет соотношению* (11),
в котором C_1 *и* F *взяты в смысле данного* θ.

Этот «эффективизированный» вариант собирания используется в нижеследующем доказательстве теоремы единственности для класса ограниченных множеств.

8.6. Теорема [IST] (= теорема 9). *Пусть* $\Phi(x)$ *есть* st-$\in$-*формула с параметрами из класса* $\mathbb{B}$ *ограниченных множеств, причем существует единственное* x, *такое, что* $\Phi(x)$. *Тогда* x — *ограниченное.*

Доказательство. Можно считать, что формула Φ содержит в качестве параметра только одно — по условию, ограниченное — множество p_0, и пусть $p_0 \in P$, где P стандартно. Итак, x — единственное множество, для которого выполнено $\Phi(x, p_0)$.

Обозначим через λ_0 наименьший из ординалов λ, таких, что $x \in V_\lambda$. Требуется доказать ограниченность ординала λ_0, т. е. найти стандартный ординал γ, такой, что $\lambda_0 < \gamma$ (в этом случае мы получили бы $x \in V_\gamma$ и x стало бы ограниченным).

Теорема 4 в форме замечания 8.5 приносит ограниченную формулу $\Phi^*(\theta, X, \lambda)$, для которой:

а) $\forall \theta \in \mathrm{Ord}\ \exists! \lambda \in \mathrm{Ord}\ \Phi^*(\theta, P, \lambda)$. Единственное λ, удовлетворяющее $\Phi^*(\theta, P, \lambda)$, условимся обозначать через $\lambda(\theta)$. Из-за стандартности P ординал $\lambda(\theta)$ будет стандартным всякий раз, когда θ стандартно (по переносу); и б) если выполнено $\Phi^* (\theta, P, \lambda)$ и θ — неограниченный ординал, то $x \in \mathbf{V}_\lambda$ (поскольку $p_0 \in P$).

Следовательно, по выбору λ_0 мы имеем $\lambda(\theta) \geqslant \lambda_0$ для любого неограниченного ординала θ. Таким образом, $\forall \theta \in \mathrm{Ord}\ [\forall^{\mathrm{st}}\gamma\ (\gamma < \theta) \to \lambda(\theta) \geqslant \lambda_0]$, или, по-другому, $\forall \theta \in \mathrm{Ord}\ \exists^{\mathrm{st}}\gamma\ [\gamma \geqslant \theta$ или $\lambda(\theta) \geqslant \lambda_0]$. Согласно идеализации, найдется стандартное конечное $\Gamma \subseteq \mathrm{Ord}$, такое, что выполнено

$$\forall \theta \in \mathrm{Ord}\ \exists \gamma \in \Gamma\ [\gamma \geqslant \theta \text{ или } \lambda(\theta) \geqslant \lambda_0].$$

Наконец, обозначим через γ_0 наибольший ординал в Γ; γ_0 стандартен по теореме 2.1 и имеет место $\forall \theta\ [\gamma_0 \geqslant \theta$ или $\lambda(\theta) \geqslant \lambda_0]$. Следовательно, $\lambda(\theta) \geqslant \lambda_0$ для всех $\theta > \gamma_0$. В частности, $\lambda(\gamma_0 + 1) \geqslant \lambda_0$. Однако ординал $\gamma_0 + 1$ стандартен вместе с γ_0; следовательно, $\lambda' = \lambda(\gamma_0 + 1)$ — также стандартный ординал. Ограниченность λ_0 и, следовательно, теорема 8.6 этим доказаны. $\square$

8.7. Неопределимость истины. Теперь займемся доказательством следствия, сформулированного в разделе 1.13. Предположим противное, т. е. пусть $\tau(x)$ есть такая st-$\in$-формула, что для любой внутренней формулы $\Phi(x_1, \ldots, x_n)$ (без параметров) в теории **IST** доказуемо

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\ [\Phi(x_1, \ldots, x_n) \leftrightarrow \tau(\ulcorner \Phi(x_1, \ldots, x_n) \urcorner)].$$

Для вывода противоречия обозначим через $T(x, y)$ формулу

«*x есть трансляция $\ulcorner \varphi(v) \urcorner$ некоторой внутренней формулы $\varphi(v)$ с единственной свободной переменной v (разрешены также любые параметры)* $\& \ \tau(\ulcorner \varphi(y) \urcorner)$».

Далее, пусть $T^*(\theta, X, \lambda)$ — формула, соответствующая T в смысле замечания 8.5. Рассмотрим внутреннюю формулу $\Phi(\theta, y)$, которая говорит (неформально), что y не содержится ни в одном множестве вида $\mathbf{V}_\lambda$, если λ удовлетворяет $T^*(\delta, \mathbf{V}_\delta, \lambda)$, где $\delta = \theta + \omega$ (через ω обозначается наименьший бесконечный ординал). Тогда по выбору T^* (единственность λ!) имеет место $\forall \theta \in \mathrm{Ord}\ \exists y\ \Phi(\theta, y)$. Именно с этой формулой Φ и связано противоречие.

Зафиксируем неограниченный ординал θ, положим $\delta = \theta + \omega$ и $X = \mathbf{V}_\delta$, и через λ обозначим единственный ординал, такой, что выполнено $T^*(\delta, X, \lambda)$. Также определим $Y = \mathbf{V}_\lambda$. Тогда справедливо

$$\forall x \in X\ [\exists y\ T(x, y) \to \exists y \in Y\ T(x, y)].$$

Пусть теперь $x = \ulcorner \Phi(\theta, v) \urcorner$. Ясно, что $x \in X = \mathbf{V}_\delta$, откуда

$$\exists y\ T(x, y) \to \exists y \in Y\ T(x, y).$$

Факт 1. Левая часть импликации истинна.

Действительно, пусть y удовлетворяет $\Phi(\theta, y)$. Тогда по выбору формулы τ выполнено и $\tau(\ulcorner \Phi(\theta, y) \urcorner)$, откуда и следует искомое. $\square$

Факт 2. Правая часть импликации ложна.

Пусть, напротив, $y \in Y$ удовлетворяет $T(x, y)$. Тогда, по определению T, имеет место $\tau(\ulcorner \Phi(\theta, y) \urcorner)$. Следовательно, $\Phi(\theta, y)$ также истинно (по выбору τ). Однако $\Phi(\theta, y)$ говорит, что $y \notin Y = \mathbf{V}_\lambda$ всякий раз, когда имеет место $T^*(\delta, \mathbf{V}_\delta, \lambda)$.

Полученное противоречие (между фактами 1 и 2) завершает доказательство следствия 1.13. $\square$

Уместно отметить, что на самом деле доказано более сильное в каком-то смысле утверждение, а именно для любой st-$\in$-формулы $\tau(x)$ имеется внутренняя формула $\Phi(\theta, y)$, для которой в **IST** верно

$$\exists \theta\ \exists y\ \neg\ [\Phi(\theta, y) \leftrightarrow \tau(\ulcorner \Phi(\theta, y) \urcorner)].$$

§ 9. Независимость гипотез

Излагаемое в этом параграфе доказательство теоремы 3 Введения состоит в построении модели **IST**, где гипотеза $\mathbf{Repl}_2$ опровергается на множестве $X = \mathbb{N}$ (натуральные числа) и некоторой формуле Φ, не имеющей параметров. Нетрудно проверить, что в такой модели не будут выполнены и все прочие гипотезы из числа упомянутых в условии теоремы 3 (для всех гипотез, кроме $\mathbf{BRepl}_4$ и $\mathbf{BChc}_4$, это очевидно, а для этих двух будет проверено отдельно в конце параграфа). Чтобы решить эту задачу, нам потребуется особый выбор начальной модели и особый способ построения ее нестандартного расширения, несколько отличающийся от изложенного в [31] для более простой ситуации.

Фактически, как мы увидим, те ядерные формулы, которые обеспечат нарушение гипотез в нашей модели, будут также гарантировать и доказательство теорем 7 и 8 из § 1.

9.1. Начальная модель. Мы будем предполагать, рассуждая в **ZFC**, существование кардинала θ, обладающего тем свойством, что $\mathbf{V}_\theta$ — модель **ZFC**. Но на самом деле это предположение, выходящее за рамки **ZFC** и взятое лишь для удобства, может быть устранено тем же примерно способом, что и выше в следствии 4.3 — т. е. через рассмотрение подходящего расширения теории **ZFC**.

Итак, пусть θ — кардинал, обладающий указанным свойством, так что $\mathbf{V}_\theta$ — модель **ZFC**. Нам будет удобно допустить, что θ является *наименьшим* кардиналом такого рода.

Еще одно (последнее) допущение состоит в том, что мы будем (в ходе построения искомой модели **IST** в **ZFC**) предполагать выполнение аксиомы конструктивности $\mathbf{V} = \mathbb{L}$. Существенным для нас следствием этой (совместной с **ZFC**) аксиомы является полное упорядочение универсума всех множеств посредством некоторой вполне определенной $\in$-формулы, обладающее тем свойством, что его (упорядочения) ограничение на любое множество вида $\mathbf{V}_\theta$, где θ — кардинал, определимо в $\mathbf{V}_\theta$ и упорядочивает $\mathbf{V}_\theta$ по типу θ, см. [6].

Зафиксируем какую-либо «естественную» нумерацию $\varphi_k(v_1, \ldots, v_{m(k)})$, $k \in \mathbb{N}$, всех $\in$-формул (без параметров) с явным указанием списка свободных переменных. Нетрудно проверить, что для любого n существует кардинал $\varkappa < \theta$, такой, что $\mathbf{V}_\varkappa$ — элементарная подмодель $\mathbf{V}_\theta$ относительно всех формул

$$\varphi_k(p_1, \ldots, p_{m(k)}),\ k \leqslant n,\ p_i \in \mathbf{V}_\varkappa.$$

Через $\varkappa_n$ обозначим наименьший из таких кардиналов $\varkappa$. Понятно, что $\varkappa_n \leqslant \varkappa_{n+1}$ для всех n, $\varkappa = \sup_{n \in \mathbb{N}} \varkappa_n$ — кардинал, а $\mathbf{V}_\varkappa$ — элементарная подмодель $\mathbf{V}_\theta$ относительно всех $\in$-формул с параметрами из $\mathbf{V}_\varkappa$, т. е. модель **ZFC**. Следовательно, на самом деле $\varkappa = \theta$.

Множество $M = \mathbf{V}_\theta$ и будет начальной моделью для построения искомого нестандартного расширения. Механизм самого расширения связан с использованием определимых функций для построения ультрастепени. Поэтому дадим несколько необходимых определений.

Прежде всего, введем второе обозначение для $\mathbf{V}_\theta$, полагая $V = \mathbf{V}_\theta$; желательность этого дополнительного обозначения объясняется тем, что множество $\mathbf{V}_\theta$ как бы фигурирует в двух качествах, т. е. как начальная модель и как «универсум» для анализа определимости.

Отметим следующее: $\varkappa_n \in V$ для всех n. Действительно, достаточно проверить, что $\varkappa_n < \theta$ для всех n. Предположим противное, т. е. пусть

$\varkappa_n = \theta$ для всех $n \geqslant n_0$, $n_0 \in \mathbb{N}$. Тогда, поскольку V — модель **ZFC**, для $n = n_0 + 1$ нашелся бы кардинал $\varkappa \in V$ (а тогда $\varkappa < \theta$), такой, что $\mathbf{V}_\varkappa$ — элементарная подмодель V относительно всех формул φ_k, $k \leqslant n$. Значит, $\varkappa_n \leqslant \varkappa < \theta$ — противоречие.

Через $\mathrm{Def}\,(V)$ обозначается совокупность всех множеств $X \subseteq V$, определимых в V в виде

$$X = \{p \in V\colon \varphi^V(p)\} = \{p \in V\colon \text{в } V \text{ истинно } \varphi(p)\},$$

где φ — произвольная $\in$-формула с параметрами из V и единственной свободной переменной p, а φ^V обозначает релятивизацию к V, т. е. результат замены в φ каждого квантора $\exists z$ или $\forall z$ на $\exists z \in V$, или $\forall z \in V$ соответственно.

Лемма. *Последовательность* $\langle\varkappa_n\colon n \in \mathbb{N}\rangle$ *не принадлежит* $\mathrm{Def}\,(V)$.

Доказательство. Пусть, напротив, для подходящей $\in$-формулы $\varphi(n, x)$ с параметрами из V выполнено

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall \varkappa \in V\ [\varkappa = \varkappa_n \leftrightarrow \varphi^V(n, \varkappa)].$$

Найдется n такое, что все параметры φ принадлежат $\mathbf{V}_{\varkappa_n}$ и, кроме того, $\mathbf{V}_{\varkappa_n}$ — элементарная подмодель V относительно формул $\varphi(\nu, \varkappa)$ (со свободными переменными $\nu, \varkappa$) и $\exists \varkappa\, \varphi(\nu, \varkappa)$ (со свободной ν). Формула $\exists \varkappa\, \varphi(n, \varkappa)$ истинна в V — возьмем $\varkappa = \varkappa_n$ — тем самым, и в $\mathbf{V}_{\varkappa_n}$. Следовательно, $\varphi(n, \varkappa)$ выполнено в $\mathbf{V}_{\varkappa_n}$ — тем самым, и в V для некоторого $\varkappa \in \mathbf{V}_{\varkappa_n}$. Но это может быть только при $\varkappa = \varkappa_n$. Таким образом, мы получили $\varkappa_n \in \mathbf{V}_{\varkappa_n}$, что невозможно. $\square$

На самом деле, последовательность кардиналов $\varkappa_n$ будет иметь принципиальное значение в дальнейшем как основа для построения искомого контрпримера с нарушением $\mathbf{Repl}_2$. Главная идея состоит в том, чтобы построить нестандартное расширение модели M при помощи только функций из $\mathrm{Def}\,(V)$. Это гарантировало бы, что отображение $k \mapsto \varkappa_k$ не войдет в расширение, в то время как теорема 5 обеспечит определимость этого отображения в расширении посредством соответствующей (внешней) формулы.

Перейдем к деталям.

9.2. Индексное множество и ультрафильтр. В качестве индексного множества рассматривается

$$I = \mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(M) = \{i \subseteq M\colon i \text{ конечно}\};$$

понятно, что $I \in \mathrm{Def}\,(V)$. А необходимый нам ультрафильтр дается следующей теоремой.

Теорема. *Существует ультрафильтр U над I, обладающий такими двумя свойствами:*

(А) *если* $a \in M$, *то* $\{i \in I\colon a \in i\} \in U$;

(Б) *если* $P \subseteq I \times M$, $P \in \mathrm{Def}\,(V)$, *то*

$$\{p \in M\colon \textit{множество } P_i = \{i\colon \langle i, p\rangle \in P\} \textit{ принадлежит } U\} \in \mathrm{Def}\,(V).$$

Доказательство. Первая часть построения ультрафильтра U состоит в том, что мы определяем U_0 как совокупность всех множеств

$$\{i \in I\colon a_1, \ldots, a_n \in i\}, \text{ где } a_1, \ldots, a_n \in M.$$

Понятно, что семейство U_0 удовлетворяет *условию конечных пересечений* (у.к.п.), которое говорит, что пересечение любого конечного числа множеств данного семейства непусто.

Чтобы провести вторую часть, зафиксируем нумерацию $\chi_k(i, p)$, $k \geqslant 1$, всех $\in$-формул с двумя свободными переменными (и без параметров). Согласно сделанному выше предположению, существует определимое в V полное упорядочение множества $V = \mathbf{V}_\theta$ по типу θ. Обозначим через p_α ($\alpha < \theta$) α-й в смысле этого порядка элемент множества V. Тогда последовательность $\langle p_\alpha: \alpha < \theta\rangle$ принадлежит $\mathrm{Def}\,(V)$. Определим

$$A_k(\alpha) = \{i \in I: \text{в } V \text{ истинно } \chi_k(i, p_\alpha)\},\quad C_k(\alpha) = I \setminus A_k(\alpha).$$

Теперь индукцией по k не составляет труда построить набор множеств $T_k \subseteq \theta$, $T_k \in \mathrm{Def}\,(V)$, обладающих тем свойством, что если обозначить

$$U_k = \{A_k(\alpha): \alpha \in T_k\} \cup \{C_k(\alpha): \alpha \in \theta \setminus T_k\}, \text{ и}$$
$$U_{k\gamma} = \{A_k(\alpha): \alpha \in T_k \cap \gamma\} \cup \{C_k(\alpha): \alpha \in \gamma \setminus T_k\},$$

то при любых $k \geqslant 1$ и $\gamma < \theta$ семейство $U_0 \cup \ldots \cup U_{k-1} \cup U_{k\gamma}$ будет удовлетворять у.к.п. (здесь используется тот очевидный факт, что из двух взаимно дополнительных множеств по крайней мере одно может быть присоединено к у. к. п.-семейству с сохранением у. к. п.).

Наконец, третья часть. Определяем $U_\infty = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} U_k$ (понятно, что семейство U_∞ удовлетворяет у. к. п.) и расширяем U_∞ до ультрафильтра U над I произвольным образом. Нетрудно проверить, что полученное расширение обладает нужными свойствами. $\square$

9.3. Квантор «существует достаточно много». Использование свойств (А) и (Б) построенного ультрафильтра U существенно облегчается в рамках формализма обобщенных кванторов. Определим действие нового квантора $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_U$ следующим образом:

$$\mathbf{Q} i\varphi(i), \text{ когда } \{i \in I: \text{ в } M \text{ истинно } \varphi(i)\} \in U.$$

Нетрудно проверить следующие свойства этого дополнительного элемента логики, вытекающие из требований (А) и (Б) в и целом из определения ультрафильтра:

(Q1) если $p \in M$, то $\mathbf{Q} i\ (p \in i)$;

(Q2) если $P \subseteq I \times M$, $P \in \mathrm{Def}\,(V)$, то $\{p \in M: \mathbf{Q} i\ (\langle i, p\rangle \in P)\} \in \mathrm{Def}\,(V)$, т. е. действие квантора $\mathbf{Q}$ не выводит из класса $\mathrm{Def}\,(V)$;

(Q3) если $\forall i\ [\varphi(i) \to \psi(i)]$, то $\mathbf{Q} i\varphi(i) \to \mathbf{Q} i\psi(i)$;

(Q4) $\mathbf{Q} i\varphi(i)\ \&\ \mathbf{Q} i\psi(i) \leftrightarrow \mathbf{Q} i\ [\varphi(i)\ \&\ \psi(i)]$;

(Q5) $\mathbf{Q} i \neg\varphi(i) \leftrightarrow \neg \mathbf{Q} i\varphi(i)$;

(Q6) если i не является свободной переменной в φ, то $\varphi \leftrightarrow \mathbf{Q} i\varphi$;

(Q7) $\forall i\varphi(i) \to \mathbf{Q} i\varphi(i) \to \exists i\varphi(i)$.

9.4. Построение нестандартного расширения. Пусть $r \geqslant 1$. Положим

$$I^r = I \times I \times \ldots \times I \ (r \text{ множителей } I);$$
$$M^r = \{f: f \text{ отображает } I^r \text{ в } M,\ f \in \mathrm{Def}\,(V)\};$$

отдельно определим $I^0 = \{0\}$ и $M^0 = \{\langle 0, p\rangle: p \in M\}$. Наконец, определяется $M^* = \bigcup_{r\geqslant 0} M^r$. Для $f \in M^*$ пусть $r(f)$ есть то единственное натуральное r, для которого $f \in M^r$.

Далее, если $f \in M^*$, $q \geqslant r = r(f)$ и $\mathbf{i} = \langle i_1, \ldots, i_r, \ldots, i_q\rangle \in I^q$, то определим $f[\mathbf{i}] = f(i_1, \ldots, i_r)$. В частности, $f[\mathbf{i}] = f(\mathbf{i})$ при $q = r$. Отдельно определим $f(\mathbf{i}) = p$ при $f = \langle 0, p\rangle \in M^0$.

Бинарные отношения $\in^*$ и $=^*$, превращающие M^* в $\in$-структуру, вводятся следующим образом: если $r = \max\{r(f), r(g)\}$, то

$$f \in^* g, \text{ когда } \mathbf{Q} i_r \mathbf{Q} i_{r-1} \ldots \mathbf{Q} i_1\ (f[\mathbf{i}] \in g[\mathbf{i}]);$$
$$f =^* g, \text{ когда } \mathbf{Q} i_r \mathbf{Q} i_{r-1} \ldots \mathbf{Q} i_1\ (f[\mathbf{i}] = g[\mathbf{i}]);$$

здесь, естественно, $\mathbf{i} = i_1, \ldots, i_r$.

Если $s \in M$, то определим $s^* = \langle 0, s\rangle$; $s^* \in M^0$.

Наконец, определяем предикат стандартности st^* в M^*, полагая $\mathrm{st}^* f$ в M^*, когда выполнено $f = {}^*s$ для какого-либо $s \in M$. Таким образом, стандартными в M^* будут (с точностью до $=^*$) элементы M^0 и только они.

Теперь для любой st-$\in$-формулы с параметрами из M^* мы можем определить ее истинность или ложность в M^* в смысле интерпретации $=$, $\in$, st через $=^*$, $\in^*$, st^* соответственно.

Определим $r(\Phi) = \max\{r(f)\colon f$ встречается в $\Phi\}$, если Φ — формула с параметрами из M^*; если при этом $r \geqslant r(\Phi)$ и $\mathbf{i} \in I^r$, то через $\Phi[\mathbf{i}]$ условимся обозначать формулу, полученную из Φ заменой каждого параметра f на $f[\mathbf{i}]$; тем самым, $\Phi[\mathbf{i}]$ становится формулой с параметрами из M.

9.5. Теорема Лося. *Пусть Φ есть замкнутая $\in$-формула с параметрами из M^*, и $r \geqslant r(\Phi)$. Тогда*

$$\Phi \text{ истинна в } M^* \leftrightarrow \mathbf{Q}i_r \ldots \mathbf{Q}i_1\ (\Phi[i_1, \ldots, i_r] \text{ истинна в } M).$$

Доказательство. Для элементарных формул результат очевиден из определений. В проведении индуктивного шага по числу логических знаков можно ограничиться рассмотрением только $\neg$, &, $\exists$ из всех логических связок. Индуктивные шаги & и $\neg$ не представляют никаких затруднений: результат немедленно дается свойствами (Q4, Q5, Q6) квантора $\mathbf{Q}$. Индуктивный шаг $\exists$. Предполагая, что теорема доказана для формулы $\Phi(f)$, каково бы ни было $f \in M^*$, докажем ее для формулы $\exists x\ \Phi(x)$. Обозначим $r = r(\Phi)$.

Слева направо. Пусть в M^* истинно $\exists x\ \Phi(x)$, т. е. $\Phi(f)$ для подходящего $f \in M^*$. Пусть $p = \max\{r, r(f)\}$. Условимся для уменьшения громоздкости через $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ обозначать конечные последовательности вида

$$\langle i_1, \ldots, i_r\rangle \in I^r \text{ и } \langle i_1, \ldots, i_r, \ldots, i_p\rangle \in I^p$$

соответственно, а записи $\mathbf{Qi}$ и $\mathbf{Qj}$ понимать как

$$\mathbf{Q}\mathrm{i}_r \ldots \mathbf{Q}\mathrm{i}_1 \text{ и } \mathbf{Q}i_p \ldots \mathbf{Q}i_r \ldots \mathbf{Q}i_1$$

соответственно. По индуктивному предположению будет выполнено

$$\mathbf{Qj}\ \Phi(f)[\mathbf{j}].$$

Однако ясно, что $\Phi(f)[\mathbf{j}] \to \exists x \Phi(x)[\mathbf{j}]$ при любом $\mathbf{j}$. Следовательно, мы имеем $\mathbf{Qj}\ \exists x\ \Phi(x)[\mathbf{j}]$. Однако $r(\exists x\ \Phi(x)) = r \leqslant p$, а потому формула $\exists x\ \Phi(x)[\mathbf{j}]$ просто совпадает с $\exists x\ \Phi(x)[\mathbf{i}]$. Тем самым, лишние кванторы $\mathbf{Q}$ можно убрать, заменив приставку $\mathbf{Qj}$ на $\mathbf{Qi}$.

Справа налево. Пусть выполнено $\mathbf{Qi}\ \exists x\ \Phi(x)[\mathbf{i}]$. Множество

$$P = \{\langle \mathbf{i}, x\rangle\colon \mathbf{i} \in I^r \mathbin{\&} x \in M \mathbin{\&} \text{в } M \text{ истинно } \Phi(x)[\mathbf{i}]\}$$

принадлежит $\mathrm{Def}(V)$ согласно (Q 2). Для любого $\mathbf{i} \in I^r$ через $f(\mathbf{i})$ обозначим наименьшее в смысле упоминавшегося в 9.1 даваемого аксиомой конструктивности канонического полного упорядочения множество $p \in M$, удовлетворяющее $\langle \mathbf{i}, p\rangle \in P$ — если такие p есть, а иначе просто $f(\mathbf{i}) = \varnothing$. Учитывая определимость в V указанного полного упорядочения, ограниченного на V, мы заключаем, что f определима в V, т. е. $f \in M^*$. Однако, по определению, будет

$$\forall \mathbf{i} \in I^r\ (\exists x\ \Phi(x)[\mathbf{i}] \to \Phi(f)[\mathbf{i}]),$$

откуда $\mathbf{Qi}\ \exists x\ \Phi(x)[\mathbf{i}] \to \mathbf{Qi}\ \Phi(f)[\mathbf{i}]$. Однако левая часть этой импликации, т. е. правая часть эквивалентности теоремы для формулы $\exists x\ \Phi(x)$, как мы предположили, выполнена. Следовательно, верна и правая. Отсюда по индуктивному предположению имеем $\Phi(f)$ в M^*, и, наконец, $\exists x\ \Phi(x)$ в M^*. $\square$

Следствие. *Пусть* φ — *замкнутая* $\in$-*формула с параметрами из* M, *а* φ^* *получена из* φ *заменой каждого параметра* $p \in M$ *на* p^*. *Тогда выполнена эквивалентность*: *в* M *истинно* $\varphi \leftrightarrow$ *в* M^* *истинно* φ^*.

Доказательство очевидно: $\varphi^*[\mathbf{i}]$ совпадает с φ. □

9.6. Теорема. $\langle M^*;\ =^*;\ \in^*;\ \mathrm{st}^* \rangle$ — *модель* **IST**.

Доказательство. Следствие из теоремы Лося означает не что иное, как справедливость переноса в M^*. Отсюда следует истинность в M^* всех аксиом **ZFC**. Стандартизация в M^* гарантирована тем, что начальная модель обладает свойством: если $y \subseteq x \in M$, то $y \in M$. Остается проверить идеализацию.

Пусть, таким образом, $\varphi(x, a)$ есть $\in$-формула с параметрами из M^* и пусть $r(\varphi) = r$. Требуется доказать следующее:

$$\forall^{\mathrm{stfin}} A\ \exists x\ \forall a \in A\ \ \varphi(x, a) \rightarrow \exists x\ \forall^{\mathrm{st}} a\ \ \varphi(x, a)$$

в M^* (обратная импликация в I не нуждается в отдельном рассмотрении, ибо является следствием стандартизации, см. теорему 2.8).

Согласно теореме Лося, левая часть импликации может быть записана так:

$$\forall^{\mathrm{fin}} A \subseteq M\ \ \mathrm{Q}i_r\ \ldots\ \mathrm{Q}i_1\ \exists x\ \forall a \in A\ \ (\varphi(x, a)[i_1, \ldots, i_r]).$$

Напомним, что I состоит из всех конечных подмножеств M; поэтому вполне можно заменить букву A буквой i, подразумевая, что $i \in I$. Также зададим функцию $\tilde{A}\colon I^{r+1} \to M$, полагая $\tilde{A}(i_1, \ldots, i_r, i) = i$. После этого левая часть приобретает вид

$$\forall i\ \mathrm{Q}i_r\ \ldots\ \mathrm{Q}i_1\ \ (\exists x\ \forall a \in \tilde{A}\ \ \varphi(x, a))[i_1, \ldots, i_r, i].$$

Разумеется $\forall i$ можно заменить на $\mathrm{Q}i$. Снова по теореме Лося имеем в M^* истинно $\exists x\ \forall a \in \tilde{A}\ \ \varphi(x, a)$.

Теперь, учитывая определение стандартности в M^*, для вывода правой части I остается проверить следующее: в M^* истинно $a^* \in \tilde{A}$, каково бы ни было $a \in M$. По теореме Лося то, чего мы желаем, равносильно следующему:

$$\mathrm{Q}i\ \mathrm{Q}i_r\ \ldots\ \mathrm{Q}i_1\ \ (a \in \tilde{A}[i_1, \ldots, i_r, i]),$$

т. е. $\mathrm{Q}i\ \mathrm{Q}i_r\ \ldots\ \mathrm{Q}i_1\ (a \in i)$ по определению $\tilde{A}$, а это немедленно следует из свойства (Q1). □

9.7. Нарушение $\mathbf{Repl}_2$ в модели M^*. Возвращаясь к кардиналам $\varkappa_n$ из 9.1, отметим следующее. Ко всякому натуральному n имеется вполне определенная $\in$-формула $\Phi_n(\varkappa)$, определяющая кардинал $\varkappa_n$ в том смысле, что в M истинно: $\varkappa_n$ — единственное множество, для которого имеет место $\Phi_n(\varkappa)$.

Теперь пусть $\tau(\cdot)$ — формула, даваемая теоремой 5. Обозначим через $\Phi(n, \varkappa)$ формулу $n \in \mathbb{N}\ \&\ \mathrm{st}\, n\ \&\ \mathrm{st}\, \varkappa\ \&\ \tau(\ulcorner \Phi_n(\varkappa) \urcorner)$.

Теорема. *Следующий пример* $\mathbf{Repl}_2$ *ложен в* M^*:

$$\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\ \exists! \varkappa\ \ \Phi(n, \varkappa) \rightarrow \exists f\ \forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\ \Phi(n, f(n)).$$

Доказательство. *Истинность левой части в* M^*. Фиксируем натуральное n; требуется доказать $\exists! \varkappa\ \Phi(n^*, \varkappa)$ в M^*. Для проверки существования возьмем $\varkappa = \varkappa_n$. Тогда $\Phi_n(\varkappa)$ истинно в M, и потому $\Phi_n(\varkappa^*)$ истинно в M^*. По определению формулы Φ отсюда следует $\Phi(n^*, \varkappa^*)$ в M^*. Для проверки единственности пусть $\Phi(n^*, \varkappa')$ истинно в M^*. Тогда $\varkappa'$ — стандартный кардинал в M^*, т. е. можно считать, что $\varkappa'$ есть $\varkappa^*$ для некоторого $\varkappa \in M$. Проведя предыдущее рассуждение в обратную сторону, имеем $\varkappa = \varkappa_n$.

Ложность правой части. Пусть, напротив, $f \in M^*$ такова, что в M^* истинно: $\forall \varkappa\ [\Phi(n^*, \varkappa) \leftrightarrow \varkappa = f(n^*)]$, каково бы ни было натуральное n. Пусть $r = r(f)$. Согласно теореме Лося, мы имеем

$$\varkappa = \varkappa_n \leftrightarrow \mathrm{Q} i_r \ldots \mathrm{Q} i_1\ (\varkappa^* = f(n^*))\ [i_1, \ \ldots, \ i_r].$$

Однако $f \in \mathrm{Def}(V)$, отображение $s \mapsto s^*$ принадлежит $\mathrm{Def}(V)$ и действие квантора Q не выводит из $\mathrm{Def}(V)$ согласно (Q2). Тем самым, последовательность $\langle \varkappa_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ оказывается принадлежащей $\mathrm{Def}(V)$, что противоречит лемме 9.1. □

Итак, $\mathbf{Repl}_2$ не выполнено в M^* для указанной формулы Φ, кстати, не имеющей параметров. Отсюда следует, что все гипотезы, перечисленные в формулировке теоремы 3, кроме, быть может, $\mathbf{BRepl}_4$ и $\mathbf{BChc}_4$, также ложны в M^*. Теперь, чтобы доказать теорему 3, остается проверить, что гипотеза $\mathbf{BRepl}_4$ (тогда, следовательно, и $\mathbf{BChc}_4$) ложна в M^*.

Для опровержения $\mathbf{BRepl}_4$ воспользуемся даваемым теоремой 2.9 конечным множеством H, таким, что $\mathbb{S} \subseteq H$. Пусть ν — число элементов H, $K = \{1, 2, \ldots, \nu\}$, и h — биекция K на H. Если допустить, что гипотеза $\mathbf{BRepl}_4$ верна для множеств $X = Y = \mathbb{N}$ и формулы

$$\varphi(n, k) =_{\mathrm{def}} k \in K \ \&\ \Phi(n, h(k)) \ \&\ \mathrm{st}\, h(k),$$

то мы получили бы функцию $\tilde{k}: \mathbb{N} \to K$, такую, что $h(\tilde{k}(n))$ стандартно и удовлетворяет $\Phi(n, h(\tilde{k}(n)))$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Остается определить $\tilde{y}(n) = h(\tilde{k}(n))$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Функция $\tilde{y}$ обеспечивает $\mathbf{Repl}_2$ для данной формулы Φ, что противоречит выбору Φ.

Этим доказательство теоремы 3 Введения заканчивается. □

Понятно, что с предложенным способом получить опровержение $\mathbf{BRepl}_4$ и $\mathbf{BChc}_4$ в модели M^* нельзя надеяться избавиться от параметров ν, K, h (нестандартных, а h — даже неограниченное множество). Проблема 7 из Введения требует иной конструкции ядерной формулы, а возможно, и иной конструкции модели.

9.8. Класс опровергающей формулы. Пришло время дать доказательство и для теорем 7 и 8 Введения, уточняющих теорему 3. Нетрудно убедиться, что формула Sat (см. § 7) может быть приведена к Π_2^{st}-виду (т. е. она эквивалентна в **IST** некоторой Π_2^{st}-формуле). Следовательно, формула истинности τ может быть взята как в $\exists\Pi_2^{\mathrm{st}}$-виде, так и в $\forall\Sigma_2^{\mathrm{st}}$-виде (см. определение соответствующих формул перед началом доказательства леммы 7.2). В любом из этих видов (по желанию) могут быть, следовательно, взяты и формулы Φ и φ в 9.7. Этим завершается доказательство утверждения (а) теоремы 7, а также утверждения теоремы 8 по отношению к $\mathbf{BRepl}_4$.

Для доказательства утверждения (б) теоремы 7 воспользуемся несколько иной ядерной формулой, а именно следующей:

$$\Psi(n, T) =_{\mathrm{def}} n \in \mathbb{N} \ \&\ \mathrm{st}\, n \ \&\ \mathrm{Sat}(T) \ \&\ \exists \varkappa\ (\ulcorner \Phi_n(\varkappa) \urcorner \in T).$$

Таким образом, мы утверждаем, что в M^* ложна импликация:

$$\forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\ \exists T\ \ \Psi(n, T) \to \exists \tilde{T}\ \ \forall^{\mathrm{st}} n \in \mathbb{N}\ \ \Psi(n, \tilde{T}(n)).$$

Истинность левой части. Множество T, обеспечивающее левую часть при заданном натуральном n, дается применением в M^* факта 1 из доказательства леммы 7.2 к формуле $\Phi_n(\varkappa_n^*)$.

Ложность правой части. Если бы в самом деле существовал элемент $\tilde{T} \in M^*$, обладающий указанным свойством, то мы снова получили бы определимость в V последовательности кардиналов $\varkappa_n$, поскольку было бы

$$\varkappa = \varkappa_n \leftrightarrow \mathbf{Q}i_r \ldots \mathbf{Q}i_1 \ (\ulcorner\Phi_n(\varkappa_n^*)\urcorner \in \tilde{T}(n^*)) \ [i_1, \ldots, i_r]$$

для любых n и $\varkappa$ (далее следует воспользоваться свойством (Q2) квантора $\mathbf{Q}$ для получения противоречия с леммой 9.1).

Между тем понятно, что Ψ является Π_2^{st}-формулой (точнее, без труда приводится к Π_2^{st}-виду, поскольку этот вид имеет в **IST** формула Sat). Этим закончено доказательство теоремы 7 Введения. □

Наконец, чтобы доказать теорему 8 по отношению к $\mathbf{BChc}_4$, пусть K, H и h взяты так, как указано выше в п. 9.7. Тогда $\mathbf{BChc}_4$ нарушается на множествах $X = \mathbb{N}$, $Y = \mathscr{P}^{\mathrm{fin}}(\mathbb{N})$ и формуле

$$\psi(n, t) =_{\mathrm{def}} t \subseteq K \ \& \ \Psi(n, h''t) \quad (\text{где } h''t = \{h(k)\colon k \in t\}),$$

которая относится к Π_2^{st} вместе с Ψ. □

§ 10. О некоторых других проблемах

Рассмотренные в настоящей статье «внешние» формы выделения, подстановки, выбора, собирания, а также теорема единственности отнюдь не исчерпывают список «внешних» аналогов теорем классической теории множеств, представляющих интерес для исследования в **IST**. Собственно, едва ли не каждое теоретико-множественное утверждение может поставить содержательный материал для такого исследования. Чтобы проиллюстрировать наш подход, рассмотрим для примера задачи, связанные с понятием *внешней мощности*.

Напомним, что множества X, Y *равномощны*, когда существует взаимно однозначное отображение $f\colon X$ на Y. Слово «отображение» в принципе может иметь два толкования: во-первых, как *множество* упорядоченных пар, удовлетворяющее известным требованиям, и, во-вторых, как отношение, определенное некоторой формулой и также удовлетворяющее соответствующим требованиям. В теории множеств **ZFC** оба толкования тождественны, однако в **IST** тождественность теряется, поскольку внешние формулы не обязательно определяют множества. Поэтому можно ожидать необычных эффектов от изучения тех отображений, которые определяются внешними формулами.

Например, понятно, что в **ZFC** множества

$$X = \{1, 2, \ldots, n\} \text{ и } Y = \{1, 2, \ldots, n, n+1\}, \ n \in \mathbb{N},$$

имеют разные мощности n и $n+1$, однако они равномощны в **IST** в том смысле, что существует (не являющееся множеством) внешнее взаимно однозначное отображение X на Y, например, следующее:

$$f(k) = \begin{cases} k, & \text{если } k \text{ стандартно}, \\ k+1, & \text{если } k \text{ нестандартно}. \end{cases}$$

Итак, конечные кардиналы n и $n+1$ равномощны с «внешней» точки зрения. То же самое имеет место для пар n^2 и $(n+1)^2$ и вообще для n^r и $(n+k)^r$, если $n \in \mathbb{N}$ бесконечно большое, а k и r стандартны. (Автор безрезультатно пытался доказать или опровергнуть внешнюю равномощность для n и $2n$, если n бесконечно большое.)

В то же время для бесконечных кардиналов такого простого способа «склейки» мощностей не видно. Поэтому вполне разумной выглядит следующая *гипотеза внешней неравномощности кардиналов*:

NEC: для любой пары неравномощных (в обычном смысле **ZFC**) бесконечных множеств X, Y не существует внешнего взаимно однозначного отображения X на Y.

(Точную формулировку мы оставляем читателю.)

Проблема 16. Доказать, что **NEC** совместна с **IST**.

Возможен и другой путь к подобного рода проблемам. Именно будем приходить к «внешним» проблемам, отправляясь не от внутренних множеств к внешним (т. е. двигаясь от более узкой совокупности объектов к более широкой), а от «наружных» к внешним. Мы имеем в виду следующее. Если M — некоторая модель **IST**, то внутренними по отношению к M будут элементы M, внешними — совокупности, определимые в M посредством внешних формул, а *наружными* — любые совокупности элементов M, имеющиеся в универсуме всех множеств (безразлично, определимые в M или нет). В исследованиях нестандартных структур понятия внешнего и наружного (в данном здесь их значении) обычно не различаются.

Таким образом, *наружной* мощностью некоторого множества $X \in M$ будет уместно назвать мощность множества всех элементов X в M, взятую в универсуме всех множеств. Известен метод построения нестандартных моделей, где все внутренние множества имеют одинаковую наружную мощность, см. [35] (хотя из текста [35] не вполне ясно, применим ли этот метод именно к построению моделей теории **IST**). «Внешний» вариант этой «наружной» теоремы мог бы быть сформулирован следующим образом:

EC: каковы бы ни были бесконечные неравномощные (в обычном смысле **ZFC**) множества X, Y, существует внешнее взаимно однозначное отображение X на Y.

Здесь точная формулировка уже неизбежна:

$$\forall^{\text{inf}} X\ \forall^{\text{inf}} Y\ \exists p\ [\{\langle x,\ y\rangle\colon\ \Phi(x,\ y,\ p)\} \text{ есть взаимно однозначное отображение } N \text{ на } Y \text{ (не обязательно множество)}]$$

для некоторой st-$\in$-формулы Φ со свободными переменными x, y, p. (Разумеется, прямолинейная запись типа $\forall X\ \forall Y\ \exists \Phi$ некорректна.)

Проблема 17. Доказать, что **EC** совместна с **IST** для какой-то формулы Φ.

Вероятно, на этом пути можно формулировать и другие проблемы такого же типа, более глубокие и интересные, но мы ограничиваемся уже сказанным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Альбеверио С. и др. Нестандартные методы в стохастическом анализе и математической физике.— М.: Наука, 1990.— 616 с.

[2] Вопенка П. Математика в альтернативной теории множеств.— М.: Мир, 1983.— 150 с.

[3] Гордон Е. И. Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Е. Нельсона // Сиб. мат. ж.— 1989.— Т. 30, № 1.— С. 89—95.

[4] Девис М. Прикладной нестандартный анализ.— М.: Мир, 1980.— 236 с.

[5] Звонкин А. К., Шубин М. А. Нестандартный анализ и сингулярные возмущения обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.— 1984.— Т. 39, вып. 2.— С. 77—127.

[6] Йех Т. Теория множеств и метод форсинга.— М.: Мир, 1973.— 148 с.

[7] Кановей В. Г. О корректности эйлерова метода разложения синуса на множители // Успехи мат. наук.— 1988.— Т. 43, вып. 4. — С. 57—82.

[8] Кановей В. Г. Теоретико-множественная неполнота теории внутренних множеств Эдварда Нельсона / Десятая Всесоюзная конференция по математической логике.— Алма-Ата, 1990.— С. 75.
[9] Кановей В. Г. Ограниченные множества в теории внутренних множеств Эдварда Нельсона / Нестандартный анализ. Третий Всесоюзный семинар. Саратов, октябрь 1990 год. Тезисы докладов.— Саратов, 1990.— С. 15—23.
[10] Кейслер Г., Чэн Ч. Теория моделей.— М.: Мир, 1977.— 614 с.
[11] Келли Дж. Общая топология.— М.: Наука, 1968.— 383 с.
[12] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Нестандартные методы анализа.— Новосибирск: Наука, 1990.— 346 с.
[13] Любецкий В. А. Оценки и пучки. О некоторых вопросах нестандартного анализа / Успехи мат. наук.— 1989.— Т. 44, вып. 4.— С. 99—153.
[14] Маккаи М. Допустимые множества и бесконечная логика / Справочная книга по математической логике. Часть I. Теория моделей.— М.: Наука, 1982.— С. 235—288.
[15] Научные математические чтения памяти М. Я. Суслина / Первая всероссийская школа по основаниям математики и теории функций.— Саратов, 16—21 октября 1979 г. Тезисы докладов.— Саратов, 1989.— 122 с.
[16] Нестандартный анализ / Третий Всесоюзный семинар. Саратов, октябрь, 1990 год. Тезисы докладов.— Саратов, 1990.— 46 с.
[17] Робинсон А. Введение в теорию моделей и математику алгебры.— М.: Наука, 1976.— 376 с.
[18] Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ? — М.: Наука, 1987.— 128 с.
[19] van den Berg I. Nonstandard Asymptotic Analysis — Berlin: Springer, 1987 / Lecture Notes in Math.— № 1249.
[20] Diener F. & Stroyan K. D. Syntactical methods in infinitesimal analysis // Nonstandard Analysis and its Applications / N. Cultand ed. / London Math. Soc. Student Texts 10.— Cambridge Univ. Press, 1988.— P. 258—281.
[21] Diener F. & Diener M. Some asymptotic results in ordinary differential equations // Nonstandard Analysis and its Applications / Ed. N. Cutland / London Math. Soc. Student Texts 10.— Cambridge Univ. Press, 1988.— P. 282—297.
[22] Henson C. W. & Keisler H. G. The strength of nonstandard analysis // J. Symbol. Log.— 1986.— V. 51, № 2.— P. 377—386.
[23] Hrbaček K. Axiomatic foundations for nonstandard analysis // Fundamenta Math.— 1978.— V. 98, № 1.— P. 1—19.
[24] Hrbaček K. Nonstandard set theory // Amer. Math. Monthly.— 1979.— V. 86, № 8.— P. 659—677.
[25] Jansana R. On the mathematical content of the theory of classes KM // Zeitschr. für math. Log. und Grundl. Math. — 1989.— Bd 35, № 7.— S. 399—412.
[26] Kawaï T. Axiom systems for nonstandard set theory // Logic Symposia Hakone 1979, 1980.— Berlin: Springer, 1981 / Lecture Notes in Math.— N 891.— P. 57—65.
[27] Kawaï T. Nonstandard analysis by axiomatic methods // Southeast Asia Conference on Logic (Singapore, 1981).— Amsterdam, North Holland, 1983 / Studies in Logic and Foundations of Math.— № 111.— P. 55—76.
[28] Lindstrøm T. An invitation to nonstandard analysis // Nonstandard Analysis and its Applications (N. Cutland ed.) London Math. Soc. Student Texts 10.— Cambridge Univ. Press, 1988.— P. 1.— 105.
[29] Loos O. A non-standard approach to the Lebesque integral // Mathématiques finitaires et analyse non standard — Paris: Journées S. M. F. Luminy Mai, 1985.— P. 27—35.
[30] Lutz R. & Gose M. Nonstandard Analysis: a Practical Guide with Applications.— Berlin: Springer, 1981 / Lecture Notes in Math.— № 881.

[31] N e l s o n E. Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis // Bull. Amer. Math. Soc.— 1977.— V. 83, № 6.— P. 1165—1198.
[32] N e l s o n E. The syntax of nonstandard analysis // Ann. Pure and Applied Logic.— 1988.— V. 38, № 2.— P. 123—134.
[33] R o b e r t A. Non-Standard Analysis— N. Y.: Wiley, 1988.
[34] R o b i n s o n A. Non-Standard Analysis.— Amsterdam: North Holland, 1966.
[35] R o s s D. The special model axiom in nonstandard analysis // J. Symbol. Log. — 1990.— V. 55, № 3.— P. 1233—1242.

Московский институт
инженеров железнодорожного
транспорта

Институт новых технологий (Москва)

Поступила в редакцию
14 мая 1991 г.