МАТЕМАТИКА 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 402–415.

УДК 514.142

© *А. А. Бойков, А. В. Селиверстов*

О КУБЕ И ПРОЕКЦИЯХ ПОДПРОСТРАНСТВА

Рассмотрено взаимное расположение вершин единичного многомерного куба, аффинного подпространства и его ортогональных проекций на координатные подпространства. Даны верхние и нижние ограничения размерности подпространства, при которых некоторая ортогональная проекция всегда сохраняет отношение инцидентности подпространства и вершин куба. Также рассмотрены некоторые косоугольные проекции. Кроме того, дан краткий обзор истории развития многомерной начертательной геометрии. Аналитические и синтетические методы в геометрии обособились с XVII века. Хотя анализ и синтез тесно переплетаются, с этого времени многие геометры и инженеры делают тонкое различие. Указания на идею о многомерном пространстве можно найти в работах XVIII века, но настоящее развитие началось с середины XIX века. Вскоре такие работы появились и на русском языке. Далее многие математики обобщали свои теории на многомерный случай. Наши новые результаты получены аналитическими и синтетическими методами. Они иллюстрируют сложность задач псевдобулева программирования, поскольку снижение размерности задачи методом ортогонального проектирования встречает препятствие в худшем случае.

Ключевые слова: многомерный куб, аффинное подпространство, проекция, дискретная оптимизация, история математики.

DOI: 10.35634/vm230302

Введение

Рассмотрим n-мерное вещественное евклидово пространство с фиксированной системой декартовых координат, где координатные оси ортогональны друг другу. Вершинами единичного многомерного куба служат точки, у которых каждая из координат равна нулю или единице. Эти вершины для краткости называются $(0,1)$-точками. Сформулируем задачу. Дано аффинное подпространство L, которое не инцидентно никакой $(0,1)$-точке. Существует ли такая ортогональная проекция на координатное подпространство малой размерности, забывающая некоторые координаты, при которой образ подпространства L также не инцидентен никакой $(0,1)$-точке? Важно, что при рассматриваемой проекции образом куба снова служит куб меньшей размерности. Как обычно, куб на плоскости называется квадратом.

Рассматриваемая задача тесно связана с задачами псевдобулева программирования и различными обобщениями задач о сумме подмножества [1, 2] и о рюкзаке [3–6]. Понижение размерности при проектировании, вообще говоря, снижает вычислительную сложность, а налагаемые условия обеспечивают корректность сведения исходной задачи к задаче от меньшего числа переменных. Распознавание $(0,1)$-точек на гиперплоскости, заданной одним уравнением с рациональными коэффициентами, возможно за псевдополиномиальное время методом динамического программирования [7]. Но мы покажем, что в худшем случае гиперплоскость не может служить образом подпространства L при рассматриваемых ограничениях. С другой стороны, если подпространство содержит несколько $(0,1)$-точек, то его проекция может содержать меньшее число $(0,1)$-точек, например, лишь одну. Это показывает, что задачи перечисления труднее задач распознавания хотя бы одной $(0,1)$-точки [8,9].

Дальнейшее обобщение этой задачи связано с рассмотрением косоугольной проекции на координатное подпространство, при которой образом куба служит уже не куб меньшей размерности, а другой многогранник. Такой многогранник называется зонотопом. Если образом каждой $(0,1)$-точки служит точка с целыми координатами и каждая точка зонотопа с целыми координатами служит образом хотя бы одной $(0,1)$-точки, то соответствующая задача псевдобулева программирования сводится к задаче целочисленного программирования. Примером косоугольной проекции, удовлетворяющей этим условиям, служит отображение из $\mathbb{R}^3$ на $\mathbb{R}^2$, сопоставляющее точке с координатами (x,y,z) точку с координатами $(x,y-z)$. Образом куба служит прямоугольник с отношением длин сторон $2:1$. Образами $(0,1)$-точек служат вершины этого прямоугольника и середины длинных сторон.

Также близкие экстремальные задачи о конфигурациях точек и прямых связаны с помехоустойчивым кодированием и различными задачами дискретной оптимизации [10–12]. Однако в этой работе мы подробно рассмотрим методы, близкие к начертательной геометрии и теории многогранников в многомерных пространствах [13]. В следующем разделе дан краткий исторический обзор развития многомерной начертательной геометрии. За ним следует раздел с определениями и напоминанием некоторых известных результатов. А после него представлены новые результаты, полученные аналитическими и синтетическими методами.

§ 1. Замечание об истории многомерной геометрии

Идеи о многомерном пространстве высказывались еще в XVIII веке [14, с. 183–184]. Но бурное развитие многомерной геометрии началось лишь в середине XIX века, когда (не позже 1852 года) Людвиг Шлефли (Ludwig Schläfli) доказал, что существует ровно шесть четырехмерных правильных многогранников и по три правильных многогранника в размерностях пять или выше. Впрочем, многие работы в этой области не были оценены современниками, долгое время оставаясь неопубликованными [15]. Важную роль сыграла лекция Римана, прочитанная в 1854 году. На русском языке одна из ранних работ [16], посвященных четырехмерной геометрии, была издана в 1877 году в Тифлисе (Тбилиси), где Николай Иванович Гулак работал преподавателем математики. Гулак был знаком с работами Лобачевского и Римана, но использовал непривычные названия, например, плоско-плоскость для гиперплоскости в четырехмерном пространстве. Более интенсивно развивались аналитические методы, ставшие основой дифференциальной геометрии. Обособление аналитической и синтетической геометрии, начатое в XVII веке, усилилось в первой половине XIX века, хотя не все современники делали различие между этими подходами [17]. При этом аналитические методы, позволяющие работать с многомерными пространствами, возникли гораздо раньше, чем был признан их геометрический смысл. С другой стороны, начиная с XVII века, развивается проективная геометрия, ставшая основой для развития геометрии, включая неклассические модели [18, 19].

Быстрое развитие синтетических методов начертательной геометрии многомерного пространства, изучающей свойства проекций на подпространства малой размерности, приходится на начало XX века. Это находит применение в геологии и неорганической химии [20–22]. Ранее эти методы развивались Евграфом Степановичем Федоровым [23]. В 1924–1926 годах опубликованы работы Владимира Никитича Лодочникова об изображении многокомпонентных систем. Его статья [24] сопровождается аннотацией на французском языке. В 1936–1938 годах опубликован ряд оригинальных работ Виктора Яковлевича Аносова об изображении многокомпонентных систем. Ссылки на эти и близкие работы можно найти в статье [25]. Отметим, что до весны 1941 года эти работы также сопровождались переводом названий на французский язык.

В 1935 году в Институте общей и неорганической химии (ИОНХ АН СССР) была создана Геометрическая бригада, которая занималась применением геометрических и топологических методов к изучению химического равновесия, в частности, методами изображения диаграмм состав–свойство для многокомпонентных систем. Наиболее удачным для описания многокомпонентных систем оказался чертеж, который предложил Вячеслав Петрович Радищев. Об описании пятикомпонентной системы было доложено на заседании Геометрической бригады ИОНХ АН СССР 11 апреля 1937 года. Позже Радищев рассматривал более сложные системы [25]. Чертеж Радищева состоит из совмещенных проекций на плоскости. При этом на чертеже удобно строить касательные, которые при аналитическом подходе соответствуют частным производным. Позднее применение моделей четырехмерного пространства к построению диаграмм состояния пятикомпонентных систем рассматривал Г. А. Вачнадзе [26]. Его работа сопровождается подробным рефератом на грузинском языке.

Для теоретических исследований полезен гиперэпюр Наумович, на котором совмещаются проекции на координатные гиперплоскости. В частности, метод был представлен на семинаре Н. Ф. Четверухина [27]. Недавнее развитие методов визуализации позволяет использовать гиперэпюр на практике. Нина Васильевна Наумович работала в Ростове-на-Дону, где работал известный геометр Д. Д. Мордухай-Болтовской. Во второй половине XX века большой вклад в развитие синтетической многомерной геометрии внесли Залман Алтерович Скопец, Валентина Николаевна Первикова [28], Ираклий Спиридонович Джапаридзе [29,30], Павел Владимирович Филиппов [31], Кирилл Иванович Вальков [32], Владимир Александрович Пеклич [33, 34], Владимир Яковлевич Волков [35] и их многочисленные ученики. Многие из них преподавали начертательную геометрию в вузах.

В настоящее время методы многомерной начертательной геометрии применяются для конструирования архитектурных и технических поверхностей по заданным условиям [36], для моделирования многокомпонентных систем в физико-химическом анализе и вообще при моделировании многофакторных процессов [35,37]. В 2019 году на конференции «Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе» были представлены два оригинальных приложения проекционных моделей многомерных пространств — визуализация мнимых продолжений алгебраических кривых на комплексной плоскости [38] и применение сечений фрактальных объектов многомерного пространства (гиперфракталов) для графического и предметного дизайна [39].

§ 2. Предварительные сведения

Плоскостью называется двумерное пространство. Гиперплоскостью называется подпространство, размерность которого на единицу меньше размерности объемлющего пространства. В частности, прямая на плоскости — это гиперплоскость. Плоскость в трехмерном пространстве — тоже гиперплоскость.

Аффинной оболочкой называется наименьшее по включению аффинное подпространство, содержащее данное множество точек. Например, аффинной оболочкой двух различных точек служит прямая; аффинной оболочкой двух пересекающихся прямых служит плоскость; аффинной оболочкой двух скрещивающихся прямых служит трехмерное пространство. Размерность аффинной оболочки не зависит от размерности объемлющего пространства.

Однополостный гиперболоид в $\mathbb{R}^3$ служит примером линейчатой поверхности, на которой лежат два семейства прямых. Прямые любого из семейств заметают гиперболоид. При этом гиперболоид определяется тремя лежащими на нем попарно скрещивающимися прямыми. Одному семейству принадлежат прямые, либо пересекающие каждую из трех исходно заданных прямых, либо пересекающие две и параллельные третьей исходно заданной прямой. Более того, любые три попарно скрещивающиеся прямые в $\mathbb{R}^3$, которые не параллельны одной плоскости, лежат на некотором однополостном гиперболоиде.

§ 3. Основные результаты

Рассмотрим ортогональную проекцию на координатное подпространство, которая забывает некоторые из координат. Такая проекция отображает $(0,1)$-точки в $(0,1)$-точки. Для подпространства L общего положения существует ортогональная проекция, при которой образом L служит гиперплоскость в координатном подпространстве. Но в частных случаях искомой проекции может не существовать.

Пример 1. Рассмотрим три точки в трехмерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ с координатами $(0,1,1/2)$, $(1,2,0)$ и $(-1,0,1)$, соответственно. Эти точки лежат на одной прямой L, которую можно задать системой из двух уравнений $x_2 = x_1 + 1$ и $x_3 = (-x_1 + 1)/2$. Но ортогональная проекция этого множества из трех точек на любую координатную плоскость содержит некоторую $(0,1)$-точку. С другой стороны, при косоугольной проекции $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ вдоль прямой L, образом прямой L служит одна точка. И прообраз этой точки не содержит никакой $(0,1)$-точки.

Замечание 1. Пусть прямая G параллельна координатной оси (или совпадает с этой осью) и проходит через некоторую $(0,1)$-точку. Если прямая G пересекает подпространство L, то при проектировании вдоль G образ подпространства L инцидентен некоторой $(0,1)$-точке. Мы будем использовать это описание препятствия к существованию искомой проекции.

Теорема 1. *В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$ существует бесконечное множество прямых, каждая из которых не инцидентна никакой $(0,1)$-точке, но ортогональная проекция такой прямой L на любую координатную плоскость инцидентна некоторой $(0,1)$-точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим три скрещивающиеся прямые G, G' и G'', каждая прямая параллельна своей координатной оси и проходит через некоторую $(0,1)$-точку. Выбор этих прямых соответствует выбору трех ребер куба, из которых любые два не пересекаются и не параллельны друг другу. Выберем на прямой G точку общего положения. Через эту точку проходит некоторая прямая L, пересекающая обе прямые G' и G''. Такие прямые L параметризуются точками на прямой G и лежат на однополостном гиперболоиде. Прямая L общего положения не инцидентна ни одной из $(0,1)$-точек. Но ортогональная проекция на координатную плоскость инцидентна $(0,1)$-точке, лежащей на G, G' или G''. □

В доказательстве теоремы 1 рассмотрен набор из трех ребер 3-мерного куба, лежащих на попарно скрещивающихся прямых. Покажем, что группа симметрий куба транзитивно действует на множестве таких троек ребер, иными словами, все тройки преобразуются друг в друга.

Теорема 2. *Группа симметрий 3-мерного куба транзитивно действует на множестве троек попарно скрещивающихся ребер этого куба.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем расширять набор ребер до максимального. Первое ребро можно выбрать произвольно, например, на оси абсцисс, поскольку группа симметрий транзитивно действует на ребрах куба. Ребро, параллельное оси ординат или лежащее на этой оси, выбирается из двух вариантов, которые переходят друг в друга при отражении относительно плоскости, которая ортогональна первому выбранному ребру и проходит через центр куба. При этом первое выбранное ребро остается инвариантным, хотя его вершины меняются местами. Третье ребро набора однозначно определяется выбором первых двух ребер. □

Теорема 3. *В евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^5$ *существует бесконечное семейство плоскостей, каждая из которых не инцидентна никакой* $(0,1)$*-точке, но ортогональная проекция такой плоскости* L *на любую координатную гиперплоскость инцидентна некоторой* $(0,1)$*-точке.*

Доказательство. Рассмотрим пять скрещивающихся прямых G, G', G'', $G^\dagger$ и $G^\ddagger$, каждая прямая параллельна своей координатной оси и проходит через некоторую $(0,1)$-точку в $\mathbb{R}^5$. Выбор этих прямых соответствует выбору пяти ребер куба, из которых любые два не пересекаются и не параллельны друг другу. Выберем на прямой G точку общего положения. Повторяя рассуждения из теоремы 1, видим, что через эту точку проходит некоторая прямая L', пересекающая обе прямые G' и G''. И через ту же точку на прямой G проходит некоторая прямая $L^\dagger$, пересекающая обе прямые $G^\dagger$ и $G^\ddagger$. Обе прямые L' и $L^\dagger$ лежат в некоторой плоскости L. Для точки общего положения на прямой G, построенная плоскость L не инцидентна ни одной из $(0,1)$-точек. Но ортогональная проекция на координатную гиперплоскость инцидентна некоторой $(0,1)$-точке, которая служит образом точки, лежащей на G, G', G'', $G^\dagger$ или $G^\ddagger$. Такие плоскости параметризуются точками на прямой G, следовательно, их бесконечно много. □

Непосредственным обобщением теоремы 3 на случай высших размерностей служит следующая теорема.

Теорема 4. *В евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^{2n+1}$ *существует бесконечное семейство* n*-мерных подпространств, каждое из которых не инцидентно никакой* $(0,1)$*-точке, но ортогональная проекция такого подпространства* L *на любую координатную гиперплоскость инцидентна некоторой* $(0,1)$*-точке.*

Доказательство. По аналогии с доказательством теоремы 3, выберем набор попарно скрещивающихся прямых $G, G^{(2)}, \ldots, G^{(2n+1)}$, каждая параллельна своей координатной оси и проходит через некоторую $(0,1)$-точку. Далее, по теореме 1, строим n прямых, k-я прямая проходит через фиксированную точку общего положения на первой прямой G и пересекает очередную пару прямых $G^{(2k)}$ и $G^{(2k+1)}$. Эти n прямых пересекаются в одной точке на прямой G, следовательно, они лежат в некотором n-мерном подпространстве. □

Теорема 5. *Пусть положительные целые числа* n *и* s *таковы, что в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^{n-1}$ *существует* s*-мерное подпространство* L*, которое не инцидентно никакой* $(0,1)$*-точке, но ортогональная проекция этого подпространства на любую координатную гиперплоскость инцидентна некоторой* $(0,1)$*-точке. Тогда в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$ *существует* $(s+1)$*-мерное подпространство* L'*, которое не инцидентно никакой* $(0,1)$*-точке, но ортогональная проекция этого подпространства на любую координатную гиперплоскость инцидентна некоторой* $(0,1)$*-точке.*

Доказательство. Подпространство L пересекает некоторые прямые $G^{(1)}, G^{(2)}, \ldots, G^{(n-1)}$, параллельные первым координатным осям, в точках $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n-1)}$, соответственно. Выберем на n-й координатной оси точку $A^{(n)}$ в общем положении. В частности, точка $A^{(n)}$ не принадлежит подпространству L и не совпадает с какой-либо $(0,1)$-точкой. Тогда подпространство L' равно аффинной оболочке объединения L и $A^{(n)}$. Его размерность $\dim L' = 1 + \dim L$. □

Пример 2. Рассмотрим плоскость в $\mathbb{R}^4$, заданную двумя уравнениями $x_3 = x_1 + x_2 + 1$ и $x_4 = (-x_1 + x_2 + 1)/2$. Непосредственная проверка показывает, что эта плоскость не проходит через какую-либо $(0,1)$-точку. Однако она проходит через точки

$$(-1,0,0,1), \quad (0,-1,0,0), \quad (0,1,2,1), \quad (1,0,2,0), \quad (0,0,1,1/2),$$

у каждой из которых ровно одна координата отлична от нуля и от единицы. Следовательно, ортогональная проекция этой плоскости на любую координатную гиперплоскость инцидентна некоторой $(0,1)$-точке.

Пример 3. Рассмотрим плоскость в $\mathbb{R}^5$, заданную уравнениями $x_3 = (1 + x_2 + x_4)/2$, $x_1 = -x_2$ и $x_5 = -x_4$. Непосредственная проверка показывает, что эта плоскость не проходит через какую-либо $(0,1)$-точку. Однако она проходит через точки $(-1,1,1,0,0)$, $(1,-1,0,0,0)$, $(0,0,1/2,0,0)$, $(0,0,0,-1,1)$ и $(0,0,1,1,-1)$, у каждой из которых ровно одна координата отлична от нуля и от единицы. Следовательно, ортогональная проекция этой плоскости на любую координатную гиперплоскость инцидентна некоторой $(0,1)$-точке.

Действие группы симметрий куба позволяет легко получать новые примеры. С другой стороны, если размерность подпространства достаточно мала, то искомая проекция вдоль некоторой координатной оси всегда существует.

Теорема 6. *В евклидовом пространстве размерности не ниже четырех, если прямая L не инцидентна никакой $(0,1)$-точке, то существует ортогональная проекция на некоторое трехмерное координатное подпространство, для которой образ прямой L также не инцидентен никакой $(0,1)$-точке.*

Доказательство. Применим индукцию по размерности объемлющего пространства.

Если для некоторого индекса k и некоторой константы $c \notin \{0,1\}$ прямая L удовлетворяет уравнению $x_k = c$, то выберем проекцию на координатное подпространство, содержащее k-ю координатную ось.

Если для некоторого индекса k и некоторой константы $c \in \{0,1\}$ прямая L удовлетворяет уравнению $x_k = c$, то рассмотрим проекцию прямой L вдоль k-й координатной оси на координатную гиперплоскость $x_k = 0$. Такая проекция прямой L снова не инцидентна никакой $(0,1)$-точке. Если размерность по-прежнему выше трех, по предположению индукции, для нее существует искомая проекция на координатное подпространство.

Пусть прямая L задана уравнениями вида $x_k = a_k + b_k x_1$, где $b_k \neq 0$ для индексов $k \geqslant 2$.

Если проекция прямой L вдоль k-й координатной оси накрывает некоторую $(0,1)$-точку, то на прямой L лежит точка, у которой каждая координата, кроме k-й, принадлежит множеству $\{0,1\}$. Покажем, что на прямой L лежит не более двух таких точек, соответствующих разным координатным осям. Так выделено не более двух координатных осей. Тогда искомая проекция забывает любые координаты, кроме выделенных координат.

На прямой L лишь две точки с $x_1 \in \{0,1\}$. Пусть у каждой из них ровно одна координата не принадлежит множеству $\{0,1\}$. Пусть, например, $a_2 \notin \{0,1\}$. Тогда для $k \geqslant 3$ должно выполняться $a_k \in \{0,1\}$. Пусть $a_3 + b_3 \notin \{0,1\}$. Тогда $a_2 + b_2 \in \{0,1\}$. В пространстве размерности не ниже четырех для $k \geqslant 4$ выполнено $a_k \in \{0,1\}$ и $a_k + b_k \in \{0,1\}$. Следовательно, для $k \geqslant 4$ выполнено либо $a_k = 0$ и $b_k = 1$, либо $a_k = 1$ и $b_k = -1$. В любом случае в точках прямой L с $x_1 \notin \{0,1\}$ также $x_4 \notin \{0,1\}$. Следовательно, не более двух точек на L обладают указанным свойством: ровно одна координата не принадлежит множеству $\{0,1\}$. □

Теорема 7. *В восьмимерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^8$, если плоскость L не инцидентна никакой $(0,1)$-точке, то существует ортогональная проекция на некоторое семимерное координатное подпространство, для которой образ плоскости L также не инцидентен никакой $(0,1)$-точке.*

Доказательство. Если плоскость $L \subset \mathbb{R}^8$ параллельна некоторой координатной оси, то образом L при проекции вдоль этой оси служит прямая в семимерном координатном пространстве, не инцидентная никакой $(0,1)$-точке.

Предположим, что плоскость $L \subset \mathbb{R}^8$ не параллельна никакой из координатных осей, но пересекает каждую прямую $G^{(1)}, \ldots, G^{(8)}$, где для каждого индекса k прямая $G^{(k)}$ совпадает или параллельна k-й координатной оси, проходит через некоторую $(0,1)$-точку и скрещивается с каждой из оставшихся семи прямых $G^{(j)}$ для $j \neq k$. Каждая из семи прямых $G^{(1)}, \ldots, G^{(7)}$ лежит в одной из двух параллельных гиперплоскостей, заданных уравнениями $x_8 = 0$ и $x_8 = 1$, соответственно. Эти гиперплоскости служат аффинными оболочками двух противолежащих фасет куба. Пересечением L с каждой из этих двух гиперплоскостей служит некоторая прямая. Обозначим эти две прямые через $L^\dagger$ и $L^\ddagger$, соответственно. Согласно теореме 6, каждая из прямых $L^\dagger$ и $L^\ddagger$ пересекает не более трех из семи прямых $G^{(1)}, \ldots, G^{(7)}$. Пусть, например, прямая $L^\dagger$ пересекает прямые $G^{(1)}$, $G^{(2)}$ и $G^{(3)}$, а прямая $L^\ddagger$ пересекает прямые $G^{(4)}$, $G^{(5)}$ и $G^{(6)}$. Тогда прямая $G^{(7)}$ не пересекает плоскость L. Противоречие. □

Замечание 2. По аналогии с теоремой 7, легко получить нижнюю границу типа $O(\log_2 n)$ для размерности подпространства $L \subset \mathbb{R}^n$, которое пересекает каждую прямую $G^{(1)}, \ldots, G^{(n)}$, где для каждого индекса $k \leqslant n$ прямая $G^{(k)}$ совпадает или параллельна k-й координатной оси, проходит через некоторую $(0,1)$-точку и скрещивается с каждой из оставшихся прямых $G^{(j)}$ для $j \neq k$. Однако известная верхняя граница, основанная на теоремах 4 и 5, составляет $\lfloor n/2 \rfloor$.

§ 4. Заключение

Полученные результаты иллюстрируют сложность задач псевдобулева программирования, поскольку снижение размерности задачи методом ортогонального проектирования встречает препятствие в худшем случае. Однако такое препятствие возникает лишь при специальных расположениях аффинного подпространства. В случае подпространства общего положения существует проекция, при которой образом подпространства служит гиперплоскость в пространстве меньшей размерности, не инцидентная никакой из вершин единичного куба. Вообще говоря, таких проекций может быть много. И в разных случаях вычислительная сложность проверки отсутствия вершин куба, инцидентных полученной гиперплоскости, может оказаться больше или меньше, чем для других проекций. Выбор оптимальной проекции в этой работе не обсуждается.

С другой стороны, хотя мы рассмотрели вещественные пространства, некоторые результаты переносятся на неклассические модели аффинной геометрии [19, 40]. Особенно интересны конечные геометрии, связанные с задачами комбинаторики [10]. Однако для конечных геометрий уже нельзя утверждать существование бесконечных семейств при фиксированной размерности.

Например, в аффинном пространстве над полем вычетов по модулю три, каждая прямая содержит ровно три точки. Поэтому здесь доказательство аналога теоремы 6 становится тривиальным. Также на случай таких пространств легко обобщаются все рассмотренные примеры и теорема 7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Селиверстов А. В. Двоичные решения для больших систем линейных уравнений // Прикладная дискретная математика. 2021. № 52. С. 5–15. https://doi.org/10.17223/20710410/52/1

2. Antonopoulos A., Pagourtzis A., Petsalakis S., Vasilakis M. Faster algorithms for k-subset sum and variations // Journal of Combinatorial Optimization. 2023. Vol. 45. Issue 1. Article number: 24. https://doi.org/10.1007/s10878-022-00928-0
3. Cacchiani V., Iori M., Locatelli A., Martello S. Knapsack problems — An overview of recent advances. Part I: Single knapsack problems // Computers and Operations Research. 2022. Vol. 143. 105692. https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105692
4. Cacchiani V., Iori M., Locatelli A., Martello S. Knapsack problems — An overview of recent advances. Part II: Multiple, multidimensional, and quadratic knapsack problems // Computers and Operations Research. 2022. Vol. 143. 105693. https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105693
5. D'Ambrosio C., Laureana F., Raiconi A., Vitale G. The Knapsack Problem with forfeit sets // Computers and Operations Research. 2023. Vol. 151. 106093. https://doi.org/10.1016/j.cor.2022.106093
6. Jozefiak A., Shepherd F. B., Weninger N. A knapsack intersection hierarchy // Operations Research Letters. 2023. Vol. 51. Issue 1. P. 72–78. https://doi.org/10.1016/j.orl.2022.12.001
7. Alon T., Halman N. Strongly polynomial FPTASes for monotone dynamic programs // Algorithmica. 2022. Vol. 84. Issue 10. P. 2785–2819. https://doi.org/10.1007/s00453-022-00954-8
8. Леонтьев В. К., Гордеев Э. Н. О числе решений системы булевых уравнений // Автоматика и телемеханика. 2021. Вып. 9. С. 150–168. https://doi.org/10.31857/S0005231021090063
9. Гордеев Э. Н., Леонтьев В. К. О числе решений диофантова уравнения и проблеме Фробениуса // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62. № 9. С. 1447–1457. https://www.mathnet.ru/rus/zvmmf11445
10. Buekenhout F. (ed.) Handbook of incidence geometry: Buildings and foundations. North Holland, 1995. https://doi.org/10.1016/B978-0-444-88355-1.X5000-2
11. Petunin A. A., Chentsov A. G., Chentsov P. A. Some applications of optimization routing problems with additional constraints // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 2. С. 187–210. https://doi.org/10.35634/vm220203
12. Ченцов А. Г., Ченцов А. А. Динамическое программирование и вопросы разрешимости задачи маршрутизации «на узкие места» с ресурсными ограничениями // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2022. Т. 32. Вып. 4. С. 569–592. https://doi.org/10.35634/vm220406
13. Devadoss S. L., Harvey M. Unfoldings and nets of regular polytopes // Computational Geometry. 2023. Vol. 111. 101977. https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2022.101977
14. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Геометрия // История математики. Т. 3. М.: Наука, 1970. С. 153–221.
15. Polo-Blanco I. Alicia Boole Stott, a geometer in higher dimension // Historia Mathematica. 2008. Vol. 35. Issue 2. P. 123–139. https://doi.org/10.1016/j.hm.2007.10.008
16. Гулак Н. Опыт геометрии о четырех измерениях. Геометрия синтетическая. Тифлис: типография С. Г. Меликова, 1877.
17. Lorenat J. Synthetic and analytic geometries in the publications of Jakob Steiner and Julius Plücker (1827–1829) // Archive for History of Exact Sciences. 2016. Vol. 70. Issue 4. P. 413–462. https://doi.org/10.1007/s00407-015-0174-8
18. Del Centina A. Desargues's concepts of involution and transversal, their origin, and possible sources of inspiration // Archive for History of Exact Sciences. 2022. Vol. 76. Issue 6. P. 573–622. https://doi.org/10.1007/s00407-022-00296-5
19. Cerroni C. Non-Desarguian geometries and the foundations of geometry from David Hilbert to Ruth Moufang // Historia Mathematica. 2004. Vol. 31. Issue 3. P. 320–336. https://doi.org/10.1016/S0315-0860(03)00049-1
20. Воробьева В. П., Зеленая А. Э., Луцык В. И. Использование 3D компьютерной модели T–x–y диаграммы ZrO_2–SiO_2–Al_2O_3 для разрешения противоречий в исходных данных // Журнал неорганической химии. 2021. Т. 66. № 6. С. 798–806. https://doi.org/10.31857/S0044457X21060222
21. Vorob'eva V. P., Zelenaya A. E., Lutsyk V. I., Sineva S. I., Starykh R. V., Novozhilova O. S. High-temperature area of the Fe–Ni–Co–Cu phase diagram: experimental study and computer design //

Journal of Phase Equilibria and Diffusion. 2021. Vol. 42. Issue 2. P. 175–193.
https://doi.org/10.1007/s11669-021-00863-3

22. Lutsyk V. I., Vorob'eva V. P., Zelenaya A. E., Lamueva M. V. 3D computer model of the Co–Cu–CoS–Cu_2S subsystem T–x–y diagram above 800°C // Journal of Mining and Metallurgy, Section B: Metallurgy. 2021. Vol. 57. Issue 3. P. 319–329. https://doi.org/10.2298/JMMB190307028L
23. Федоровъ Е. С. Графическія операціи съ четырьмя независимыми перемѣнными // Извѣстія Россійской Академіи Наукъ. VI серія. 1918. Т. 12. Вып. 7. С. 615–624. http://mi.mathnet.ru/im5928
24. Лодочников В. Н. Простейшие способы изображения многокомпонентных систем // Известия Института физико-химического анализа. 1924. Т. 2. Вып. 2. С. 255–351.
25. Радищев В. П. Методы изображения шестикомпонентных и более сложных систем в проекциях правильных многомерных фигур // Известия Сектора физико-химического анализа. 1941. Т. 14. С. 153–173.
26. Вачнадзе Г. А. Некоторые задачи начертательной геометрии четырехмерного пространства // Труды Грузинского политехнического института. 1955. № 2 (37). С. 193–214.
https://cat.webtute.ru/pub.php?id=9401
27. Мордухай-Болтовский Д. Д. Параллельность и перпендикулярность прямых, плоскостей и гиперплоскостей в трехмерном и четырехмерном пространствах Лобачевского // Успехи математических наук. 1951. Т. 6. Вып. 4 (44). С. 176–183. https://www.mathnet.ru/rus/rm6871
28. Первикова В. Н., Наумович Н. В., Дмитренко Г. Е., Зайцева Е. П., Подылина М. Г. Многомерная начертательная геометрия и геометрические методы исследования многокомпонентных систем // Труды Московского научно-методического семинара по начертательной геометрии и инженерной графике [Вып. 3]. Труды Московского авиационного института имени С. Орджоникидзе. М.: МАИ, 1972. Вып. 242. С. 23–34. https://cat.webtute.ru/pub.php?id=2333
29. Джапаридзе И. С. Независимые плоскостные модели четырехмерного пространства // Труды Грузинского политехнического института. 1965. № 1 (99). С. 31–46.
https://cat.webtute.ru/pub.php?id=9565
30. Джапаридзе И. С. Начертательная геометрия в свете геометрического моделирования. Тбилиси: Ганатлеба, 1983.
31. Филиппов П. В. Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1979.
32. Вальков К. И. Об интерпретации проективных преобразований четырехмерного пространства на двумерной плоскости // XVIII научная конференция ЛИСИ. Доклады. Л.: ЛИСИ, 1960. Вып. 18. С. 55–60. https://cat.webtute.ru/pub.php?id=9806
33. Скопец З. А., Пеклич В. А. Симплектическая геометрия и круговые преобразования Ли // Известия высших учебных заведений. Математика. 1973. № 1. С. 91–98.
https://www.mathnet.ru/rus/ivm4178
34. Пеклич В. А. Высшая начертательная геометрия. М.: АСВ, 2000.
35. Волков В. Я., Чижик М. А. Графические оптимизационные модели многофакторных процессов. Омск: ОГИС, 2009.
36. Волошинов Д. В. Конструктивное геометрическое моделирование: теория, практика, автоматизация. Саарбрюккен: LAP Lambert Academic Publishing, 2011.
37. Вертинская Н. Д. Математическое моделирование многофакторных и многопараметрических процессов в многокомпонентных системах на базе конструктивной геометрии. Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2009.
38. Бойков А. А., Шулайкин Д. А. Визуализация геометрических фигур и отношений комплексной плоскости средствами компьютерной графики // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. 2019. Т. 1. С. 72–93.
https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41429443
39. Бойков А. А., Орлова Е. В., Чернова А. В., Шкилевич А. А. О создании фрактальных образов для дизайна и полиграфии и некоторых геометрических обобщениях, связанных с ними // Проблемы качества графической подготовки студентов в техническом вузе: традиции и инновации. 2019. Т. 1. С. 325–339. https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41429476

40. Kogabaev N. T. On closure of configurations in freely generated projective planes // Сибирские электроные математические известия. 2021. Т. 18. Вып. 1. С. 358–368.
https://doi.org/10.33048/semi.2021.18.025

Поступила в редакцию 10.01.2023

Принята к публикации 15.06.2023

Бойков Алексей Александрович, старший преподаватель, кафедра инженерной графики, МИРЭА — Российский технологический университет, 119454, Россия, г. Москва, пр. Вернадского, 78.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2068-1267
E-mail: albophx@mail.ru

Селиверстов Александр Владиславович, к. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт проблем передачи информации им. А. А. Харкевича Российской академии наук, 127051, Россия, г. Москва, Большой Каретный пер., 19, стр. 1.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4746-6396
E-mail: slvstv@iitp.ru

Цитирование: А. А. Бойков, А. В. Селиверстов. О кубе и проекциях подпространства // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33. Вып. 3. С. 402–415.

MATHEMATICS 2023. Vol. 33. Issue 3. Pp. 402–415.

A. A. Boykov, A. V. Seliverstov

On a cube and subspace projections

Keywords: multidimensional cube, affine subspace, projection, discrete optimization, history of mathematics.

MSC2020: 51A15, 51N05

DOI: 10.35634/vm230302

We consider the arrangement of vertices of a unit multidimensional cube, an affine subspace, and its orthogonal projections onto coordinate subspaces. Upper and lower bounds on the subspace dimension are given under which some orthogonal projection always preserves the incidence relation between the subspace and cube vertices. Some oblique projections are also considered. Moreover, a brief review of the history of the development of multidimensional descriptive geometry is given. Analytic and synthetic methods in geometry diverged since the 17th century. Although both synthesis and analysis are tangled, from this time forth many geometers as well as engineers keep up a nice distinction. One can find references to the idea of higher-dimensional spaces in the 18th-century works, but proper development has been since the middle of the 19th century. Soon such works have appeared in Russian. Next, mathematicians generalized their theories to many dimensions. Our new results are obtained by both analytic and synthetic methods. They illustrate the complexity of pseudo-Boolean programming problems because reducing the problem dimension by orthogonal projection meets obstacles in the worst case.

REFERENCES

1. Seliverstov A. V. Binary solutions to large systems of linear equations, *Prikladnaya Diskretnaya Matematika*, 2021, no. 52, pp. 5–15 (in Russian). https://doi.org/10.17223/20710410/52/1
2. Antonopoulos A., Pagourtzis A., Petsalakis S., Vasilakis M. Faster algorithms for k-subset sum and variations, *Journal of Combinatorial Optimization*, 2023, vol. 45, issue 1, article number: 24. https://doi.org/10.1007/s10878-022-00928-0
3. Cacchiani V., Iori M., Locatelli A., Martello S. Knapsack problems — An overview of recent advances. Part I: Single knapsack problems, *Computers and Operations Research*, 2022, vol. 143, 105692. https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105692
4. Cacchiani V., Iori M., Locatelli A., Martello S. Knapsack problems — An overview of recent advances. Part II: Multiple, multidimensional, and quadratic knapsack problems, *Computers and Operations Research*, 2022, vol. 143, 105693. https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105693
5. D'Ambrosio C., Laureana F., Raiconi A., Vitale G. The Knapsack Problem with forfeit sets, *Computers and Operations Research*, 2023, vol. 151, 106093. https://doi.org/10.1016/j.cor.2022.106093
6. Jozefiak A., Shepherd F. B., Weninger N. A knapsack intersection hierarchy, *Operations Research Letters*, 2023, vol. 51, issue 1, pp. 72–78. https://doi.org/10.1016/j.orl.2022.12.001
7. Alon T., Halman N. Strongly polynomial FPTASes for monotone dynamic programs, *Algorithmica*, 2022, vol. 84, issue 10, pp. 2785–2819. https://doi.org/10.1007/s00453-022-00954-8
8. Leontiev V. K., Gordeev E. N. On the number of solutions to a system of Boolean equations, *Automation and Remote Control*, 2021, vol. 82, issue 9, pp. 1581–1596. https://doi.org/10.1134/S000511792109006X
9. Gordeev E. N., Leont'ev V. K. On the number of solutions to linear Diophantine equation and Frobenius problem, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2022, vol. 62, issue 9, pp. 1413–1423. https://doi.org/10.1134/S0965542522090044
10. Buekenhout F. (ed.) *Handbook of incidence geometry: Buildings and foundations*, North Holland, 1995. https://doi.org/10.1016/B978-0-444-88355-1.X5000-2
11. Petunin A. A., Chentsov A. G., Chentsov P. A. Some applications of optimization routing problems with additional constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 2, pp. 187–210. https://doi.org/10.35634/vm220203

12. Chentsov A. G., Chentsov A. A. Dynamic programming and questions of solvability of route bottleneck problem with resource constraints, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2022, vol. 32, issue 4, pp. 569–592 (in Russian). https://doi.org/10.35634/vm220406
13. Devadoss S. L., Harvey M. Unfoldings and nets of regular polytopes, *Computational Geometry*, 2023, vol. 111, 101977. https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2022.101977
14. Rozenfel'd B. A., Yushkevich A. P. Geometry, *Istoriya matematiki* (History of mathematics), vol. 3, Moscow: Nauka, 1970, pp. 153–221.
15. Polo-Blanco I. Alicia Boole Stott, a geometer in higher dimension, *Historia Mathematica*, 2008, vol. 35, issue 2, pp. 123–139. https://doi.org/10.1016/j.hm.2007.10.008
16. Gulak N. *Opyt geometrii o chetyrekh izmereniyakh. Geometriya sinteticheskaya* (Essay on geometry of four dimensions. Synthetic geometry), Tiflis: S. G. Melikov publ., 1877.
17. Lorenat J. Synthetic and analytic geometries in the publications of Jakob Steiner and Julius Plücker (1827–1829), *Archive for History of Exact Sciences*, 2016, vol. 70, issue 4, pp. 413–462. https://doi.org/10.1007/s00407-015-0174-8
18. Del Centina A. Desargues's concepts of involution and transversal, their origin, and possible sources of inspiration, *Archive for History of Exact Sciences*, 2022, vol. 76, issue 6, pp. 573–622. https://doi.org/10.1007/s00407-022-00296-5
19. Cerroni C. Non-Desarguian geometries and the foundations of geometry from David Hilbert to Ruth Moufang, *Historia Mathematica*, 2004, vol. 31, issue 3, pp. 320–336. https://doi.org/10.1016/S0315-0860(03)00049-1
20. Vorob'eva V. P., Zelenaya A. E., Lutsyk V. I. Using a 3D computer model of the T–x–y diagram of the ZrO_2–SiO_2–Al_2O_3 system to resolve contradictions in the initial experimental data, *Russian Journal of Inorganic Chemistry*, 2021, vol. 66, issue 6, pp. 894–901. https://doi.org/10.1134/S003602362106022X
21. Vorob'eva V. P., Zelenaya A. E., Lutsyk V. I., Sineva S. I., Starykh R. V., Novozhilova O. S. High-temperature area of the Fe–Ni–Co–Cu phase diagram: experimental study and computer design, *Journal of Phase Equilibria and Diffusion*, 2021, vol. 42, issue 2, pp. 175–193. https://doi.org/10.1007/s11669-021-00863-3
22. Lutsyk V. I., Vorob'eva V. P., Zelenaya A. E., Lamueva M. V. 3D computer model of the Co–Cu–CoS–Cu_2S subsystem T–x–y diagram above 800°C, *Journal of Mining and Metallurgy, Section B: Metallurgy*, 2021, vol. 57, issue 3, pp. 319–329. https://doi.org/10.2298/JMMB190307028L
23. Fedorov E. S. Opérations graphiques avec quatre variables indépendantes, *Bulletin de l'Académie des Sciences de Russie. VI série*, 1918, vol. 12, issue 7, pp. 615–624 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/im5928
24. Lodochnikov V. N. The simplest ways to represent multicomponent systems, *Izvestiya Instituta Fiziko-Khimicheskogo Analiza*, 1924, vol. 2, issue 2, pp. 255–351 (in Russian).
25. Radiščev V. P. Méthodes de représentation des systèmes à six composants dans les projections des figures régulières polydimensionales, *Annales du Secteur d'Analyse Physico-Chimique*, 1941, vol. 14, pp. 153–173 (in Russian).
26. Vachnadze G. A. Some problems of descriptive geometry of four-dimensional space, *Trudy Gruzinskogo Politekhnicheskogo Instituta*, 1955, no. 2 (37), pp. 193–214 (in Russian). https://cat.webtute.ru/pub.php?id=9401
27. Mordukhai-Boltovskii D. D. Parallelism and perpendicularity of straight lines, planes and hyperplanes in three-dimensional and four-dimensional Lobachevskii spaces, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 1951, vol. 6, issue 4 (44), pp. 176–183 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/rm6871
28. Pervikova V. N., Naumovich N. V., Dmitrenko G. E., Zaytseva E. P., Podylina M. G. Multidimensional descriptive geometry and geometric methods for studying multicomponent systems, *Trudy Moskovskogo Nauchno-Metodicheskogo Seminara po Nachertatel'noi Geometrii i Inzhenernoi Grafike [Issue 3]. Trudy Moskovskogo Aviatsionnogo Instituta Imeni S. Ordzhonikidze*, Moscow: Moscow Aviation Institute, 1972, issue 242, pp. 23–34 (in Russian). https://cat.webtute.ru/pub.php?id=2333

29. Dzhaparidze I. S. Independent planar models of four-dimensional space, *Trudy Gruzinskogo Politekhnicheskogo Instituta*, 1965, no. 1 (99), pp. 31–46 (in Russian). https://cat.webtute.ru/pub.php?id=9565
30. Dzhaparidze I. S. *Nachertatel'naya geometriya v svete geometricheskogo modelirovaniya* (Descriptive geometry in the light of geometric modeling), Tbilisi: Ganatleba, 1983.
31. Filippov P. V. *Nachertatel'naya geometriya mnogomernogo prostranstva i ee prilozheniya* (Descriptive geometry of multidimensional space and its applications), Leningrad: Leningrad State University, 1979.
32. Val'kov K. I. On the interpretation of projective transformations of the four-dimensional space in the two-dimensional plane, *XVIII Nauchnaya Konferentsiya Leningradskogo Inzhenerno-Stroitel'nogo Instituta. Doklady*, Leningrad: Leningrad Institute of Civil Engineering, 1960, issue 18, pp. 55–60 (in Russian). https://cat.webtute.ru/pub.php?id=9806
33. Skopets Z. A., Peklich V. A. Symplectic geometry, and Lie circular transformations, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, 1973, no. 1, pp. 91–98 (in Russian). https://www.mathnet.ru/eng/ivm4178
34. Peklich V. A. *Vysshaya nachertatel'naya geometriya* (Higher descriptive geometry), Moscow: ASV, 2000.
35. Volkov V. Ya., Chizhik M. A. *Graficheskie optimizatsionnye modeli mnogofaktornykh protsessov* (Graphic optimization models of multifactorial processes), Omsk: Omsk State Institute of Service, 2009.
36. Voloshinov D. V. *Konstruktivnoe geometricheskoe modelirovanie: teoriya, praktika, avtomatizatsiya* (Constructive geometric modeling: theory, practice, automation), Saarbrücken: LAP Lambert Academic Publishing, 2011.
37. Vertinskaya N. D. *Matematicheskoe modelirovanie mnogofaktornykh i mnogoparametricheskikh protsessov v mnogokomponentnykh sistemakh na baze konstruktivnoi geometrii* (Mathematical modeling of multifactorial and multiparameter processes in multicomponent systems based on constructive geometry), Irkutsk: Irkutsk State Technical University, 2009.
38. Boykov A. A., Shulajkin D. A. Visualization of geometric figures and relations of a complex plane by means of computer graphics, *Problemy Kachestva Graficheskoi Podgotovki Studentov v Tekhnicheskom Vuze: Traditsii i Innovatsii*, 2019, vol. 1, pp. 72–93 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41429443
39. Boykov A. A., Orlova E. V., Chernova A. V., Shkilevich A. A. Creating fractal images for design and polygraphy and some geometric generalizations associated with them, *Problemy Kachestva Graficheskoi Podgotovki Studentov v Tekhnicheskom Vuze: Traditsii i Innovatsii*, 2019, vol. 1, pp. 325–339 (in Russian). https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41429476
40. Kogabaev N. T. On closure of configurations in freely generated projective planes, *Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2021, vol. 18, issue 1, pp. 358–368. https://doi.org/10.33048/semi.2021.18.025

Received 10.01.2023

Accepted 15.06.2023

Alexey Alexandrovich Boykov, Senior Lecturer, Engineering Graphics Department, MIREA — Russian Technological University, pr. Vernadskogo, 78, Moscow, 119454, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-2068-1267
E-mail: albophx@mail.ru

Alexandr Vladislavovich Seliverstov, Candidate of Physics and Mathematics, Leading Researcher, Institute for Information Transmission Problems of the Russian Academy of Sciences (Kharkevich Institute), Bol'shoi Karetnyi per. 19, build. 1, Moscow, 127051, Russia.
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4746-6396
E-mail: slvstv@iitp.ru

Citation: A. A. Boykov, A. V. Seliverstov. On a cube and subspace projections, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2023, vol. 33, issue 3, pp. 402–415.